УДК 593.3

В. Ю. Кирюхин, Ю. И. Няшин, В. А. Лохов

О ПОСТАНОВКЕ И РЕШЕНИИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Рассматриваются постановка и пути решения проблемы управления температурными напряжениями в анизотропных неоднородных упругих и неупругих структурах. Приведена квазистатическая модель, основанная на обобщенном решении краевой задачи термоупругости. Решается следующая проблема управления: получить заданное распределение напряжений. Предписанное поле должно быть допустимым в линейной упругости. Проблема управления решается с использованием гильбертового функционального пространства. Каждый элемент этого пространства представляет симметричный тензор, являющийся функцией времени и координат. Дополнительно вводится подпространство, в котором каждый элемент является совместным тензором, а соответствующие перемещения на опорах обращаются в нуль. Вводится характеристический тензор, компоненты которого зависят от предписанных напряжений, от собственных деформаций и упругих свойств структуры. Решение проблемы управления основано на сформулированной и доказанной теореме, в которой устанавливаются необходимые и достаточные условия достижения заданных напряжений. Причем выполнение этих условий не требует решения прямой задачи термоупругости. К важным теоретическим результатам работы следует отнести вывод ряда следствий, имеющих фундаментальный характер. Также в работе предлагается способ определения совместности деформаций в задачах, где отсутствует необходимый порядок производных компонент тензора деформации. Соответствующий результат представлен в виде теоремы.

1. Проблемы теоретического исследования различных аспектов температурных напряжений и деформаций исследовались учеными различных стран (С. П. Тимошенко [13], В. Новацкий [10], А. Д. Коваленко [5], Б. Боли и Дж. Уэйнер [1], Я. С. Подстригач [3], Я. И. Бурак [2] и др). В частности, исследовался вопрос о температурном нагреве, который не вызывает температурных напряжений. В работе Т. Мура [18] такая температурная деформация была названа нильпотентной. Ученые Венского технического университета (Э. Мелан, Г. Паркус, Ф. Циглер, Г. Иршик, Ф. Раммерсторфер и др.) [8, 15, 17, 21] внесли существенный вклад в теорию математического моделирования и оптимального управления при исследовании температурных напряжений, деформаций и перемещений. Недавно разработан новый подход к решению этих задач, основанный на методе В. Майзеля [7] (см. работы Ф. Циглера и Г. Иршика [16, 22]). Было введено понятие нильпотентного нагрева как нагрева, не вызывающего полной деформации (в этом случае сумма температурных и силовых деформаций должна быть равна нулю). Все указанные работы основаны на дифференциальной постановке краевой задачи термоупругости и соответствующем классическом решении задачи.

2. Иной подход к исследованию напряжений разработан учеными Перми (А. А. Поздеев, Ю. И. Няшин, П. В. Трусов [11]), который основан на понятиях функционального анализа в гильбертовых пространствах и обобщенном решении задачи. Этот подход был использован для решения задач управления остаточными термоупругопластичными напряжениями. Решен ряд задач управления остаточными напряжениями в технологических процессах обработки металлов давлением (горячая прокатка двутавровых балок, холодное волочение проволоки и др.). В настоящей работе этот подход использован для решения и исследования задачи управления температурными напряжениями и деформациями.

3. Классические постановки задач термоупругости можно найти в работах [1, 21]. Отметим здесь лишь обозначения и определения, необходимые для дальнейшего изложения материала. Пусть исследуемое тело занимает ограниченную область Ω трехмерного евклидова пространства E^3; $\bar{\Omega}$ – замыкание области; Γ – ее граница.

Постановка задачи термоупругости включает введение тензора температурных деформаций $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}}$, но в данной работе вместо температурной деформации можно рассматривать пластическую деформацию, деформацию ползучести, деформацию от фазовых превращений, ростовые деформации и деформации от перестройки в живых тканях. Следуя определению Т. Мура [18], эти деформации будем называть собственными деформациями (*eigenstrain*) и будем обозначать через $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$.

Граничные условия предполагаются двух типов: $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P}$, $\mathbf{x} \in \Gamma_\sigma$, и $\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{x} \in \Gamma_u$, причем, $\Gamma_u \bigcup \Gamma_\sigma = \Gamma$. Здесь $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ – тензор напряжений.

4. Уделим особое внимание обобщенному решению задачи термоупругости.

Обобщенным решением задачи термоупругости назовем тензор $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, который представим в виде

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{C} \cdot\cdot (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}}), \tag{1}$$

где $\mathbf{u} \in (W_2^1(\Omega))^3$, $\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{x} \in \Gamma_u$, и имеет место соотношение

$$\int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w})\, dV - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{w}\, dS - \int_\Omega \mathbf{Q} \cdot \mathbf{w}\, dV = 0$$

$$\forall\, \mathbf{w} \in (W_2^1(\Omega))^3, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u. \tag{2}$$

Здесь $(W_2^1(\Omega))^3$ – соболевское функциональное пространство функций с обобщенной производной, причем сами функции и их производные суммируемы с квадратом. Деформации $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})$ и $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w})$ определяются линеаризованными геометрическими соотношениями, где производные понимаются в смысле распределений (или, другими словами, как обобщенные производные). Заметим, что значения функций на границе получаем с помощью оператора следа, $\mathbf{P} \in (L^2(\Gamma_\sigma))^3$, $\mathbf{Q} \in (L^2(\Omega))^3$.

5. Для доказательства существования функции перемещений $\mathbf{u} \in (W_2^1(\Omega))^3$, являющейся обобщенным решением задачи термоупругости, применим теорему 3.5 из работы [4, гл. III, § 3]. Там рассмотрена задача

$$A\,\mathbf{u} = \mathbf{f}, \qquad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{3.1}$$

$$u_i = U_i, \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \tag{3.2}$$

$$\sigma_{ij}\, n_j = F_i, \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \tag{3.3}$$

где $\Gamma = \Gamma_u \bigcup \Gamma_\sigma$, $\Gamma_u \bigcap \Gamma_\sigma = \varnothing$, $(A\,\mathbf{u})_i = -(C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}))_{,j}$, $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}(\mathbf{u})$ (двойная нумерация формул соответствует работе [4]). Предполагается, что $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^3$, $\mathbf{F} \in (L^2(\Gamma_\sigma))^3$.

Если $\Gamma_u \neq \varnothing$, то обобщенным решением задачи (*3.1*)–(*3.3*) называется такая функция $\mathbf{u} \in (W_2^1(\Omega))^3$, что имеет место соотношение

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_\Omega f_i w_i\, dV + \int_{\Gamma_\sigma} F_i w_i\, dS \quad \forall \mathbf{w} \in (W_2^1(\Omega))^3, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \tag{3}$$

где $a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_\Omega C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}(\mathbf{u})\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{w})\, dV$.

Сформулируем теорему, доказанную в работе [4].

Теорема (3.5 [4]**).** *Пусть* Ω *– открытое ограниченное множество с регулярной границей, тогда задача (3.1)–(3.3) имеет единственное решение.*

Таким образом, на основе этой теоремы получаем, что для решаемой задачи термоупругости обобщенное решение существует и единственно.

6. Для дальнейшего изложения введем некоторые понятия функционального анализа.

Рассмотрим множество H симметричных тензоров второго ранга. Пусть компоненты тензоров являются вещественными функциями пространственных координат и принадлежат функциональному пространству L^2, тогда совокупность компонент тензора $\tilde{\mathbf{T}}$ принадлежит пространству $(L^2)^6$, т.е. $\tilde{\mathbf{T}} \in (L^2)^6$. Это означает, что $\forall \tilde{\mathbf{T}}$ интеграл Лебега

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} (T_{ij})^2 \, dV$$

существует и конечен.

Введем в H скалярное произведение

$$(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) = \int_\Omega A_{ij} \, C^{-1}_{ijkl} \, B_{kl} \, dV \,, \tag{4}$$

где C^{-1}_{ijkl} – коэффициенты матрицы податливости. Легко показать, что определение (4) удовлетворяет аксиомам скалярного произведения: симметричности, линейности и положительности.

Далее введем норму в H, порожденную скалярным произведением (4):

$$\| \tilde{\mathbf{A}} \| = \sqrt{(A_{ij}, A_{ij})} \,. \tag{5}$$

Непосредственное вычисление показывает, что нормы в H и $(L^2)^6$ эквивалентны, а так как пространство $(L^2)^6$ полное, то отсюда следует, что рассматриваемое функциональное пространство H также полное, поэтому пространство H гильбертово.

Выделим подпространство H_u согласно следующему определению.

Определение. Симметричный тензор $\tilde{\mathbf{f}} \in H$ принадлежит подпространству H_u, если выполняется условие

$$\exists \, \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in (W_2^1(\Omega))^3 : \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \,,$$

так что имеет место соотношение

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) \,, \tag{6}$$

где производные понимаются в обобщенном смысле, а значение вектора $\mathbf{u}$ на границе Γ_u понимается в смысле оператора следа.

Физический смысл подпространства H_u состоит в том, что сюда входят совместные тензоры деформации, причем перемещения, соответствующие этим деформациям, обращаются в нуль на неподвижных опорах. Легко убедиться, что подпространство H_u является линейным, так как операции сложения элементов и умножения на скаляр не выводят за его пределы.

Введение подпространства H_u позволяет заменить условия совместности деформаций условием попадания элемента пространства H в подпространство H_u, а также ввести далее меры несовместности тензора деформации (заметим, что тензор полной деформации всегда совместен, хотя в то же время его составляющие могут быть несовместны). Кроме того, важно иметь в виду, что классические уравнения совместности деформаций Сен-Венана требуют существования вторых производных по координатам от компонент тензора деформации. В нашем рассмотрении это условие не накладывается.

7. Приведем основную теорему о необходимых и достаточных условиях получения заданного поля напряжений [19, 20].

Теорема 1. *Пусть* $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0(\mathbf{x})$ *– симметричный тензор второго ранга, который удовлетворяет соотношению* (2) *при заданных поверхностных* $\mathbf{P}$ *и объемных* $\mathbf{Q}$ *силах. Введем тензор* $\tilde{\mathbf{f}}$ *согласно соотношению*

$$\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}} + \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \cdot\cdot\, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0 . \tag{7}$$

Если $\tilde{\mathbf{f}} \in H_u$, *то это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы напряжения* $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0(\mathbf{x})$ *возникали в данной упругой области* $\bar{\Omega} \subset E^3$.

Доказательство *необходимости.* Пусть $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$. Учитывая положительную определенность матрицы $\tilde{\mathbf{C}}$, из (1) получим соотношение

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla) = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}} + \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \cdot\cdot\, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0 = \tilde{\mathbf{f}} , \tag{8}$$

т. е. тензор деформации $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ равен $\tilde{\mathbf{f}}$, откуда следует, что $\tilde{\mathbf{f}} \in H_u$.

Достаточность. Пусть $\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}} + \tilde{C}^{-1} \cdot\cdot\, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0 \in H_u$, где $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0$ удовлетворяет соотношению (2). Тогда, учитывая единственность решения задачи (1), (2), получим, что $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0(\mathbf{x})$ почти всюду в области $\bar{\Omega}$. ◊

8. Из теоремы 1 получаем ряд следствий. Первое следствие касается условия температурного нагрева, не вызывающего температурных напряжений. Этот вопрос обсуждался многими авторами. Необходимые условия отсутствия температурных напряжений получаются просто. Достаточные условия обычно рассматриваются или для свободного твердого тела, или для некоторых частных случаев (например, случай плоского температурного поля). Наше рассмотрение позволяет сразу получить общие условия для неоднородного анизотропного тела, имеющего произвольные условия закрепления.

Следствие 1. *Условие* $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}} \in H_u$ *является необходимым и достаточным для равенства нулю температурных напряжений* $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$.

Доказательство. Следствие непосредственно вытекает из теоремы 1. Полагая $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0 = 0$, из (7) получим $\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}}$. Таким образом, условие $\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}} \in H_u$ является необходимым и достаточным условием для равенства нулю температурных напряжений почти всюду в области $\bar{\Omega}$. ◊

Следствие 2. *Пусть компоненты тензора деформации имеют вторые производные относительно декартовых координат, т. е.* $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}} \in (C^2(\bar{\Omega}))^6$. *Тогда единственное распределение температуры*

$$T(x, y, z, t) = a_1(t)\, x + a_2(t)\, y + a_3(t)\, z + a_4(t) \tag{9}$$

не вызывает температурных напряжений в термически однородном изотропном теле, не имеющем опор. Для несвободного твердого тела это условие является лишь необходимым.

Доказательство этого следствия можно найти в работе [21]. ◊

Следствие 3. *Уравнения совместности температурных деформаций являются необходимыми и достаточными условиями для равенства нулю температурных напряжений в статически определимой системе. Для статически неопределимой системы они являются лишь необходимыми условиями.*

Доказательство. Согласно следствию 1 температурные напряжения равны нулю, если температурные деформации совместны и соответствующие им перемещения равны нулю на всех опорах, или, другими словами, в точках поверхности S_u. Перемещения, определяемые полем деформации, находятся не единственно, но отличаются на перемещение твердого тела как жесткого целого. Следовательно, поле перемещений содержит константы, определяемые перемещением твердого тела как целого. Число этих констант равно числу степеней свободы тела (три – при плоском движении, шесть – при пространственном движении) и равно числу нулевых перемещений в опорах в статически определимой системе. Таким образом, в статически определимой системе все константы могут быть определены из условия обращения в нуль перемещений в опорах. Для статически неопределимой системы некоторые перемещения могут быть отличными от нуля.

Например, пусть имеем плоскую двухшарнирную статически неопределимую балку (рис. 1). Здесь имеем четыре перемещения u_{Ax}, u_{Ay}, u_{Bx}, u_{By} в опорах A и B и только три константы, определяющие поле перемещений системы как жесткого целого. Следовательно, можно найти константы интегрирования поля деформаций, при которых три перемещения в опорах будут равны нулю, а четвертое перемещение уже определяется заданным полем деформаций. Например, при однородном нагреве такой балки температурные деформации удовлетворяют уравнениям совместности деформаций, но, очевидно, возникнут температурные напряжения из-за того, что не все перемещения в опорах равны нулю. ◊

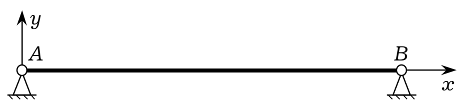

Рис. 1

Следующее следствие также может быть использовано для анализа температурных напряжений и деформаций и управления ими.

Следствие 4. *Добавление температурной деформации, удовлетворяющей условию* $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{add}} \in H_u$, *не изменяет температурных напряжений в теле*: $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0(\mathbf{r}),\ \mathbf{r} \in \bar{\Omega}$.

Доказательство достаточно простое и опирается на сформулированную теорему и введенные выше понятия. Вновь укажем, что под $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$ и $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{add}}$ можно понимать любые неупругие деформации. ◊

Теорема 1 и ее следствия могут быть использованы для постановки и решения задач управления температурными напряжениями и деформациями.

Теорема 2. *Тензор деформации* $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})$ *принадлежит подпространству* H_u *тогда и только тогда, если существуют объемные силы* $\mathbf{Q} \in (L^2(\Omega))^3$, $\mathbf{x} \in \Omega$, *и поверхностные силы* $\mathbf{P} \in (L^2(\Gamma_\sigma))^3$, $\mathbf{x} \in \Gamma_\sigma$, *которые производят в упругом теле деформации* $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$.

Доказательство. *Достаточность*. Пусть существуют некоторые силы $\mathbf{Q} \in (L^2(\Omega))^3$, $\mathbf{x} \in \Omega$, и $\mathbf{P} \in (L^2(\Gamma_\sigma))^3$, $\mathbf{x} \in \Gamma_\sigma$. Тогда деформации $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$, им соответствующие, определяются из решения задачи (1), (2), которая имеет единственное решение. Таким путем будут найдены совместные деформации при условии $\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{x} \in \Gamma_u$. В итоге получим, что $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \in H_u$.

Для доказательства *необходимости* воспользуемся следующей теоремой.

Теорема [12]. *Функция* $v \in L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, *есть обобщенной производной для функции* $u \in L^p(\Omega)$, $v = D^\alpha u$, *если существует последовательность бесконечно дифференцируемых функций* u_n *и* v_n, $v_n = D^\alpha u$, *так что имеют место соотношения*

$$\| u_n - u \|_{L^p} \to 0, \qquad \| v_n - v \|_{L^p} \to 0,$$

для любой внутренней точки подобласти Ω', $\bar{\Omega}' \subset \Omega$.

С учетом этой теоремы строим приближения к заданному полю деформаций и соответствующих им перемещений:

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial x_i} \right).$$

Отсюда находим напряжения, а также объемные и поверхностные силы, создающие такие напряжения в линейно упругом теле:

$$\sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}^{(n)}, \qquad Q_i^{(n)} = -\,\sigma_{ij,j}^{(n)}, \qquad P_i^{(n)} = \sigma_{ij}^{(n)}\, n_j .$$

Здесь запятая перед индексом соответствует обычной производной.

Переходим к пределу при $n \to \infty$:

$$\| u_i^{(n)} - u_i \|_{L^2} \to 0, \qquad \left\| \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2} \to 0, \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

где $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ – обобщенная производная. Тогда $\sigma_{ij}^{(n)} \to \sigma_{ij}$, $P_i^{(n)} \to P_i$.

Далее запишем обобщенное решение для n-го приближения

$$\int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(n)} \cdot\cdot\, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w})\, dV - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{P}^{(n)} \cdot \mathbf{w}\, dS - \int_\Omega \mathbf{Q}^{(n)} \cdot \mathbf{w}\, dV = 0, \tag{10}$$

где $\mathbf{w} \in (W_2^1(\Omega))^3$, $\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{r} \in \Gamma_u$. Перейдем в соотношении (10) к пределу при $n \to \infty$, используя непрерывность скалярного произведения (для ясности стоит знак суммирования, который ранее опускали):

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \sum_{i,j} \sigma_{ij}^{(n)}\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{w})\, dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j} (\sigma_{ij}^{(n)}, \varepsilon_{ij}(\mathbf{w}))_{L^2} =$$

$$= \sum_{i,j} (\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}(\mathbf{w}))_{L^2} = \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot\, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w})\, dV. \tag{11}$$

Аналогично получим

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{P}^{(n)} \cdot \mathbf{w}\, dS = \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{w}\, dS. \tag{12}$$

Здесь учтено, что согласно работе [4, с. 47] отображение $w \mapsto \gamma_0 w$ (след) есть линейным непрерывным отображением, $W_2^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$. Поэтому при $w \to w_0$ имеем, что $\gamma w \to \gamma w_0$.

Наконец, рассмотрим интеграл

$$J = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \mathbf{Q}^{(n)} \cdot \mathbf{w}\, dV$$

или

$$J = \lim_{n\to\infty} (\mathbf{Q}^{(n)}, \mathbf{w})_{(L^2)^3} = \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot\, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w})\, dV - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{P}\cdot \mathbf{w}\, dS .$$

Если $\mathbf{w} \to 0$ по норме $(W_2^1)^3$, то это же будет верно в норме $(L^2)^3$ и $(\mathbf{Q}^{(n)}, \mathbf{w})_{(L^2)^3} \to 0$. Значит, J является линейным и непрерывным функционалом относительно $\mathbf{w}$.

Применим далее теорему Хана – Банаха.

Теорема [14]. *Пусть в вещественном нормированном пространстве X задан функционал f с областью определения $D(f) \subset X$. Тогда существует всюду определенный в X линейный ограниченный функционал $\tilde{f}$, так что $\| \tilde{f} \| = \| f \|$ и $\langle x, \tilde{f} \rangle = \langle x, f \rangle$ для любых $x \in D(f)$.*

В нашем случае функционал J задан на $(W_2^1)^3 \subset (L^2)^3$. Согласно теореме Хана – Банаха можно распространить функционал на $(L^2)^3$.

Применяя к функционалу $\tilde{f}$, заданному на $(L^2(\Omega))^3$, теорему Рисса [14] об общем виде линейных функционалов в гильбертовом пространстве, получим, что

$$J(\mathbf{w}) = (\mathbf{w}, \mathbf{Q})_{(L^2)^3} = \int_\Omega \mathbf{Q}\cdot\mathbf{w}\, dV .$$

В итоге

$$\int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot\, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w})\, dV - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{P}\cdot\mathbf{w}\, dS - \int_\Omega \mathbf{Q}\cdot\mathbf{w}\, dV = 0 .$$

Таким образом, доказано существование сил $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, вызывающих заданные деформации $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \in H_u$. ◊

Авторы благодарны профессору Францу Циглеру (Венский технический университет) за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS-ESA (грант № 99-10-00815) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант «Урал» № 02-01-96416).

1. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 520 с.
2. *Бурак Я. И., Гачкевич А. Р.* Об одной форме уравнений термоупругости в напряжениях // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1977. – Вып 5. – С. 73–75.
3. *Григолюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И.* Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 364 с.
4. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
5. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. – Киев: Вища шк., 1975. – 216 с.
6. *Литвинов В. Г.* Движение нелинейно-вязкой жидкости. – М.: Наука, 1982. – 370 с.
7. *Майзель В. М.* Температурная задача теории упругости. – Киев: Изд-во АН УССР, 1951. – 153 с.
8. *Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – М.: Физматгиз, 1958. – 168 с.
9. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.
10. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
11. *Поздеев А. А., Няшин Ю. И., Трусов П. В.* Остаточные напряжения, теория и приложения. – М.: Наука, 1972. – 112 с.
12. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – М.: Наука, 1974. – Т. 4, ч. 1. – 336 с.
13. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
14. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 495 с.

15. *Irshik H*. A review on static and dynamic shape control of structures by piezoelectric actuation // Eng. Struct. – 2002. – **24**. – P. 5–11.
16. *Irschik H*., *Pichler U*. Dynamic shape control of solids and structures by thermal expansion strains // J. Therm. Stresses. – 2001. – **24**. – P. 565–576.
17. *Irschik H., Ziegler F*. Eigenstrain without stress and static shape control of structures // Amer. Inst. Aeronaut. and Astronaut. J. – 2001. – **39**. – P. 1985–1999.
18. *Mura T*. Micromechanics of defects in solids. – Dordrecht: Kluver Acad. Publ., 1991.
19. *Nyashin Y. I*., *Kiryukhin V. Y*., *Ziegler F*. Control of thermal stress and strain // J. Therm. Stresses. – 2000. – **23,** No. 4. – P. 309–326.
20. *Nyashin Y. I*., *Kiryukhin V. Y*., *Ziegler F*. Thermal stress and strain: modeling and control // Therm. Stresses'99: Third Int. Congr. on Thermal Stresses, June 13-17, 1999. – Cracow: Cracow Univ. Techn., 1999. – P. 39–42.
21. *Parkus H*. Thermoelasticity. – Vienna: Springer-Verlag, 1976. – 112 p.
22. *Ziegler F., Irschik H*. Thermal stress analysis based on Maysel's formula // Thermal Stresses II / Ed. R. B. Hetnarski. – Amsterdam: Elsevier, 1987. – P. 120–188.

ПРО ПОСТАНОВКУ ТА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КЕРУВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Розглядаються постановка та шляхи розв'язування проблеми керування температурними напруженнями в анізотропних неоднорідних пружних і непружних структурах. Розглядається квазістатична модель, що базується на узагальненому розв'язку крайової задачі термопружності. Розв'язується наступна проблема керування: отримати заданий розподіл напружень. Передбачуване поле повинно бути допустимим у лінійній пружності. Проблема керування розв'язується з використанням гільбертового функціонального простору. Кожний елемент цього простору є симетричним тензором, який є функцією часу та координат. Додатково вводиться підпростір, у якому кожен елемент є спільним тензором, а відповідні переміщення на опорах перетворюються в нуль. Вводиться характеристичний тензор, компоненти якого залежать від передбачуваних напружень, власних деформацій і пружних властивостей структури. Розв'язання проблеми керування базується на сформульованій і доведеній теоремі, в якій встановлюються необхідні та достатні умови отримання заданих напружень. Причому виконання цих умов не вимагає розв'язування задачі термопружності. До важливих теоретичних результатів роботи слід віднести ряд наслідків, що мають фундаментальний характер. Також у роботі пропонується спосіб визначення сумісності деформацій у задачах, коли відсутній необхідний порядок похідних від компонентів тензора деформації. Відповідний результат оформлено у вигляді теореми.

ON FORMULATION AND SOLUTION OF PROBLEMS OF THERMAL STRESS CONTROL

The methods of solution to thermal stress and strain control problem in anisotropic and inhomogeneous solids are investigated in this work. The quasi-static model based on the generalized solution of the boundary-value thermoelasticity problem is considered. The following control problem is solved: to obtain the desired distribution of stresses. The prescribed stress field has to be admissible in linear thermoelasticity. The problem of control is solved by means of concept of Hilbert space. Every element of the space is assumed to be a tensor of the second rank, that depends on the spatial coordinates and time. The subspace, containing the compatible and kinematically admissible strains, is defined. The characteristic tensor is introduced. The components of the specified tensor depend on the prescribed stresses, eigen strains and elastic properties of structure. The solution of the control problem is based on the formulated and proved theorem, that establishes the necessary and sufficient conditions of obtaining the prescribed stress. Fulfillment of these conditions does not demand the solution of the thermoelastic problem. The main theoretical results contain the set of corollaries on some actual fundamental problems. The theoretical method of compatibility conditions is formulated for the problems, when the necessary order of strain component derivatives is absent. The corresponding result is formulated as the theorem.

Перм. гос. техн. ун-т, Пермь, Россия

Получено
01.02.03