

ВИКОРИСТАННЯ ГРАНИЧНИХ І ПРИГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ДВОВИМІРНІЙ МОДЕЛІ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Для двовимірних тіл складної геометрії методами приграничних і граничних елементів розв'язано нестационарну задачу теплопровідності з першою граничною умовою. Здійснено порівняльний аналіз цих методів. На прикладі пластини квадратної форми проведено зіставлення отриманих числових результатів з відомим аналітичним розв'язком.

Метод приграничних елементів (МПГЕ) і метод граничних елементів (МГЕ) у непряму формулюванні є різновидностями методу фіктивних джерел, оскільки введені для побудови розв'язку задачі невідомі величини не передбачають їх фізичного трактування. Аналіз теоретичних та обчислювальних особливостей обох методів у випадку розв'язування задач математичної фізики, зокрема, стаціонарних задач теорії потенціалу і теорії пружності, та дослідження точності отриманих числових результатів проведено у [4, 5]. У пропонованій роботі такий аналіз у поєднанні з покроковою часовою схемою «послідовності початкових умов» [1, 2, 3, 5, 8] розповсюджено на двовимірні нестационарні задачі теорії теплопровідності.

Слід відмітити, що розглянута математична модель описує фізичні процеси різноманітної природи. При цьому поняттю шуканої функції (температури) та її похідної (теплового потоку) можуть відповідати різні фізичні функції. Наприклад, при описі дифузійних і фільтраційних полів – це концентрація речовини та тиск і відповідні їм потоки, електромагнітних полів – електричний потенціал і густина струму, течії ідеальної рідини – швидкість протікання рідини і густина потоку рідини тощо.

Постановка задачі. Розглянемо нестационарну задачу теплопровідності для однорідного обмеженого тіла, яке займає область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ у декартовій системі координат x_1, x_2 . Вважаємо, що на границі $\partial\Omega$ області Ω задано значення температурного поля $\theta_\Gamma(x, \widetilde{F}_0)$, а всередині області Ω діють джерела тепла інтенсивності $g_0(x, \widetilde{F}_0)$, розраховані на одиницю площі, де \widetilde{F}_0 – час. У початковий момент часу температурний режим у тілі описується функцією $\theta_0(x)$.

Нестационарне температурне поле $\theta(x, \widetilde{F}_0)$ визначаємо з рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \widetilde{F}_0} - g_0(x, \widetilde{F}_0), \quad (x, \widetilde{F}_0) \in \Omega \times T, \quad (1)$$

початкової

$$\theta = \theta_0(x), \quad \widetilde{F}_0 = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

та граничної

$$\theta = \theta_\Gamma(x, \widetilde{F}_0), \quad (x, \widetilde{F}_0) \in \partial\Omega \times T, \quad (3)$$

умов, де функції $\theta_0(x)$, $\theta_\Gamma(x, \widetilde{F}_0)$, задовольняють умову узгодженості

$$\lim_{x \rightarrow \partial\Omega} \theta_0(x) = \lim_{\widetilde{F}_0 \rightarrow 0} \theta_\Gamma(x, \widetilde{F}_0), \quad T = \{ \widetilde{F}_0 : 0 < \widetilde{F}_0 \leq \infty \}.$$

Покрокова часова дискретизація задачі. Один із підходів до розв'язування нестационарних задач полягає у застосуванні маршового алгоритму зміни часового аргументу. Щоб отримати розв'язок задачі (1)–(3), будемо

використовувати схему «послідовності початкових умов» [1, 2, 3, 5, 8], коли на кожному k -му кроці за часом вводиться локальний час F_0 такий, що $F_0 = \widetilde{F_0} - (k-1)\Delta F_0$, де ΔF_0 – величина часового приросту,

$$\begin{aligned} [0, \widetilde{F_0}] &= \bigcup_{j=1}^{k-1} [(j-1)\Delta F_0, j\Delta F_0] \cup [(k-1)\Delta F_0, \widetilde{F_0}], \\ \bigcup_{j=1}^0 [(j-1)\Delta F_0, j\Delta F_0] &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

На основі (4) можна сформулювати крайові задачі для послідовності функцій $\theta_k(x, F_0)$, з якими шукана функція пов'язана співвідношенням

$$\begin{aligned} \theta(x, \widetilde{F_0}) &= \sum_{j=1}^k \theta_j(x, \widetilde{F_0}) \chi_j(\widetilde{F_0}), \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq \widetilde{F_0} \leq k\Delta F_0, \\ \chi_j(\widetilde{F_0}) &= \begin{cases} 1, & (j-1)\Delta F_0 < \widetilde{F_0} \leq j\Delta F_0, \\ 0, & \widetilde{F_0} \leq (j-1)\Delta F_0, \quad \widetilde{F_0} > j\Delta F_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Так, якщо задати функції $g_{0k}(x, F_0)$, $\theta_{0k}(x)$, $\theta_{\Gamma k}(x, F_0)$ у вигляді

$$\begin{aligned} \theta_{0k}(x) &= \begin{cases} \theta_0(x), & k = 1, \\ \theta_{k-1}(x, (k-1)\Delta F_0), & k > 1, \end{cases} \\ g_{0k}(x, \widetilde{F_0}) &= g_0(x, (k-1)\Delta F_0 + F_0), \\ \theta_{\Gamma k}(x, \widetilde{F_0}) &= \theta_{\Gamma}(x, (k-1)\Delta F_0 + F_0), \end{aligned}$$

то крайова задача для визначення $\theta_k = \theta_k(x, F_0)$ набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 \theta_k}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial x_2^2} = \frac{\partial \theta_k}{\partial F_0} - g_{0k}(x, F_0), \quad (x, F_0) \in \Omega \times \Delta T, \quad (5)$$

$$\theta_k = \theta_{0k}(x), \quad F_0 = 0, \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

$$\theta_k = \theta_{\Gamma k}(x), \quad (x, F_0) \in \partial\Omega \times \Delta T, \quad (7)$$

де $\Delta T =]0, \Delta F_0]$. Щоб отримати розв'язок задачі (5)–(7), звернемося до непрямих методів приграничних [5] і граничних [1] елементів.

Просторова дискретизація задачі МПГЕ і МГЕ. Для використання МПГЕ вводимо область $B \subset \mathbb{R}^2$ таку, що $\Omega \subset B$, $\partial\Omega \cap \partial B = \emptyset$. Приграничну область $G^* = B \setminus \Omega$ розбиваємо на N відкритих підобластей G_i^* , причому $\bigcup_{i=1}^N (G_i^* \cup \partial G_i^*) = G^*$, $G_i^* \cap G_j^* = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, N}$. Граничні елементи Γ_i на $\partial\Omega$ введемо наступним чином: $\Gamma_i = \partial\Omega \cap \partial G_i^*$, $i = \overline{1, N}$. Об'єднання $\Gamma_i \cup G_i^*$ розглядатимемо надалі як приграничний елемент G_i . У випадку використання МПГЕ у кожному приграничному елементі G_i , а у випадку використання МГЕ – у кожному граничному елементі Γ_i на k -му часовому кроці введемо «фіктивні» джерела тепла невідомої сталої інтенсивності d_{ik}^γ , $\gamma \in \{G, \Gamma\}$, розраховані на одиницю площі G_i чи довжини Γ_i відповідно. Надалі при позначенні індекс « G » відповідає МПГЕ, індекс « Γ » – МГЕ.

Для підвищення ефективності обчислювального алгоритму МПГЕ доцільно забезпечити монотонну зміну функцій θ_{0k} при переході через

границю $\partial\Omega$. З цією метою введемо область $\Omega^* \subset \mathbb{R}^2$ ($\Omega \subset \Omega^*$) і неперервні функції $f_{0k}(x)$ такі, що

$$f_{0k}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (\mathbb{R}^2 \setminus \Omega^*) \cup \partial\Omega^*, \\ \theta_{k-1}^G(x, (k-1)\Delta Fo), & x \in \Omega \cup \partial\Omega, \end{cases}$$

а для $x \in \Omega_0 = \Omega^* \setminus (\Omega \cup \partial\Omega)$ функцію $f_{0k}(x)$ вибираємо у зручному для інтегрування вигляді. Приграничну область Ω_0 надалі називатимемо областю «пом'якшеної початкової умови» [5].

У цьому випадку замість (6) отримаємо умову

$$\theta_k = f_{0k}(x), \quad Fo = 0, \quad x \in \Omega^*. \quad (8)$$

Далі проведемо дискретизацію областей Ω і Ω^* криволінійними чотирикутними елементами Ω_ℓ і Ω_w^* так, щоб $\Omega = \bigcup_{\ell=1}^L \Omega_\ell$, $\Omega^* = \bigcup_{w=1}^W \Omega_w^*$, $\Omega_\ell \cap \Omega_q \neq \emptyset$, $\ell \neq q$, $\ell, q = \overline{1, L}$, $\Omega_w^* \cap \Omega_s^* = \emptyset$, $w \neq s$, $w, s = \overline{1, W}$.

Тоді інтегральне зображення розв'язку диференціального рівняння крайової задачі (5)–(7) чи (5), (8), (7) матиме вигляд [1, 5]

$$\theta_k^\Gamma = \sum_{i=1}^N d_{ik}^\Gamma \Phi_{1i}^\Gamma(\mathcal{E}, x, Fo) + \sum_{\ell=1}^L \Phi_{2\ell}^{(k)}(\mathcal{E}, x, Fo) + \sum_{\ell=1}^L \Phi_{3\ell}^{\Gamma(k)}(\mathcal{E}, x, Fo), \quad (9)$$

$$\theta_k^G = \sum_{i=1}^N d_{ik}^G \Phi_{1i}^G(\mathcal{E}, x, Fo) + \sum_{\ell=1}^L \Phi_{2\ell}^{(k)}(\mathcal{E}, x, Fo) + \sum_{w=1}^W \Phi_{3w}^{G(k)}(\mathcal{E}, x, Fo), \quad (10)$$

де

$$\Phi_{1i}^\gamma(\mathcal{E}, x, Fo) = \int_0^{Fo} d\xi_4 \int_{\gamma_i} \mathcal{E}(x, Fo, \xi, \xi_4) d\gamma_i(\xi), \quad (11)$$

$$\Phi_{2\ell}^{(k)}(\mathcal{E}, x, Fo) = \int_0^{Fo} d\xi_4 \int_{\Omega_\ell} g_{0k}(\xi, \xi_4) \mathcal{E}(x, Fo, \xi, \xi_4) d\Omega_\ell(\xi), \quad (12)$$

$$\Phi_{3\ell}^{\Gamma(k)}(\mathcal{E}, x, Fo) = \int_{\Omega_\ell} \theta_{0k}(\xi) \mathcal{E}(x, Fo, \xi, 0) d\Omega_\ell(\xi), \quad (13)$$

$$\Phi_{3w}^{G(k)}(\mathcal{E}, x, Fo) = \int_{\Omega_w^*} f_{0k}(\xi) \mathcal{E}(x, Fo, \xi, 0) d\Omega_w^*(\xi), \quad (14)$$

$\mathcal{E} = \mathcal{E}(x, Fo, \xi, \xi_4) = \exp\{-r^2/4(Fo - \xi_4)\} [4\pi(Fo - \xi_4)]^{-1}$, $r^2 = y_s y_s$, $y_s = x_s - \xi_s$, $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, $\xi_4 \in \Delta T$, (x_1, x_2, Fo) – координати точок спостереження, (ξ_1, ξ_2, ξ_4) – координати, які співпадають з (x_1, x_2, Fo) і введені для зручності опису точок області, у якій міститься джерело тепла.

Для знаходження невідомих констант d_{ik}^γ застосуємо метод колокацій [1], згідно з яким на $\partial\Omega$ введемо вузлові точки x_p^0 , які виберемо посередині кожного елемента Γ_p , $p = \overline{1, N}$, і будемо вимагати точного виконання граничних умов (7) у точках $(x_p^0, \Delta Fo)$. У результаті одержимо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення d_{ik}^γ на k -му кроці за часом:

$$\sum_{i=1}^N A_{pi}^{\gamma} d_{ik}^{\gamma} = b_{pk}^{\gamma}, \quad (15)$$

де

$$A_{pi}^{\gamma} = \Phi_{1i}^{\gamma}(\mathcal{E}, x_p^0, \Delta F_0), \quad x_p^0 \in \Gamma_p, \quad (16)$$

$$b_{pk}^{\Gamma} = \theta_{\Gamma k}(x_p^0, \Delta F_0) - \sum_{\ell=1}^L \Phi_{2\ell}^{(k)}(\mathcal{E}, x_p^0, \Delta F_0) - \\ - \sum_{\ell=1}^L \Phi_{3\ell}^{\Gamma(k)}(\mathcal{E}, x_p^0, \Delta F_0), \quad x_p^0 \in \Gamma_p, \quad (17)$$

$$b_{pk}^G = \theta_{\Gamma k}(x_p^0, \Delta F_0) - \sum_{\ell=1}^L \Phi_{2\ell}^{(k)}(\mathcal{E}, x_p^0, \Delta F_0) - \\ - \sum_{w=1}^W \Phi_{3w}^{G(k)}(\mathcal{E}, x_p^0, \Delta F_0), \quad x_p^0 \in \Gamma_p. \quad (18)$$

Розв'язавши систему (15), значення d_{ik}^{γ} підставимо у формули (9), (10) і знайдемо у вибраних точках спостереження розв'язок крайової задачі (5)–(7) чи (5), (8), (7) для $(k-1)\Delta F_0 < \widetilde{F}_0 \leq k\Delta F_0$. Повторюючи цей процес, тобто нарощуючи індекс k , забезпечимо мінімальний набір значень $\theta_k^{\gamma}(x, \widetilde{F}_0)$ до моменту часу $\widetilde{F}_0 = K\Delta F_0$, що дає можливість визначити температуру у довільний момент часу \widetilde{F}_0 з інтервалу $K\Delta F_0 \leq \widetilde{F}_0 \leq (K+1)\Delta F_0$ у будь-якій точці $x^c \in \bar{\Omega}$.

Інтегрування за часом у формулах (11) і (16) проводили аналітично на основі властивостей фундаментального розв'язку нестационарного рівняння теплопровідності. Одержану як результат інтегральну показникову функцію апроксимували різними способами залежно від величини аргументу [7].

У випадку, коли точка колокації x_p^0 чи точка спостереження x^c не належать елементу границі, по якому проводиться інтегрування, в обох методах використовується числове інтегрування по криволінійних елементах у формулах (11)–(14) і (17), (18). У випадку, коли точка x_p^0 належить вказаному елементу границі, має місце перевага діагональних елементів у матрицях МГЕ (15), що гарантує їх добру обумовленість. У разі застосування МПГЕ підінтегральна функція в (16) при $p = i$ має інтегровну в сенсі Рімана особливість, яка не приводить до числових ускладнень.

Геометрію криволінійних чотирикутних елементів дискретизації областей Ω , Ω^* і приграничних елементів G_j описували за допомогою аналітичних виразів із використанням восьмивузлового ізопараметричного відображення базового квадрата $\{\eta_j : -1 \leq \eta_j \leq 1, j = 1, 2\}$ на чотирикутний елемент [1, 2].

Зауважимо, що як у МПГЕ, так і в МГЕ системи (15) мають однакову розмірність і заповненість.

Числові результати. Похибки, які виникають у процесі застосування МГЕ і МПГЕ до розв'язування практичних задач, спричинені апроксимаційними, дискретизаційними операціями та числовим і числово-аналітичним інтегруванням. З метою порівняння точності чисельних результатів, одержаних МГЕ і МПГЕ, з відомим аналітичним розв'язком розглянемо нестационарну задачу теплопровідності для пластини квадратної планформи, коефіцієнт температуропровідності матеріалу якої дорівнює одиниці. Розглянемо випадок, коли початкова та граничні умови вибрані наступним чи-

ном: $\theta_0(x_1, x_2) = \sin x_1 \sin x_2$, $\theta_\Gamma(0, x_2, \widetilde{Fo}) = 0$, $\theta_\Gamma(x_2, 0, \widetilde{Fo}) = 0$, $\theta_\Gamma(\pi, x_2, \widetilde{Fo}) = 0$, $\theta_\Gamma(x_1, \pi, \widetilde{Fo}) = 0$. Аналітичний розв'язок задачі, отриманий поєднанням перетворення Лапласа за часом і скінченного синус-перетворення Фур'є за просторовими координатами, наведено у [6].

Задачу розв'язано з використанням 10-ти граничних елементів однакової довжини вздовж кожної сторони квадрата, на яких збудовано прямокутні та трапецієвидні приграничні елементи висоти h . Обчислення проводили з використанням кроку за часом $\Delta\widetilde{Fo} = 0.04$ при виборі чотири- та десятиточкового шаблону інтегрування у квадратурній формулі Гауса для різних значень висоти h приграничної області та висоти H області «пом'якшеної початкової умови» для випадку, коли $f_{0k}(x) = 0$ при $x \in \Omega_0$.

У табл. 1 наведено значення температурного поля $\theta(x, \widetilde{Fo})$ на проміжку $\{(x_1, x_2) : x_1 = x_2, 0.5\pi \leq x_1 < 0.9\pi, 0.5\pi \leq x_2 < 0.9\pi\}$, обчислені МГЕ, МПГЕ для $h = 2.5$, $H = 0$ та аналітично для $\widetilde{Fo} = 0.04$, тобто для першого кроку за часом.

Таблиця 1

| x | $\theta(x, \widetilde{Fo})$ | | |
|---------|-----------------------------|------------|------------|
| | Аналітично | МГЕ | МПГЕ |
| 1.57079 | 0.92311170 | 0.92303577 | 0.92303576 |
| 1.63469 | 0.91934817 | 0.91927233 | 0.91927231 |
| 1.69859 | 0.90811893 | 0.90804337 | 0.90804334 |
| 1.76249 | 0.88960705 | 0.88953203 | 0.88953197 |
| 2.57185 | 0.26860066 | 0.26867042 | 0.26910825 |
| 2.63574 | 0.21673677 | 0.21686260 | 0.21758171 |
| 2.69964 | 0.16886593 | 0.16906077 | 0.17014408 |
| 2.76354 | 0.12576884 | 0.12603896 | 0.12752872 |
| 2.82743 | 0.08814833 | 0.08849031 | 0.09033426 |

З аналізу даних, наведених у таблиці, випливає, що для усіх значень x з розглядуваного інтервалу досягається достатня точність співпадіння числових результатів із аналітичним розв'язком.

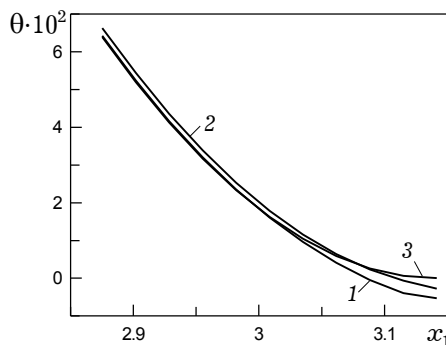


Рис. 1

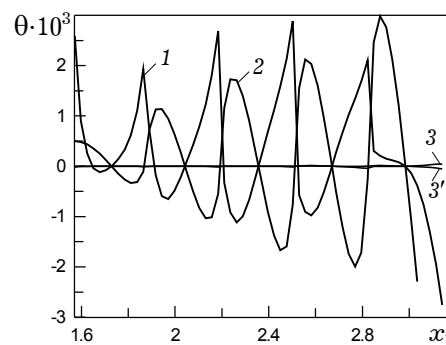


Рис. 2

На рис. 1 зображено аналогічні результати для проміжку $\{(x_1, x_2) : x_1 = x_2, 0.9\pi \leq x_1 \leq \pi, 0.9\pi \leq x_2 \leq \pi\}$. Криві 1-3 відповідають МГЕ, МПГЕ (при $h = 0.05$, $H = 0$) та аналітичному розв'язку. Як бачимо, для $x_1 = x_2 \geq 3.05$ спостерігається збільшення похибки обчислень при наближенні до кутової точки (появляються від'ємні значення температури, що суперечить фізичному змісту задачі).

Отже, у випадку дослідження температурних полів у приповерхневих ділянках тіла використання МГЕ є малоефективним. Водночас МПГЕ може бути використаний і в приповерхневих зонах завдяки наявності додаткових параметрів, які можна варіювати.

На рис. 2 наведено зміну температурного поля, обчисленого МГЕ і МПГЕ при різних h і H на частині сторони квадрата $\{(x_1, x_2) : \pi/2 \leq x_1 \leq \pi, x_2 = \pi\}$ для $\tilde{Fo} = 0.04$. Тут крива 1 відповідає МГЕ, крива 2 – МПГЕ при $h = 2.5$, $H = 0.095$, криві 3 і 3' – МПГЕ при $H = 0.5$ для $h = 0.015$ (крива 3) і $h = 2.5$ (крива 3') (в обох випадках вони практично збігаються).

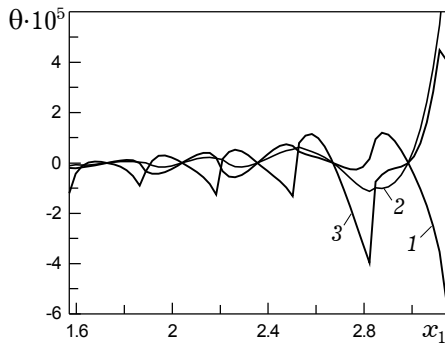


Рис. 3

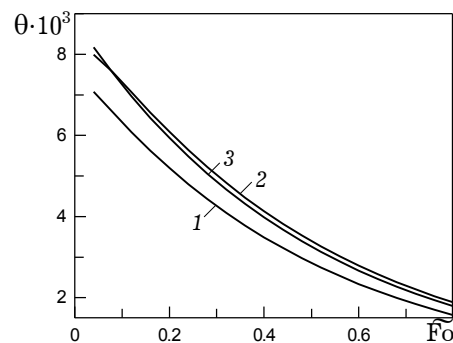


Рис. 4

На рис. 3 зображено зміну температури, обчисленої МПГЕ при $H = 0.5$ і різних h для аналогічних просторових і часових параметрів (криві 1–3 відповідають $h = 0.015, 0.5, 2.5$).

Із аналізу графіків випливає, що введення області «пом'якшеної початкової умови» дозволяє отримати значно точніші та фізично обґрунтовані числові результати. Точність обчислень більше залежить від вдалого вибору значення висоти H області Ω_0 , ніж від вибору висоти h приграничної області G^* , натомість зміна шаблону інтегрування суттєвого значення не має. Рекомендації щодо вибору параметра H можуть бути такими: для модельних задач з відомими аналітичними розв'язками варто виходити з апостеріорних оцінок отриманих числових результатів, для інших – порівнювати результати обчислень шуканих функцій у певних ділянках границі з заданими на них граничними умовами.

На рис. 4 наведено залежність функції $\theta(x, \tilde{Fo})$ від часу \tilde{Fo} у точці $(0.97\pi, 0.97\pi)$ при $h = 2.5, H = 0$. Криві 1–3 відповідають МГЕ, МПГЕ та аналітичному розв'язку. Наведені криві характеризують поведінку температурного поля у цій точці для 20-ти кроків за часом. Як бачимо, зі зміною часу точність чисельних результатів не погіршується, що свідчить про достатню стійкість чисельно-аналітичної розрахункової схеми.

Проведені дослідження засвідчили, що метод приграничних елементів у поєднанні з покроковою схемою «послідовності початкових умов» забезпечує вищу точність розрахунків температурного поля порівняно з методом граничних елементів у разі використання однакової кількості елементів та однакового ступеня апроксимації невідомих функцій «фіктивних» джерел. Це обґрунтовується тим, що пригранична область та область «пом'якшеної початкової умови» згладжують вплив уведених у цих областях джерел і функцій.

Зазначимо, що запропоновану методику надалі буде застосовано до розв'язування нестационарних нелінійних задач теплопровідності для термочутливого тіла з простою нелінійністю у випадку, коли на його границі задані температура та тепловий потік.

1. Бeнepджe П., Бaттepфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
2. Брeббия К., Теллес Ж., Врoубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
3. Грeцькo С. Г., Гудзь Р. В., Журавчак Л. М., Фітель Г. В. Числово-аналітичний спосіб розв'язування нестационарної задачі теплопровідності з нелінійними граничними умовами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 52. – С. 29–36.
4. Грeцькo С. Г., Журавчак Л. М. Порівняння методів граничних і приграничних елементів при розв'язуванні задач теорії пружності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1997. – 33, № 3. – С. 50–56.
5. Журавчак Л. М., Грeцькo С. Г. Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики. – Львів: Карпат. відділення Ін-ту геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, 1996. – 220 с.
6. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 599 с.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами // Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
8. Фітель Г. В. Застосування методу приграничних елементів до розв'язування нестационарної задачі теплопровідності з нелінійною граничною умовою III роду. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2000. – Вип. 1. – С. 231–235.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ И ПРИГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Для двумерных тел сложной геометрии методами приграничных и граничных элементов решена нестационарная задача теплопроводности с граничным условием первого рода. Осуществлен сравнительный анализ этих методов. На примере пластины квадратной формы проведено сопоставление полученных численных результатов с известным аналитическим решением.

UTILIZATION OF BOUNDARY AND CO-BOUNDARY ELEMENTS IN TWO-DIMENSIONAL MODEL OF NONSTATIONARY HEAT CONDUCTION

For two-dimensional solids of complex form, by the co-boundary element method and boundary element method, the nonstationary heat conduction problem with the I kind boundary condition is solved. Comparative analysis of these methods is carried out. Comparison on accuracy of solutions obtained, using BEM and CBEM, with the known analytical solution for a rectangular domain has been made.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

² Карпат. відділення Ін-ту геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, Львів

Одержано
19.09.02