УДК 539.3

В. С. Саркисян, А. В. Керопян

К РЕШЕНИЮ ДВУХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ С ДВУМЯ РАЗНОРОДНЫМИ КОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ

Рассматриваются задачи о контактном взаимодействии двух конечных стрингеров (накладок) из различных упругих материалов с линейно деформируемыми основаниями (плоская деформация) в виде упругой бесконечной полосы и анизотропной (неортотропной) полуплоскости. Предполагается, что один из стрингеров находится в идеальном механическом контакте с основанием, а другой контактирует с ним через тонкий слой клея. Стрингеры деформируются под действием горизонтальных сил. Задачи сводятся к системам интегро-алгебраических уравнений второго рода. Определены области изменения характерных параметров задач, при которых системы допускают точное решение.

Задачи о контактном взаимодействии одного конечного стрингера с пластиной через тонкий слой клея рассмотрены на основании разных подходов в работах [2, 5, 8]. В статье [3] сформулирована задача для пластины с двумя конечными стрингерами. В настоящей работе исследуется передача нагрузки от двух конечных стрингеров (с учетом физико-механических характеристик материала склеивания под одним стрингером) к упругим телам в виде упругой изотропной полосы **(*задача A*)** и анизотропной полуплоскости **(*задача B*).**

Задача A. Пусть бесконечная полоса (плоская деформация, модуль упругости E, коэффициент Пуассона ν и толщина H) жестко соединена с недеформируемым основанием гранью $y = -H$ и усилена двумя конечными стрингерами малых толщин h_1 и h_2, один из которых склеен с ней, а другой находится с ней в идеальном механическом контакте. Стрингер, приклеенный к полосе, находится на отрезке $[b,\ c]$, а другой – на отрезке $[-a,\ a]$, причем $b > a$. Задача заключается в определении неизвестных контактных напряжений, когда на концах стрингеров $x = a$ и $x = c$ приложены горизонтальные силы P и Q соответственно, которые направлены вдоль оси Ox в одну сторону. Принимается модель контакта стрингеров по линии, т.е. предполагается, что они находятся в одноосном напряженном состоянии и под ними действуют только касательные контактные напряжения [1–5, 8].

Учитывая вышеизложенное, будем иметь

$$u^{(2)}(x,0) = \int_{-a}^{a} \mathcal{K}_n(|x-s|)P(s)\,ds + \int_{b}^{c} \mathcal{K}_n(|x-s|)q(s)\,ds\,, \tag{1}$$

где

$$\mathcal{K}_n(|x|) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_n(\sigma)e^{-i\sigma x}\,d\sigma\,,$$

$$\mathcal{K}_n(\sigma) = \frac{(2\chi+1)\left[(\chi+1)\operatorname{sh} 2H|\sigma| + 2\chi H|\sigma|\right]}{2\mu|\sigma|\left[2\chi(\chi+1)\operatorname{ch} 2H|\sigma| + \chi^2(4H^2\sigma^2+1) + (\chi+1)^2\right]}\,, \tag{2}$$

$u^{(2)}(x,0)$ – горизонтальные перемещения точек полосы; $P(x)$ – касательные контактные напряжения при $|x| \le a$; $q(x)$ – касательные напряжения при $b \le x \le c$; $\chi = (\lambda+\mu)/2\mu$; $\lambda,\ \mu$ – упругие постоянные Ляме материала полосы.

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2003. – 46, № 2. – С. 114-121.

Для стрингера, приклеенного по отрезку $[b,\ c]$, получим

$$u^{(1)}(x) - u^{(2)}(x,0) = k^* q(x), \qquad b \le x \le c, \tag{3}$$

где $u^{(1)}(x)$ – горизонтальные перемещения точек стрингера; $k^* = h_g / G_g$, $G_g = E_g / 2(1+\nu_g)$; E_g, ν_g, h_g – соответственно модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина слоя клея.

Из условия равновесия стрингера и закона Гука запишем

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{dx^2} = \frac{q(x)}{E_1 h_1}, \qquad b \le x \le c, \tag{4}$$

где E_1, h_1 – модуль упругости и толщина стрингера. С учетом зависимости (3) уравнение (4) примет вид

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{dx^2} - \alpha^2 u^{(1)}(x) = -\,\alpha^2 u^{(2)}(x,0), \qquad b \le x \le c, \quad \alpha = 1/E_1 h_1 k^*. \tag{5}$$

При этом граничные условия на перемещения запишем как

$$\left.\frac{du^{(1)}}{dx}\right|_{x=b} = 0, \qquad \left.\frac{du^{(1)}}{dx}\right|_{x=c} = \frac{Q}{E_1 h_1}. \tag{6}$$

Решение граничной задачи (5), (6) получим в виде

$$u^{(1)}(x) = u_0^{(1)}(x) + \alpha^2 \int_b^c G(x,s) u^{(2)}(s,0)\, ds, \qquad b \le x \le c, \tag{7}$$

где

$$u_0^{(1)}(x) = \frac{Q \operatorname{ch} \alpha(x-b)}{\alpha E_1 h_1 \operatorname{sh} \alpha(c-b)},$$

$$G(x,s) = \frac{1}{\alpha \operatorname{sh} \alpha(c-b)} \begin{cases} \operatorname{ch} \alpha(x-c) \operatorname{ch} \alpha(s-b), & x > s, \\ \operatorname{ch} \alpha(x-b) \operatorname{ch} \alpha(s-c), & x < s. \end{cases}$$

Функция $G(x,s)$ непрерывна, причем $G(x,s) = G(s,x)$.

Теперь, учитывая (3), запишем

$$k^* q(x) + u^{(2)}(x,0) = \alpha^2 \int_b^c G(x,s) u^{(2)}(s,0)\, ds + u_0^{(1)}(x), \qquad b \le x \le c. \tag{8}$$

На основании (1) из (8) получим

$$q(x) + \frac{1}{k^*} \int_{-a}^{a} \mathcal{K}_n(|\,x-s\,|) P(s)\, ds + \frac{1}{k^*} \int_b^c \mathcal{K}_n(|\,x-s\,|) q(s)\, ds =$$

$$= \frac{\alpha^2}{k^*} \int_b^c G(x,s) \left[\int_{-a}^{a} \mathcal{K}_n(|\,s-\tau\,|) P(\tau)\, d\tau \right] ds +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{k^*} \int_b^c G(x,s) \left[\int_b^c \mathcal{K}_n(|\,s-\tau\,|) q(\tau)\, d\tau \right] ds + \frac{1}{k^*} u_0^{(1)}(x), \qquad b \le x \le c. \tag{9}$$

Представив теперь ядро $\mathcal{K}_n(x)$ из соотношения (2) как

$$\mathcal{K}_n(|\,x\,|) = \frac{A_1}{\pi} \ln \frac{1}{|\,x\,|} + A_1 R(x), \tag{10}$$

где регулярная часть $R(x)$ ядра $\mathcal{K}_n(x)$ имеет вид

$$R(x) = -\frac{C}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{x^{2n}}{\pi(2n)!} \left(\ln\frac{1}{|x|} + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n} - C \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{|x|^{2n-1}}{2(2n-1)!} \right] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathcal{K}_n(\sigma) - \frac{A_1}{|\sigma|} \right] e^{-i\sigma x}\, d\sigma ,$$

из (9) после замены переменных x на ax, s на as, τ на $a\tau$ и некоторых несложных преобразований получим

$$q^*(x) + \beta \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left[L(x,\tau) + H(x,\tau) \right] q^*(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \beta \int_{-1}^{1} \left[L(x,\tau) + H(x,\tau) \right] P^*(\tau)\, d\tau = g_0(x), \qquad \delta_1 \le x \le \delta_2 . \tag{11}$$

Здесь

$$L(x,\tau) = \frac{1}{\pi} \ln\frac{1}{|x-\tau|} - \frac{a\alpha^2}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} G^*(x,s) \ln\frac{1}{|s-\tau|}\, ds ,$$

$$H(x,\tau) = R^*(x-\tau) - a\alpha^2 \int_{\delta_1}^{\delta_2} G^*(x,s) R^*(s-\tau)\, ds ,$$

$$g_0(x) = u_0^{(1)}(ax)/k^*, \qquad \beta = aA_1/k^*, \qquad \delta_1 = b/a, \qquad \delta_2 = c/a ,$$

$$q^*(z) = q(az), \quad P^*(z) = P(az), \quad G^*(x,s) = G(ax,as), \quad R^*(z) = R(az) , \tag{12}$$

$A_1 = (2\chi + 1)/4\mu\chi$; C − постоянная Эйлера.

Отметим, что при получении (11) был изменен порядок интегрирования, достоверность которого следует из теоремы Фубини [7], а также равенств

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} G^*(x,s)\, ds = \frac{1}{a\alpha^2}, \qquad \int_{\delta_1}^{\delta_2} L(x,\tau)\, dx = 0, \qquad \int_{\delta_1}^{\delta_2} H(x,\tau)\, dx = 0 . \tag{13}$$

При этом имеем [3]

$$\int_b^c G(x,s) \cos\left[\frac{n\pi(s-b)}{c-b} \right] ds = \frac{(c-b)^2}{\alpha^2(c-b)^2 + n^2\pi^2} \cos\left[\frac{n\pi(x-b)}{c-b} \right],$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots , \tag{14}$$

где $\cos\left[\frac{n\pi(x-b)}{c-b} \right]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, − полная ортогональная система функций в пространстве $L_2(b,c)$.

Функция $g_0(x)$ в уравнении (11) описывает контактные напряжения в случае жесткой полосы (т.е. при $E \to \infty$). Очевидно, что

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} g_0(x)\, dx = \frac{Q}{\ell}, \qquad \ell = \delta_2 - \delta_1 . \tag{15}$$

Из (11) следует также, что $q^*(x)$ в точках $x = \delta_1$, $x = \delta_2$ принимает конечные значения.

Теперь, считая, что x изменяется в интервале $[-a, a]$, получим уравнение равновесия второго стрингера в виде

$$\frac{du^{(1)}}{dx}=\frac{1}{E_2h_2}\int\limits_{-a}^{x}P(s)\,ds,\qquad\qquad -a\le x\le a\,,\tag{16}$$

при условии

$$\int\limits_{-a}^{a}P(s)\,ds=P\,.\tag{17}$$

С другой стороны, учитывая представление

$$\mathcal{K}_n'(x)=\frac{d\mathcal{K}_n(x)}{dx}=-\frac{A_1}{\pi}\left[\frac{1}{x}-\tilde{\mathcal{K}}(x)\right],\tag{18}$$

где

$$\tilde{\mathcal{K}}(x)=\int\limits_0^{\infty}\left[1-\mathcal{K}^*(\sigma)\right]\sin\sigma x\,d\sigma,\qquad \mathcal{K}^*(\sigma)=\frac{\sigma}{A_1}\mathcal{K}_n(\sigma),\qquad \int\limits_0^{\infty}\sin\sigma x\,d\sigma=\frac{1}{x}\,,$$

полученное на основании соотношений (1) и (10), из условия контакта на отрезке $[-a,a]$ получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{s-x}P^*(s)\,ds+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{1}{s-x}q^*(s)\,ds+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\mathcal{K}^*(x-s)P^*(s)\,ds+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2}\mathcal{K}^*(x-s)q^*(s)\,ds=\lambda^*\int\limits_{-1}^{1}P^*(s)\,ds,\qquad -1<x<1\,,\tag{19}$$

при условии

$$\int\limits_{-1}^{1}P^*(s)\,ds=\frac{P}{a}\,,\tag{20}$$

где

$$\mathcal{K}^*(z)=\tilde{\mathcal{K}}(az),\qquad \lambda^*=a\,/\,E_2h_2A_1\,.$$

Теперь, принимая во внимание, что $P^*(x)$ в точках $x=\pm1$ имеет корневую особенность [1], решение этого уравнения ищем в виде

$$P^*(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{n=0}^{\infty}X_nT_n(x)\,,\tag{21}$$

где $T_n(x)$ − многочлены Чебышева первого рода [1, 6].

Далее, подставляя (21) в (11) и (19), известным способом [1] после вычисления некоторых интегралов и с помощью известных спектральных соотношений для многочленов Чебышева первого и второго родов окончательно получим систему уравнений:

$$q^*(x)+\beta\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2}\left[L(x,\tau)+H(x,\tau)\right]q^*(\tau)\,d\tau+$$

$$+\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}\left[\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}-a\alpha^2\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2}G^*(x,s)\frac{ds}{\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)^n}\right]+$$

$$+\beta\sum_{n=1}^{\infty}X_n\left[\tilde{R}(x)-a\alpha^2\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2}G^*(x,s)\,\tilde{R}(s)\,ds\right]=g(x),\qquad \delta_1\le x\le\delta_2\,,$$

$$X_m + \frac{2}{\pi}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\left[\frac{1}{\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)^m} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\mathcal{K}^*(x-s)\sqrt{1-x^2}\,U_{m-1}(x)\,dx\right]q^*(s)\,ds +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda^*\mathcal{K}_{m,n}^{(1)} + \mathcal{K}_{m,n}^{(2)})X_n = X_0(\lambda^* a_m + b_m), \qquad m = 1,2,\ldots,$$

$$-1 < x < 1, \tag{22}$$

где

$$g(x) = g_0(x) + \beta X_0\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - a\alpha^2\int_{\delta_1}^{\delta_2}G^*(x,s)\ln\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)ds -\right.$$

$$\left. -\tilde{R}(x) - a\alpha^2\int_{\delta_1}^{\delta_2}G^*(x,s)\,\tilde{R}(s)\,ds\right],$$

$$\mathcal{K}_{m,n}^{(1)} = \frac{2}{\pi n}\int_{-1}^{1}(1-x^2)U_{n-1}(x)U_{m-1}(x)\,dx,$$

$$\mathcal{K}_{m,n}^{(2)} = \frac{2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\mathcal{K}^*(x-s)\frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds\right)\sqrt{1-x^2}\,U_{m-1}(x)\,dx,$$

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}(\pi - \arccos x)\sqrt{1-x^2}\,U_{m-1}(x)\,dx, \qquad \tilde{R}(x) = \int_{-1}^{1}\frac{R^*(x-\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau,$$

$$b_m = -\frac{2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\mathcal{K}^*(x-s)\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}\right)\sqrt{1-x^2}\,U_{m-1}(x)\,dx,$$

$$\mathcal{K}_m(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\mathcal{K}^*(x-s)\sqrt{1-x^2}\,U_{m-1}(x)\,dx, \qquad m = 1,2,\ldots,$$

$$X_0 = P/a\pi. \tag{23}$$

Отметим, что при получении (22) использованы представления [3]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-s|}\frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = \begin{cases}\dfrac{1}{n\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}, & x>1, \quad n\neq 0,\\ -\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\ln 2, & x>1, \quad n=0,\end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{x^2-1}\,U_{n-1}(x)\,dx}{x-s} = \frac{1}{\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)^n}, \qquad s>1, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Таким образом, задача сведена к решению системы интегро-алгебраических уравнений (22).

Для исследования системы (22) представим ее в операторном виде. Рассмотрим банахово пространство $\mathcal{B}$ с элементами $y = \begin{pmatrix}\varphi(x)\\ z\end{pmatrix}$, где $\varphi(x)$ принадлежит пространству $L_2(\delta_1,\delta_2)$ квадратично суммируемых функций, z – пространству ограниченных последовательностей $\mathcal{M}$, и введем операторы

$$L_{11}\varphi = \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \left[L(x,\tau) + H(x,\tau)\right]\varphi(\tau)\,d\tau\,,$$

$$L_{22}z = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathcal{K}_{m,n}^{(1)} + \frac{1}{\lambda^*}\mathcal{K}_{m,n}^{(2)} \right) Z_n \right\}_{m=1}^{\infty},$$

$$L_{21}\varphi = \left\{ \frac{2}{\pi} \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \left[\frac{1}{\left(s + \sqrt{s^2 - 1}\right)^m} + \mathcal{K}_m(s) \right] \varphi(s)\,ds \right\}_{m=1}^{\infty},$$

$$L_{12}z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n}{n} \left[\frac{1}{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n} - a\alpha^2 \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{G^*(x,s)\,ds}{\left(s + \sqrt{s^2 - 1}\right)^n} + \right.$$

$$\left. + n\left(\tilde{R}(x) - a\alpha^2 \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} G^*(x,s)\tilde{R}(s)\,ds \right) \right]. \qquad (24)$$

Здесь оператор L_{11} действует в пространстве $L_2(\delta_1, \delta_2)$, а L_{22} − в пространстве $\mathcal{M}$ ограниченных последовательностей. Операторы L_{12} и L_{21} действуют следующим образом:

$$L_{12} : \mathcal{M} \to L_2(\delta_1, \delta_2), \qquad L_{21} : L_2(\delta_1, \delta_2) \to \mathcal{M}.$$

Тогда система (22), записанная с помощью операторов (24), примет вид

$$y + Ty = y_0\,, \qquad (25)$$

где

$$y = \begin{pmatrix} q^*(x) \\ X \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} \beta L_{11} & \beta L_{12} \\ L_{21} & \lambda^* L_{22} \end{pmatrix}, \qquad y_0 = \begin{pmatrix} g(x) \\ cX_0 \end{pmatrix},$$

$$X = \{X_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad c_m = \lambda^* a_m + b_m\,,$$

оператор T действует в пространстве $\mathcal{B}$.

Учитывая, что $\| T \| < 1$, решение уравнения (25) представим как

$$y = (I + T)^{-1} y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T^n y_0\,. \qquad (26)$$

Поскольку

$$\| T \| = \max\left\{ \beta\left(\| L_{11} \| + \| L_{12} \| \right),\ \left(\| L_{21} \| + \lambda^* \| L_{22} \| \right) \right\},$$

условие $\| T \| < 1$ запишем в виде

$$\beta\left(\| L_{11} \| + \| L_{12} \| \right) < 1, \qquad \| L_{21} \| + \lambda^* \| L_{22} \| < 1\,. \qquad (27)$$

Далее, не останавливаясь на выкладках, отметим, что, оценивая операторы (24) с помощью неравенства Коши − Буняковского и равенства Парсеваля, определяем области изменения параметров β и λ^*, при которых выполняется условие (27).

Задача B. Рассмотрим теперь аналогичную задачу для анизотропной (неортотропной) полуплоскости, имеющей одну плоскость упругой симметрии. При изложении используем обозначения, принятые в ***задаче A***.

Заметим, что горизонтальные перемещения $u^2(x,0)$ граничных точек анизотропной полуплоскости, когда на отрезках $[-a, a]$, $[b, c]$, $b > c$, действуют касательные напряжения с интенсивностями $P(x)$ и $q(x)$, определяются так [4]:

$$u^2(x,0)=\frac{A^{(2)}}{\pi}\left[\int_{-a}^{a}\left(\ln\frac{1}{|x-s|}+C\right)P(s)\,ds+\int_{b}^{c}\left(\ln\frac{1}{|x-s|}+C\right)q(s)\,ds\right], \quad (28)$$

где C − некоторая константа, $A^{(2)}=A_2=\frac{i}{2}\beta_{11}[\mu_1+\mu_2-\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2]$, а μ_1, μ_2 и их сопряженные значения $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ являются корнями уравнения

$$\beta_{11}\xi^4-2\beta_{16}\xi^3+(2\beta_{12}+\beta_{66})\xi^2-2\beta_{26}\xi+\beta_{22}=0 .$$

Здесь β_{ij} − упругие коэффициенты материала полуплоскости. В случае, когда анизотропное тело является ортотропным, коэффициенты $\beta_{16}=\beta_{26}=0$.

Не останавливаясь на выкладках, лишь отметим, что на основании (3)–(8), (13), (14), (16), (21) и (28) решение задачи сводится к решению следующей системы интегро-алгебраических уравнений:

$$q^*(x)+\beta_1\int_{\delta_1}^{\delta_2}L(x,\tau)\,q^*(\tau)\,d\tau+\beta_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}\left[\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}-\right.$$

$$\left.-\,a\alpha^2\int_{\delta_1}^{\delta_2}G^*(x,s)\frac{ds}{\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)^n}\right]=g_1(x), \qquad \delta_1\le x\le\delta_2 ,$$

$$X_m+\frac{2}{\pi}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{q^*(s)\,ds}{\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)^m}+\lambda_1^*\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{K}_{m,n}^{(1)}X_n=\lambda_1^*a_mX_0 ,$$

$$m=1,2,\ldots, \quad -1<x<1 , \qquad (29)$$

где

$$g_1(x)=g_0(x)+\beta_1X_0\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-a\alpha^2\int_{\delta_1}^{\delta_2}G^*(x,s)\ln\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)ds\right],$$

$$\beta_1=aA^{(2)}/k^*, \qquad \lambda_1^*=a/E_2h_2A^{(2)} ,$$

$L(x,\tau)$ имеет вид (12), а X_0, a_m, $\mathcal{K}_{m,n}^{(1)}$ определяются формулами (23).

Рассматривая теперь систему уравнений (29) в банаховом пространстве $\mathcal{B}$, как и в ***задаче A***, сводим ее к операторному уравнению типа (25), где в операторе T будут участвовать только первые слагаемые операторов (24). Из условия (27) для параметров β_1 и λ_1^* получаем, что

$$\beta_1<\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}\,e_1+\pi e_2}, \qquad \lambda_1^*=\frac{\sqrt{6}\,(\pi-2e_3)}{\pi^2},$$

где

$$e_1=\left[\int_{\delta_1}^{\delta_2}\int_{\delta_1}^{\delta_2}L^2(x,\tau)\,dx\,d\tau\right]^{1/2}, \qquad e_3=\frac{2}{\pi}\left[\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{ds}{\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)^2}\right]^{1/2},$$

$$e_2=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\left[\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}-a\alpha^2\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{G^*(x,s)ds}{\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)^n}\right]^2dx\right\}^{1/2},$$

$$\| L_{12} \| \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} e_2 , \qquad \| L_{22} \| \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} , \qquad \| L_{21} \| \le \frac{2}{\pi} e_3 ,$$

причем для e_1 и e_2 из равенства Парсеваля и соотношения (14) вытекают следующие оценки:

$$e_1 < \left(\int_{\delta_1}^{\delta_2} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \ln^2 | x - s | \, dx \, ds \right)^{1/2} , \qquad e_2 < \left[\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\left(s - \sqrt{s^2 - 1} \right)^2}{1 - \left(s - \sqrt{s^2 - 1} \right)^2} \, ds \right]^{1/2} .$$

1. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 416 с.
2. *Григорян Э. Х.* О решении задачи для упругой бесконечной пластины, на поверхности которой приклеен стрингер конечной длины // Изв. НАН Армении. Механика. – 2000. – № 4.
3. *Григорян Э. Х., Керопян А. В., Шагинян С. С.* Контактная задача для бесконечной пластины с двумя конечными стрингерами, один из которых склеен с ней, а другой находится в идеальном контакте // Изв. НАН Армении. Механика. – 2000. – № 2.
4. *Саркисян В. С.* Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. – Ереван: Изд-во ЕГУ, 1983. – 259 с.
5. *Саркисян В. С., Керопян А. В.* Контактные задачи для упругих тел, на границе которых приклеен линейно или нелинейно деформируемый стрингер конечной длины // Контактные и смешанные граничные задачи механики деформируемого тела: Сб. науч. тр. НАН Армении. – Ереван, 1999. – С. 126–132.
6. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 415 с.
7. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 327 с.
8. *Lubkin J. L., Lewis L. C.* Adhesiv shear flow for an axially loaded, finite stringer bounded to an infinite sheet // Quart J. Mech. and Appl. Math. – 1970. – **23**. – P. 521–533.

ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОХ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРУЖНИХ ТІЛ З ДВОМА РІЗНОРІДНИМИ СКІНЧЕННИМИ СТРИНГЕРАМИ

Розглядаються задачі про контактну взаємодію двох скінченних стрингерів (накладок) з різних пружних матеріалів із лінійно деформованими основами (плоска деформація) у вигляді пружної нескінченної смуги й анізотропної (неортотропної) півплощини. Припускається, що один із стрингерів перебуває в ідеальному контакті з основою, а інший контактує з нею через тонкий шар клею. Стрингери деформуються під дією горизонтальних сил. Задачі зводяться до систем інтегро-алгебричних рівнянь другого роду. Визначено області зміни характерних параметрів задач, за яких системи мають точні розв'язки.

ON THE SOLUTION OF TWO CONTACT PROBLEMS FOR ELASTIC BODIES WITH TWO DIFFERENT HOMOGENEOUS FINITE STRINGERS

The problems on contact interaction of two finite stringers (overlays) from different elastic materials with the linear-deformable base (plane deformation) in the form of elastic infinite strip and anisotropic (non-orthotropic) half-plane are considered. It is assumed that one of the stringers is in ideal contact with the base, and another one is in contact with it through a thin layer of glue and deformed under the action of horizontal forces. The solutions of the problems are reduced to the solution of a system of the second kind integral-algebraic equations. Then the change regions of the problems characteristic parameters are determined, at which this system supposes the exact solution.

Ереван. гос. ун-т, Ереван, Армения

Получено
24.04.03