УДК 539.3

В. М. Вігак, Ю. В. Токовий

# АНАЛІЗ ЕЛЕМЕНТАРНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ

*Проведено аналіз елементарних розв'язків плоскої задачі пружності у прямокутній області, побудованих у вигляді функціональних залежностей від несамозрівноважених силових навантажень за використання методу прямого інтегрування вихідних рівнянь вказаної задачі.*

Плоска задача пружності для прямокутної області є однією з найстаріших задач механіки деформівного твердого тіла [8, 9]. Крім того, вона є свого роду еталонною задачею, оскільки на основі аналізу методів її розв'язування можна судити про розвиток методів для задач теорії пружності в обмежених областях з кутовими точками [3, 4] загалом. У роботах [3, 4, 8, 9] наведено широкий огляд методів розв'язування задач пружності як для прямокутної області, так і для інших обмежених областей з кутовими точками, а також розглянуто історичні аспекти їхнього розвитку. При використанні більшості відомих методів для побудови розв'язку задачі пружності у прямокутнику не ставили за мету знайти компоненти тензора напружень або вектора переміщень у вигляді функціональних залежностей від навантажень вказаної області в загальній постановці задачі. Проте наявність розв'язку задачі у такому вигляді є вкрай необхідною для розв'язання обернених задач пружності чи термопружності, а також для розрахунку оптимального за швидкодією керування температурними режимами та керування термонапруженим станом у тілі відповідної геометрії [1].

Значним поступом у розв'язанні вказаної проблеми виявився розвинутий у роботах [2, 10, 11] метод безпосереднього інтегрування рівнянь задач пружності й термопружності в напруженнях. Використання цього методу дозволяє побудувати розв'язок силової задачі для прямокутника у вигляді розвинень компонент тензора напружень у збіжні в усіх точках області та її границі ряди за повними системами власних і приєднаних функцій. При цьому приєднані функції виділяють у вказаних розвиненнях компоненти напружень, зумовлені несамозрівноваженою частиною навантаження, тобто такі, які залежать від головних вектора та моменту факторів навантаження, а власні функції − компоненти напружень, зумовлені самозрівноваженим навантаженням. За допомогою цього методу можна також знайти співвідношення між компонентами тензора напружень, інтегральні умови рівноваги та інтегральні результуючі зусилля і моменти від напружень в області їх визначення, а також встановити необхідні умови, які повинні задовольняти силові навантаження, для існування розв'язків вказаних задач. Той факт, що ці розв'язки знайдено у вигляді функціональних залежностей від навантажень, які не втрачають свого сенсу на границі області, відкриває широкі можливості щодо їх використання для розв'язання згаданих вище обернених задач і задач керування.

У цій роботі на основі розв'язку [2] плоскої задачі пружності у прямокутній області проведено аналіз несамозрівноважених частин компонент тензора напружень, які називають [3, 4] елементарними розв'язками.

Розглядається плоска квазістатична задача пружності у прямокутній області $D = \{(x,y) \in [-a,a] \times [-b,b]\}$, яка для однорідного ізотропного матеріалу за відсутності масових сил описується відомими рівняннями рівноваги та суцільності в напруженнях:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \qquad (x,y) \in D, \tag{1}$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{2}$$

за наявності на межі області зовнішніх зусиль

$$\sigma_x\Big|_{x=\pm a} = \begin{cases} -p_1(y), \\ -p_2(y), \end{cases} \qquad \sigma_{xy}\Big|_{x=\pm a} = \begin{cases} q_1(y), \\ q_2(y), \end{cases}$$

$$\sigma_y\Big|_{y=\pm b} = \begin{cases} -p_3(x), \\ -p_4(x), \end{cases} \qquad \sigma_{xy}\Big|_{y=\pm b} = \begin{cases} q_3(x), \\ q_4(x). \end{cases} \tag{3}$$

У роботах [2, 11] знайдено розв'язки плоских задач пружності й термопружності в напруженнях для прямокутної області у вигляді розвинень напружень $\sigma_x$ у збіжний в області $D$ ряд за повною системою функцій $\{1,\ y,\ \cos\gamma_n y/b,\ \sin\lambda_n y/b\}$, напружень $\sigma_y$ – в аналогічний ряд за повною системою $\{1,\ x,\ \cos\gamma_n x/a,\ \sin\lambda_n x/a\}$ та напружень $\sigma_{xy}$ – за $\{1,\ y,\ y^2,\ \sin\gamma_n y/b,\ \cos\lambda_n - \cos\lambda_n y/b\}$ і $\{1,\ x,\ x^2,\ \sin\gamma_n x/a,\ \cos\lambda_n - \cos\lambda_n x/a\}$. Тут $\gamma_n = \pi n$; $\lambda_n > 0$ – корені рівняння $\operatorname{tg}\lambda = \lambda$, $n = 1, 2, \ldots$. При цьому власні функції $\cos\gamma_n y/b$, $\sin\lambda_n y/b$; $\cos\gamma_n x/a$, $\sin\lambda_n x/a$; $\sin\gamma_n y/b$, $\cos\lambda_n - \cos\lambda_n y/b$ та $\sin\gamma_n x/a$, $\cos\lambda_n - \cos\lambda_n x/a$, $n = 1, 2, \ldots$, виділяють у розвиненнях в ряди відповідних напружень частини, які залежать від самозрівноважених частин зовнішніх зусиль (3). Вплив на напружений стан цих частин напружень послаблюється з віддаленням від відповідної сторони прямокутника. Приєднані ж функції 1, $y$; 1, $x$; 1, $y$, $y^2$ та 1, $x$, $x^2$ виділяють у розвиненнях напружень елементарні розв'язки $\sigma_x^0$, $\sigma_y^0$, $\sigma_{xy}^0$, які записано у вигляді залежностей від несамозрівноважених частин зусиль (3):

$$\sigma_x^0 = -\frac{1}{4b}\int_{-b}^{b}(p_1 + p_2)\,dy + \frac{x}{4ab}\int_{-b}^{b}(p_2 - p_1)\,dy - {}$$
$$- \frac{3y}{4b^3}\int_{-b}^{b}(p_1 + p_2)y\,dy + \frac{3xy}{4ab^3}\int_{-b}^{b}(p_2 - p_1)y\,dy,$$

$$\sigma_y^0 = -\frac{1}{4a}\int_{-a}^{a}(p_3 + p_4)\,dx + \frac{y}{4ab}\int_{-a}^{a}(p_4 - p_3)\,dx - {}$$
$$- \frac{3x}{4a^3}\int_{-a}^{a}(p_3 + p_4)x\,dx + \frac{3xy}{4ba^3}\int_{-a}^{a}(p_4 - p_3)x\,dx,$$

$$\sigma_{xy}^0 = \frac{1}{4}\left(q_{12}^{+} - q_{21}^{-}\frac{x}{a} - q_{43}^{-}\frac{y}{b}\right) + \frac{3(x^2 - a^2)}{8a^3}\left(aq_{34}^{+} - \int_{-a}^{a}(q_3 + q_4)\,dx\right) + {}$$
$$+ \frac{3(y^2 - b^2)}{8b^3}\left(bq_{12}^{+} - \int_{-b}^{b}(q_1 + q_2)\,dy\right), \tag{4}$$

де $q_{21}^{-} = (q_2 - q_1)\big|_{y=b} + (q_2 - q_1)\big|_{y=-b}$, $\qquad q_{43}^{-} = (q_4 - q_3)\big|_{x=a} + (q_4 - q_3)\big|_{x=-a}$,

$q_{12}^{+} = (q_1 + q_2)\big|_{y=b} + (q_1 + q_2)\big|_{y=-b} = q_{34}^{+} = (q_3 + q_4)\big|_{x=a} + (q_3 + q_4)\big|_{x=-a}$.

Несамозрівноважені частини зовнішніх зусиль із граничних умов (3) виділяються тими самими функціями і мають вигляд [5, 10]

$$p_i^0 = c_i^1 + y c_i^2, \qquad c_i^1 = \frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} p_i\,dy, \qquad c_i^2 = \frac{3}{2b^3}\int_{-b}^{b} y p_i\,dy,$$

$$p_j^0 = c_j^1 + x c_j^2, \qquad c_j^1 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} p_j\,dx, \qquad c_j^2 = \frac{3}{2a^3}\int_{-a}^{a} x p_j\,dx,$$

$$q_i^0 = d_i^1 + y d_i^2 + (y^2 - b^2) d_i^3, \qquad q_j^0 = d_j^1 + x d_j^2 + (x^2 - a^2) d_j^3,$$

$$d_i^1 = [\,q_i(b) + q_i(-b)\,]/2, \qquad d_j^1 = [\,q_j(a) + q_j(-a)\,]/2,$$

$$d_i^2 = [\,q_i(b) - q_i(-b)\,]/(2b), \qquad d_j^2 = [\,q_j(a) - q_j(-a)\,]/(2a),$$

$$d_i^3 = \frac{3}{4b^3}\left( b\,[\,q_i(b) + q_i(-b)\,] - \int_{-b}^{b} q_i\,dy \right),$$

$$d_j^3 = \frac{3}{4a^3}\left( a\,[\,q_j(a) + q_j(-a)\,] - \int_{-a}^{a} q_j\,dx \right), \qquad i = 1,2, \qquad j = 3,4. \tag{5}$$

Надалі, оскільки розглядатимуться лише несамозрівноважені напруження (4) чи зусилля (5), для спрощення запису верхній індекс «0» пропущено.

Для існування розв'язку задачі (1)–(3) у вигляді (4) несамозрівноважені частини (5) зовнішніх зусиль (3) повинні задовольняти такі умови:

$$a q_{43}^- = \int_{-a}^{a} (q_4 - q_3)\,dx = \int_{-b}^{b} (p_2 - p_1)\,dy,$$

$$b q_{21}^- = \int_{-b}^{b} (q_2 - q_1)\,dy = \int_{-a}^{a} (p_4 - p_3)\,dx,$$

$$ab q_{34}^+ = b\int_{-a}^{a} (q_3 + q_4)\,dx + \int_{-a}^{a} (p_3 - p_4)\,x\,dx,$$

$$ab q_{12}^+ = a\int_{-b}^{b} (q_1 + q_2)\,dy + \int_{-b}^{b} (p_1 - p_2)\,y\,dy,$$

$$q_3(a) - q_3(-a) = q_4(a) - q_4(-a),$$

$$q_1(b) - q_1(-b) = q_2(b) - q_2(-b), \tag{6}$$

а також закон парності дотичних напружень у кутових точках області $D$.

Розв'язки (4) для нормальних напружень містять доданки, які виражаються через коефіцієнти несамозрівноважених нормальних зусиль (5), помножені на 1, $x$, $y$, $xy$. У випадку дотичних напружень (4) маємо доданки у вигляді виразів через коефіцієнти дотичних зусиль (5), помножені на 1, $x$, $y$, $y^2 - b^2$, $x^2 - a^2$. Проаналізуємо, якими зовнішніми навантаженнями (5) області $D$ спричинений кожний із цих доданків в елементарних розв'язках (4). Почнемо з аналізу напружень $\sigma_x$. З огляду на (4), (6) очевидним є те, що зусилля $p_3$, $p_4$ не є пов'язані з несамозрівноваженими напруженнями (4) для $\sigma_x$, тому при аналізі цих напружень покладемо вказані зусилля рівними нулеві.

Поставимо вимогу, щоб у першому з виразів (4) усі доданки, крім $\int_{-b}^{b}(p_1+p_2)\,dy$, дорівнювали нулеві. Легко переконатись, що така вимога задовольняється за умов дії таких несамозрівноважених зовнішніх зусиль (5):

$$p_i = c_1, \qquad q_i = q_j = p_j = 0, \qquad c_1 = c_i^1, \qquad i = 1,2, \quad j = 3,4. \tag{7}$$

Очевидно, що зусилля (7) зумовлюють простий стиск (розтяг) прямокутної області вздовж осі $x$ (рис. 1) та напруження (4) у вигляді

$$\sigma_x = -\, c_1, \qquad \sigma_y = \sigma_{xy} = 0. \tag{8}$$

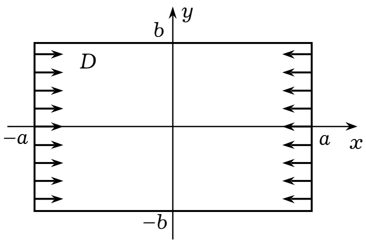

Рис. 1

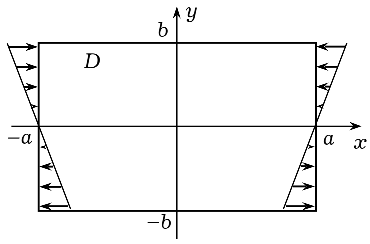

Рис. 2

З'ясуємо, коли у виразі (4) для $\sigma_x$ усі доданки, крім того, який стоїть при $y$, дорівнюють нулеві. Така умова задовольняється при

$$p_i = yc_2, \qquad q_i = q_j = p_j = 0, \qquad c_2 = c_i^2, \qquad i = 1,2, \quad j = 3,4. \tag{9}$$

Тоді напружений стан буде описуватись напруженнями

$$\sigma_x = -\, yc_2, \qquad \sigma_y = \sigma_{xy} = 0, \tag{10}$$

які виражають чистий згин області (рис. 2).

Елементарні розв'язки для напружень (8), (10), спричинені відповідно зусиллями (7), (9), є здавна відомими в теорії пружності [6, 7]. На існування таких розв'язків ще в 1855 році вказав Барре де Сен-Венан, сформулювавши основоположний для механіки принцип про місцевий вплив на напружений стан самозрівноважених систем зовнішніх силових навантажень, який слабшає з віддаленням від навантаженої ділянки межі.

Визначимо тепер, якими зовнішніми зусиллями зумовлені доданки у виразі (4) для $\sigma_x$, які мають множниками $x$ та $xy$.

Покладемо усі доданки у першій з формул (4), крім доданка при $x$, рівними нулеві. Внаслідок цього з урахуванням (6) отримаємо такі вирази для зовнішніх зусиль (5):

$$p_1 = c_1, \quad p_2 = -\, c_1, \quad q_3 = d_3, \quad q_4 = d_4, \quad q_1 = q_2 = d + yc_1/a, \tag{11}$$

де $c_1 = c_1^1,\ d = d_i^1,\ d_j = d_j^1,\ 2d = d_3 + d_4,\ 2bc_1 = a(d_3 - d_4), \quad i = 1,2,\ j = 3,4.$

Очевидно, що, поклавши в (11) $d = 0$, отримаємо навантаження границі області за такими законами (рис. 3):

$$p_1 = c_1, \quad p_2 = -\, c_1, \quad q_3 = bc_1/a, \quad q_4 = -\, bc_1/a, \quad q_1 = q_2 = yc_1/a, \tag{12}$$

а напружений стан описуватиметься формулами

$$\sigma_x = -\, xc_1/a, \qquad \sigma_y = 0, \qquad \sigma_{xy} = yc_1/a. \tag{13}$$

У випадку силових навантажень (12) дія зусиль $p_1$, $p_2$ на сторонах області $x = \pm\, a$ зрівноважується дією зусиль $q_3$, $q_4$ на сторонах $y = \pm\, b$. При цьому, щоб виконувались умови (6) зі збереженням закону парності дотичних напружень у кутових точках області $D$, на сторонах $x = \pm a$ повинні бути заданими зусилля $q_1$, $q_2$, які не впливають на головні вектор і момент усього комплексу силових навантажень (12). З умов (6) також випливає, що стосовно напруженого стану, який описується формулами (13), зусилля для дотичних напружень повинні бути відмінними від нуля.

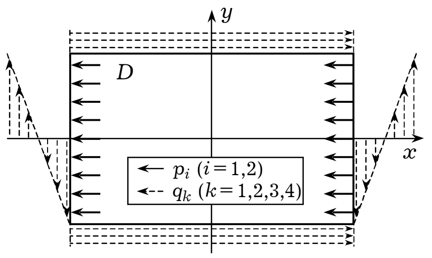


Рис. 3

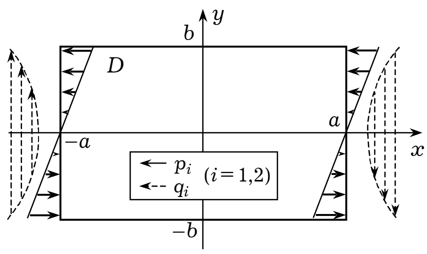


Рис. 4

Поклавши тепер рівними нулеві усі доданки у виразі (4) для $\sigma_x$, крім того, який має множником $xy$, із урахуванням (6) отримаємо такі формули для зусиль (5):

$$p_1 = yc_2, \quad p_2 = -yc_2, \quad q_3 = q_4 = d,$$
$$q_1 = q_2 = d + (y^2 - b^2)c_2/(2a). \tag{14}$$

Тут $c_2 = c_1^2$, $d = d_i^1 = d_j^1$, $i = 1, 2$, $j = 3, 4$. Після зняття зрівноваженої системи дотичних зусиль, поклавши в (14) $d = 0$, отримуємо зусилля (рис. 4)

$$p_1 = yc_2, \quad p_2 = -yc_2, \quad q_3 = q_4 = 0, \quad q_1 = q_2 = (y^2 - b^2)c_2/(2a) \tag{15}$$

та напруження

$$\sigma_x = -xyc_2/a, \qquad \sigma_y = 0, \qquad \sigma_{xy} = (y^2 - b^2)c_2/(2a). \tag{16}$$

За напруженого стану (16), спричиненого зовнішніми зусиллями (15), дія зусиль $p_1$ на стороні прямокутника $x = a$ зрівноважується зусиллями $q_1$. Аналогічно, на стороні $x = -a$ зусилля $p_2$ компенсуються зусиллями $q_2$.

Таким чином, переконуємось, що наявність в елементарному розв'язку (4) для $\sigma_x$ доданків при $x$ та $xy$ спричинена заданням дотичних зусиль (12), (15), що зумовлює в області $D$ появу несамозрівноважених дотичних напружень (13), (16).

Дослідження елементарного розв'язку для $\sigma_y$ проводиться так, як і для $\sigma_x$. Відповідні вирази отримаємо з попередніх, замінивши $x$, $y$, $a$, $b$, $p_i$, $q_i$ на $y$, $x$, $b$, $a$, $p_j$, $q_j$, $i = 1, 2$, $j = 3, 4$.

Для елементарного розв'язку $\sigma_{xy}$ на основі (6) отримаємо

$$\sigma_{xy} = d, \qquad d = d_i^1 = d_j^1 = q_i(\pm b) = q_j(\pm a), \qquad i = 1, 2, \qquad j = 3, 4,$$

за рівності нулеві нормальних напружень та при

$$q_i = q_j = d, \qquad i = 1, 2, \qquad j = 3, 4.$$

Коли зусилля (5) на границі області задати у вигляді

$$q_3 = d, \qquad q_4 = -d, \qquad q_i = yd/b, \qquad p_i = c_i^1,$$
$$d = d_j^1, \qquad 2ad = b(c_1^1 - c_2^1), \qquad i = 1, 2, \quad j = 3, 4, \tag{17}$$

то вираз (4) для дотичних напружень буде містити лише доданок при $y$ і напружений стан буде описуватись формулами

$$\sigma_x = - xd/b - (c_1^1 + c_2^1)/2, \qquad \sigma_y = 0, \qquad \sigma_{xy} = yd/b. \tag{18}$$

Очевидно, що, коли $c_1^1 = - c_2^1$, то формули (17), (18) співпадають з (12), (13).

Нарешті, вираз (4) для $\sigma_{xy}$ міститиме лише доданок при $y^2 - b^2$, коли

$$p_j = q_j = 0, \qquad q_i = (y^2 - b^2)\,d, \qquad p_i = c_i^2 y,$$
$$d = d_i^3, \qquad 4ad = c_1^2 - c_2^2, \qquad i = 1,2, \qquad j = 3,4. \tag{19}$$

Напруження (4) у випадку зусиль (19) мають вигляд

$$\sigma_x = -2xyd - y(c_1^2 + c_2^2)/2, \qquad \sigma_y = 0, \qquad \sigma_{xy} = (y^2 - b^2)d. \tag{20}$$

Легко переконатись, що при $c_1^2 = - c_2^2$ з формул (19), (20) отримуємо відповідно співвідношення (15), (16).

Аналіз доданків у виразі (4) для $\sigma_{xy}$ при $x$, $x^2 - a^2$ проводиться, як і для доданків при $y$, $y^2 - b^2$.

Отже, в роботі проаналізовано елементарні розв'язки плоскої задачі пружності у прямокутній області, отримані за допомогою методу прямого інтегрування вихідних рівнянь вказаної задачі. Знайдено схеми навантаження області несамозрівноваженими зовнішніми зусиллями, які відповідають кожному доданку у виразах елементарних розв'язків (4). Окрім здавна відомих у теорії пружності елементарних розв'язків, які відповідають розтягу (стиску) та згину прямокутної області, виявлено ще два способи навантаження вказаної області, для яких обов'язковим є задання на сторонах прямокутника зусиль для нормальних і дотичних напружень.

У перспективі метод побудови елементарних розв'язків задачі пружності у прямокутній області планується розвинути для анізотропних неоднорідних і термочутливих матеріалів.


1. *Вигак В. М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.
2. *Вігак В. М., Токовий Ю. В.* Дослідження плоского напруженого стану в прямокутній області // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **37**, № 2. – С. 61–66.
3. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
4. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Равновесие упругих тел канонической формы. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с. – Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6 т. – Т. 3.
5. *Ігнатчук Д.* Власні функції компонент тензора напружень плоскої задачі термопружності в прямокутній області // Мат. проблеми механіки неоднорідних структур: В 2 т. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики НАН України, 2000. – Т. 1. – С. 276–279.
6. *Папкович П. Ф.* Теория упругости. – Л.–М.: Оборонгиз, 1939. – 640 с.
7. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
8. *Meleshko V. V.* Equilibrium of elastic rectangle: Mathiev-Inglis-Pickett solution revisited // J. Elasticity. – 1995. – **40**. – P. 207–238.
9. *Meleshko V. V.* Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. – 2003. – **56**, No. 1. – P. 1–53.
10. *Vigak V. M., Tokovyi Yu. V.* Construction of elementary solutions to a plane elastic problem for a rectangular domain // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No. 7. – P. 829–836.
11. *Vihak V. M., Yuzvyak M. Y., Yasinsky A. V.* The solution of the thermoelasticity problem for a rectangular domain // J. Therm. Stresses. – 1998. – **21**, No. 5. – P. 545–561.

**АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ РЕШЕНИЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ**

*Проведён анализ элементарных решений плоской задачи упругости в прямоугольной области, построенных в виде функциональных зависимостей от несамоуравновешенных силовых нагружений при использовании метода прямого интегрирования исходных уравнений указанной задачи.*

**ANALYSIS OF ELEMENTARY SOLUTIONS TO PLANE ELASTIC PROBLEM FOR RECTANGULAR DOMAIN**

*The analysis of elementary solutions to the plane elastic problem in a rectangle is carried out. These solutions are constructed as functional dependences on non-self-equilibrated force loadings with use of direct integration method of initial equations for the stated problem.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
24.10.02