УДК 517.956.3

В. М. Поліщук, Б. Й. Пташник

ЗАДАЧА З ПЕРІОДИЧНИМИ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ УМОВАМИ ДЛЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Встановлено умови існування та єдиності (частина з яких має теоретико-числовий характер) класичного розв'язку задачі з умовами періодичності за часовою змінною та умовами типу умов Діріхле за просторовими координатами для слабко нелінійного строго гіперболічного рівняння зі сталими в лінійній частині оператора коефіцієнтами.

Періодичні за часовою змінною крайові задачі для гіперболічних рівнянь є, взагалі, некоректними. Розв'язність таких задач пов'язана з проблемою малих знаменників. Для одновимірного хвильового рівняння періодичні розв'язки досліджували в працях [1, 5, 12, 15, 17, 19], багатовимірні випадки вивчали в [6, 7, 16]. Періодичним розв'язкам телеграфних рівнянь присвячені праці [11, 13, 14, 18]. У більшості з указаних праць накладено певні обмеження, які виключають появу малих знаменників. У працях [2, 3, 8, 9, 10] до розв'язання проблеми малих знаменників застосовано метричний підхід.

Пропонована праця, яка примикає до [2, 3], є розвитком [9] на випадок слабко нелінійного строго гіперболічного рівняння з багатьма просторовими змінними.

1. Нижче використовуємо такі позначення: $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $dx = dx_1 \ldots dx_p$; $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{N}^p$, $|k| = k_1 + \ldots + k_p$, $\|k\|^2 = k_1^2 + \ldots + k_p^2$; $s = (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}$; $|s| = s_0 + s_1 + \ldots + s_p$; $\Pi_p = \{x \in \mathbb{R}^p : 0 < x_j < \omega;\ j = 1, \ldots, p\}$; $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : t \in (0,T),\ x \in \Pi_p\}$; $B = \{(t,x,z) \in \mathbb{R}^{p+2} : (t,x) \in D,\ |z| < R < \infty\}$, де $R > 0$ − достатньо велике дійсне число;

$C^q(\bar{D})$ − банахів простір функцій $u(t,x)$, визначених і неперервних разом з усіма похідними до порядку q включно в області $\bar{D}$,

$$\|u\|_{C^q(\bar{D})} = \sum_{|s| \le q} \max_{(t,x) \in \bar{D}} \left| \frac{\partial^{|s|} u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \right|;$$

$C^{(0,m)}(\Omega)$ − банахів простір функцій $v(t, z_1, \ldots, z_\nu)$, визначених у замкненій області $\Omega \subset \mathbb{R}^{\nu+1}$, неперервних за t і m раз неперервно диференційовних за $z_1, \ldots, z_\nu$,

$$\|v\|_{C^{(0,m)}(\Omega)} = \sum_{|\theta|=0}^{m} \max_{(t,z) \in \Omega} \left| \frac{\partial^{|\theta|} v(t,z)}{\partial z_1^{\theta_1} \ldots \partial z_\nu^{\theta_\nu}} \right|.$$

2. Постановка задачі. В області D розглядаємо задачу

$$\sum_{|s|=n} a_s \frac{\partial^{2n} u(t,x)}{\partial t^{2s_0} \partial x_1^{2s_1} \ldots \partial x_p^{2s_p}} = F(t,x) + \varepsilon f(t,x,u), \tag{1}$$

$$\left. \frac{\partial^\ell u}{\partial t^\ell} \right|_{t=0} - \left. \frac{\partial^\ell u}{\partial t^\ell} \right|_{t=T} = 0, \qquad \ell = 0, 1, \ldots, 2n-1, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^{2q} u}{\partial x_j^{2q}}\right|_{x_j=0} = \left.\frac{\partial^{2q} u}{\partial x_j^{2q}}\right|_{x_j=\omega} = 0, \qquad q = 0,1,\ldots,n-1, \qquad j = 1,\ldots,p, \tag{3}$$

де $a_s \in \mathbb{R}$, $a_{(n,0,\ldots,0)} = 1$; $F(t,x) \in C^{(0,m)}(\bar{D})$, $m \in \mathbb{N}$; $f(t,x,z)$ визначена в $\bar{B}$, неперервна за t і досить гладка за $x_1,\ldots,x_p,z$. Вважаємо, що рівняння (1) є строго гіперболічним за Петровським, тобто для кожного $\xi \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0)\}$ всі λ − корені рівняння

$$\sum_{|s|=n} a_s \lambda^{2s_0} \xi_1^{2s_1} \ldots\ \xi_p^{2s_p} = 0 \tag{4}$$

є дійсними й різними; очевидно, що вони є відмінними від нуля.

3. Випадок незбуреної задачі ($\varepsilon = 0$). Зауважимо, що система функцій $\{\sin\frac{\pi}{\omega}k_1x_1 \ldots \sin\frac{\pi}{\omega}k_px_p,\ k \in \mathbb{N}^p\}$ є ортогональною і повною у просторі $L_2(\Pi_p)$.

Розв'язок незбуреної задачі шукаємо у вигляді ряду

$$u^0(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^p} u_k^0(t) \sin\frac{\pi}{\omega}k_1x_1 \ldots \sin\frac{\pi}{\omega}k_px_p\ ,$$

кожен член якого задовольняє умови (3). Припустимо, що $F(t,x)$ зображається рядом

$$F(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^p} F_k(t) \sin\frac{\pi}{\omega}k_1x_1 \ldots \sin\frac{\pi}{\omega}k_px_p\ ,$$

де

$$F_k(t) = \frac{1}{\omega^p} \int\limits_{\Pi_p} F(t,x) \sin\frac{\pi}{\omega}k_1x_1 \ldots \sin\frac{\pi}{\omega}k_px_p\, dx, \qquad k \in \mathbb{N}^p. \tag{5}$$

Тоді для визначення кожної із функцій $u_k^0(t)$, $k \in \mathbb{N}^p$, отримуємо відповідно таку задачу:

$$\sum_{|s|=n} a_s \left(i\frac{\pi}{\omega}k_1\right)^{2s_1} \ldots \left(i\frac{\pi}{\omega}k_p\right)^{2s_p} u_k^{(2s_0)}(t) = F_k(t), \tag{6}$$

$$\left.u_k^{(\ell)}(t)\right|_{t=0} - \left.u_k^{(\ell)}(t)\right|_{t=T} = 0, \qquad \ell = 0,1,\ldots,2n-1. \tag{7}$$

Однорідне рівняння

$$\sum_{|s|=n} a_s \left(i\frac{\pi}{\omega}k_1\right)^{2s_1} \ldots \left(i\frac{\pi}{\omega}k_p\right)^{2s_p} u_k^{(2s_0)}(t) = 0\ ,$$

яке відповідає рівнянню (6), має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$u_{kj}(t) = \exp\left(-i\|k\|\lambda_j(k)\frac{\pi}{\omega}t\right),$$

$$u_{k,n+j}(t) = \exp\left(i\|k\|\lambda_j(k)\frac{\pi}{\omega}t\right), \qquad j = 1,\ldots,n\,,$$

де $\lambda_j(k)$, $j = 1,\ldots,n$, − додатні корені рівняння (4) при $\xi_j = \frac{k_j}{\|k\|}$, $j = 1,\ldots,p$. Зі строгої гіперболічності рівняння (1) і теореми Вейєрштрасса про властивість неперервної функції на компакті отримуємо, що для кожного вектора $k \in \mathbb{N}^p$ справджуються нерівності

$$C_1 \le \lambda_j(k) \le C_2, \quad \left|\lambda_m^2(k) - \lambda_j^2(k)\right| \ge C_3, \quad j, m = 1, \ldots, n, \quad m \ne j. \tag{8}$$

Характеристичний визначник задачі (6), (7) обчислюється за формулою

$$\Delta(k) = (-1)^{n(n+1)/2} 2^n \left(i \| k \| \frac{\pi}{\omega} \right)^{n(2n-1)} \prod_{1 \le \ell < j \le n} \left(\lambda_j^2(k) - \lambda_\ell^2(k)\right)^2 \times$$

$$\times \prod_{r=1}^{n} \left[\lambda_r(k) \exp\left(-i \| k \| \lambda_r(k) \frac{\pi}{\omega} T \right) \left(1 - \exp\left(i \| k \| \lambda_r(k) \frac{\pi}{\omega} T \right) \right)^2 \right].$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку незбуреної задачі* (1)–(3) *у просторі* $C^{2n}(\bar{D})$ *необхідно та достатньо, щоб справджувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{N}^p \qquad \Delta(k) \ne 0. \tag{9}$$

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення теореми 1 з [9]. ◊

Зауважимо, що умова (9) справджується тоді й тільки тоді, коли рівняння

$$\lambda_j(k) \| k \| - \frac{2\omega}{T} q = 0, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

не мають нетривіальних розв'язків у цілих числах $k_1, \ldots, k_p, q$.

Надалі вважатимемо, що справджується умова (9). Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}^p$ існує єдина функція Ґріна задачі (6), (7), за допомогою якої розв'язок цієї задачі зображається формулою

$$u_k^0(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) F_k(\tau)\, d\tau, \qquad k \in \mathbb{N}^p,$$

а формальний розв'язок незбуреної задачі (1)–(3) має вигляд

$$u^0(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^p} \int_0^T G_k(t,\tau) F_k(\tau)\, d\tau \sin\frac{\pi}{\omega} k_1 x_1 \ldots \sin\frac{\pi}{\omega} k_p x_p. \tag{10}$$

У квадраті $\mathcal{K} = \{0 \le t, \ \tau \le T\}$, крім сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$, функції $G_k(t,\tau)$ визначаються формулами

$$G_k(t,\tau) = \frac{(-1)^n}{4\left(i \frac{\pi}{\omega} \| k \| \right)^{2n-1}} \times$$

$$\times \sum_{r=1}^{n} \frac{\exp\left(-i \| k \| \lambda_r(k) \frac{\pi}{\omega}(t-\tau) \right) - \exp\left(i \| k \| \lambda_r(k) \frac{\pi}{\omega}(t-\tau) \right)}{\lambda_r(k) \prod\limits_{\substack{\ell=1,\\ \ell \ne r}}^{n} (\lambda_\ell^2(k) - \lambda_r^2(k))} \times$$

$$\times \left[\operatorname{sgn}(t-\tau) + \frac{1 + \exp\left(i \| k \| \lambda_r(k) \frac{\pi}{\omega} T \right)}{1 - \exp\left(i \| k \| \lambda_r(k) \frac{\pi}{\omega} T \right)} \right], \qquad k \in \mathbb{N}^p. \tag{11}$$

На сторонах $\tau = 0$ $(\tau = T)$ квадрата $\mathcal{K}$ кожну функцію $G_k(t,\tau)$ доозначуємо за неперервністю справа (зліва).

Збіжність ряду у правій частині рівності (10) пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки вирази $\left|1-\exp\left(i\|k\|\lambda_j(k)\frac{\pi}{\omega}T\right)\right|$, $j=1,\ldots,n$, будучи відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими для нескінченного числа векторів $k\in\mathbb{N}^p$.

Лема 1. *Для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $\frac{\omega}{T}$ *нерівності*

$$\left|1-\exp\left(i\|k\|\lambda_j(k)\frac{\pi}{\omega}T\right)\right|\ge C_4\,|k|^{-p-\gamma}, \qquad \gamma>0, \qquad j=1,\ldots,n,$$

виконуються для всіх (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k\in\mathbb{N}^p$, *де* $C_4=C_4\left(\frac{\omega}{T}\right)$.

Д о в е д е н н я базується на лемі 3.2 з [10], нерівності $\sin x\ge\frac{2}{\pi}x$, $0\le x\le\pi/2$, та оцінках

$$\left|1-\exp\left(-i\|k\|\lambda_j(k)\frac{\pi}{\omega}T\right)\right|=2\left|\sin\left(\|k\|\lambda_j(k)\frac{\pi}{2\omega}T\right)\right|>$$

$$>\left|\sin\left|\|k\|\lambda_j(k)\frac{\pi}{2\omega}T-\pi d_j(k)\right|\right|\ge\frac{\|k\|T}{\omega}\left|\frac{\lambda_j(k)}{2}-\frac{\omega}{T}\frac{d_j(k)}{\|k\|}\right|, \quad j=1,\ldots,n,$$

де $d_j(k)$ − ціле число, для якого справджується умова

$$\left|\|k\|\lambda_j(k)\frac{T}{2\omega}-d_j(k)\right|\le\frac{1}{2}, \qquad k\in\mathbb{N}^p. \ \lozenge$$

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (9) *і* $F(t,x)\in C^{(0,2p+2)}(\bar{D})$, *причому*

$$\left.\frac{\partial^{2|\ell|}F(t,x)}{\partial x_1^{2\ell_1}\ldots\partial x_p^{2\ell_p}}\right|_{\substack{x_j=0,\\ x_j=\omega}}=0, \qquad |\ell|=0,1,\ldots,p, \qquad j=1,\ldots,p. \tag{12}$$

Тоді для майже всіх (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $\frac{\omega}{T}$ *існує єдиний розв'язок* $u^0(t,x)\in C^{2n}(\bar{D})$ *незбуреної задачі* (1)−(3), *який неперервно залежить від* $F(t,x)$ *і визначається формулами* (10), (11).

Д о в е д е н н я. На підставі формул (10), (11) отримуємо

$$\|u^0\|_{C^{2n}(\bar{D})}\le\sum_{k\in\mathbb{R}^p}\sum_{|s|\le 2n}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{|s|-s_0}k_1^{s_1}\ldots k_p^{s_p}\max_{0\le t\le T}\left|\frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}}\int_0^T G_k(t,\tau)\,d\tau\right|\max_{0\le t\le T}|F_k(t)|. \tag{13}$$

Із (8), (11) та леми 1 випливає, що для майже всіх чисел $\frac{\omega}{T}$ справджуються оцінки

$$\sum_{|s|\le 2n}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{|s|-s_0}k_1^{s_1}\ldots k_p^{s_p}\max_{0\le t\le T}\left|\frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}}\int_0^T G_k(t,\tau)\,d\tau\right|\le C_5\,|k|^{p+1+\gamma}, \ \gamma>0, \ k\in\mathbb{N}^p, \tag{14}$$

де $C_5=C_3^{-(n-1)}C_4^{-1}M_1M_2M_3$, $M_1=\max\left\{\frac{\pi}{\omega},\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{-2n+1}\right\}$, $M_2=\max\{1,C_1^{-1},C_2^{2n-1}\}$, M_3 − кількість усіх розв'язків нерівності $|s|\le 2n$ у цілих невід'ємних числах, s_0, s_1, …, s_p.

Якщо функція $F(t,x)$ задовольняє умови теореми, то з формул (5) випливають такі оцінки:

$$\max_{0\le t\le T}|F_k(t)| \le \left(\frac{\pi}{\omega}|k|\right)^{-(2p+2)} \| F \|_{C^{(0,2p+2)}(\bar{D})}, \qquad k \in \mathbb{N}^p. \tag{15}$$

На підставі (12)–(15) отримуємо, що для майже всіх чисел $\frac{\omega}{T}$ справджується нерівність

$$\| u^0 \|_{C^{2n}(\bar{D})} \le C_5 K \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{2p+2} \| F \|_{C^{(0,2p+2)}(\bar{D})}, \tag{16}$$

де K – сума ряду $\sum_{k\in\mathbb{N}^p} |k|^{-p-1+\gamma}$, який збігається при $0<\gamma<1$. Із нерівностей (16) випливає доведення теореми. ◊

4. Випадок збуреної задачі ($\varepsilon \ne 0$). Розглянемо замкнену множину $S(r)$, $0<r<R$, функцій $u(t,x)\in C^{2n}(\bar{D})$, які задовольняють умови (3) та нерівність $\left\| u-u^0 \right\|_{C^{2n}(\bar{D})} \le r$. Очевидно, що кожна з функцій $u(t,x)\in S(r)$ розвивається у ряд вигляду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^p} u_k(t) \sin\frac{\pi}{\omega}k_1x_1 \dots \sin\frac{\pi}{\omega}k_px_p .$$

Дослідимо питання про існування розв'язку незбуреної задачі (1)–(3) із $S(r)\subset C^{2n}(\bar{D})$.

Припустимо, що f і $\frac{\partial f}{\partial u}$ належать до простору $C^{(0,2p+2)}(\bar{B})$, причому для кожної $u\in S(r)$ функції $f(t,x,u(t,x))$ і $\frac{\partial f(t,x,u(t,x))}{\partial u}$ справджують умови вигляду (12), де похідні за змінними $x_1,\dots,x_p$ означають повні похідні від складної функції. Тоді

$$f(t,x,u(t,x)) = \sum_{k\in\mathbb{N}^p} f_k(t,\{u_k(t)\}) \sin\frac{\pi}{\omega}k_1x_1 \sin\frac{\pi}{\omega}k_px_p ,$$

де

$$f_k(t,\{u_k(t)\}) =$$

$$= \frac{1}{\omega^p}\int_{\Pi_p} f\left(t,y,\sum_{m\in\mathbb{N}^p} u_m(t)\prod_{j=1}^{p}\sin\frac{\pi}{\omega}m_jy_j\right)\prod_{\ell=1}^{p}\sin\frac{\pi}{\omega}k_\ell y_\ell \, dy_1\dots dy_p, \;\; k\in\mathbb{N}^p. \tag{17}$$

Задача (1)–(3) еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню

$$u(t,x) = u^0(t,x) + \varepsilon\int_D Q(t,\tau,x,y)\, f(\tau,y,u(\tau,y))\,dy\,d\tau, \tag{18}$$

де

$$Q(t,\tau,x,y) \equiv \omega^{-p}\sum_{k\in\mathbb{N}^p} G_k(t,\tau)\prod_{j=1}^{p}\left(\sin\frac{\pi}{\omega}k_jx_j \sin\frac{\pi}{\omega}k_jy_j\right), \tag{19}$$

за умови, що ряд (19) є рівномірно збіжним в області $\bar{D}\times\bar{D}$.

Лема 2. *Якщо $n\ge p+1$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\frac{\omega}{T}$ ряд (19) рівномірно збігається в області $\bar{D}\times\bar{D}$.*

Д о в е д е н н я випливає з формули (11), оцінок (8), (14) і леми 1. ◊

Надалі вважатимемо, що $n\ge p+1$.

Для доведення існування розв'язку $u(t,x) \in S(r)$ інтегрального рівняння (18) скористаємося принципом стискуючих відображень Качіополі − Банаха [4].

Рівняння (18) зобразимо у вигляді операторного рівняння

$$u(t,x) = A_{u^0}[u(t,x)], \tag{20}$$

у якому A_v − нелінійний інтегральний оператор, визначений на множині $S(r)$ формулою

$$A_v[u(t,x)] \equiv v(t,x) + \varepsilon \int_D Q(t,\tau,x,y)\, f(\tau,y,u(\tau,y))\, dy\, d\tau\,, \tag{21}$$

де $v(t,x) \in S(\rho)$, $\rho > 0$. Покажемо, що для досить малого ρ оператор A_v переводить множину $S(r)$ у себе. Нехай $u(t,x) \in S(r)$. Із (11), (14), (20), (21) випливає, що функція $A_v[u(t,x)]$ належить простору $C^{2n}(\bar{D})$, задовольняє умови (3) і справджує нерівність

$$\| A_v[u] - u^0 \|_{C^{2n}(\bar{D})} \le$$

$$\le \| v - u^0 \|_{C^{2n}(\bar{D})} + |\,\varepsilon\,| C_6 \sum_{k \in \mathbb{N}^p} \bar{f}_k \sum_{|s| \le 2n} k_1^{s_1} \ldots k_p^{s_p} \max_{0 \le t \le T} \left| \frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}} \int_0^T G_k(t,\tau)\, d\tau \right|, \tag{22}$$

де $C_6 = \max\left\{1, \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{2n}\right\}$, $\bar{f}_k = \max\limits_{0 \le t \le T} |\, f_k(t, \{u_m(t)\})\,|$, $k \in \mathbb{N}_p$.

За умов, накладених вище на функцію $f(t,x,z)$, із формул (17), використовуючи оцінку (16), отримуємо, що для майже всіх чисел $\frac{\omega}{T}$ виконуються нерівності

$$\bar{f}_k \le \left(\frac{\pi}{\omega}|k|\right)^{-(2p+2)} \sum_{|\ell|=p+1} \max_{(t,x) \in \bar{D}} \left| \frac{\partial^{2(p+1)} f(t,x,u(t,x))}{\partial x_1^{2\ell_1} \ldots \partial x_p^{2\ell_p}} \right| \le$$

$$\le \left(\frac{\pi}{\omega}|k|\right)^{-(2p+2)} \left(1 + \| u \|_{C^{2n}(\bar{D})}\right)^{2p+2} \| f \|_{C^{(0,2p+2)}(\bar{B})} \le$$

$$\le \Phi \cdot \left(\frac{\pi}{\omega}|k|\right)^{-(2p+2)} \left(1 + \left\| u - u^0 \right\|_{C^{2n}(\bar{D})} + \left\| u^0 \right\|_{C^{2n}(\bar{D})}\right)^{2p+2} \le$$

$$\le \Phi \cdot \left(\frac{\pi}{\omega}|k|\right)^{-(2p+2)} \left(1 + r + C_5 \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{2p+2} K\bar{F}\right)^{2p+2}, \qquad k \in \mathbb{N}^p. \tag{23}$$

де $\bar{F} = \| F \|_{C^{(0,2p+2)}(\bar{D})}$, $\Phi = \| f \|_{C^{(0,2p+2)}(\bar{B})}$. На підставі оцінок (14), (23) із нерівності (22) отримуємо

$$\| A_v[u] - u^0 \|_{C^{2n}(\bar{D})} \le \rho + |\,\varepsilon\,| \Psi\, \Phi\,, \tag{24}$$

де $\Psi = C_5 C_6 K \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{2p+2} \left(1 + r + C_5 K\bar{F}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)\right)^{2p+2}$.

Якщо $|\,\varepsilon\,| < r/(\Psi\Phi)$, то при $\rho = r - |\,\varepsilon\,| \Psi\, \Phi$ із оцінки (24) випливає, що для майже всіх чисел $\frac{\omega}{T}$ оператор A_v переводить множину $S(r)$ в себе.

Покажемо, що оператор (21) є оператором стиску.

Нехай $u_1(t,x)$ та $u_2(t,x)$ належать множині $S(r)$. Тоді, враховуючи (14), (19), (21), (23) і використовуючи формулу Лаґранжа про скінченні прирости, одержуємо

$$\| A_v[u_2] - A_v[u_1] \|_{C^{2n}(\bar{D})} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^p} \left\| \int_D \big(f(\tau, y, u_2(\tau, y)) - f(\tau, y, u_1(\tau, y))\big) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k \in \mathbb{N}^p} G_k(t,\tau) \prod_{j=1}^{p} \left(\sin \frac{\pi}{\omega} k_j y_j \sin \frac{\pi}{\omega} k_j x_j \right) d\tau\, dy_1 \ldots dy_p \right\|_{C^{2n}(\bar{D})} \leq$$

$$\leq |\varepsilon| \Psi \Phi_1 \| u_2 - u_1 \|_{C^{2n}(\bar{D})}, \tag{25}$$

де $\Phi_1 = \left\| \dfrac{\partial f}{\partial u} \right\|_{C^{(0,2p+2)}(\bar{B})}$.

Якщо $|\varepsilon| < 1/(\Psi\Phi_1)$, то із (25) випливає, що для майже всіх чисел $\dfrac{\omega}{T}$ оператор (21) є оператором стиску.

Неперервність за v оператора A_v очевидна.

Із сказаного вище в цьому пункті та теорем 1 і 3 із [4, с. 605–608] отримуємо наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми* 2, *функції* f і $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ *належать простору* $C^{(0,2p+2)}(\bar{B})$ *і для кожної* $u \in S(r)$ *функції* $f(t,x,u(t,x))$ *і* $\dfrac{\partial f(t,x,u(t,x))}{\partial u}$ *справджують умови* (12). *Тоді при* $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, *де* $\varepsilon_0 = \min\{r/(\Psi\Phi),\ 1/(\Psi\Phi_1)\}$, *для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $\dfrac{\omega}{T}$ *і довільних фіксованих* $a_s, |s| = n$, *існує єдиний розв'язок рівняння* (18), *а, отже, й задачі* (1)–(3), *який належить множині* $S(r) \subset C^{2n}(\bar{D})$ *і який неперервно залежить від функції* $F(t,x)$.

Зауваження 1. Розв'язок задачі (1)–(3), існування та єдиність якого стверджує теорема 3, можна отримати як границю послідовності $\{u_\ell(t,x),\ \ell \in \mathbb{N}\}$, у якій

$$u_{\ell+1}(t,x) = A_{u^0}[u_\ell(t,x)], \qquad \ell = 1, 2, \ldots,$$

де $u_1(t,x)$ – довільна функція з $S(r)$, а оператор A_v визначений формулою (21).

Зауваження 2. Результати роботи можна поширити на деякі класи слабко нелінійних гіперболічних рівнянь з молодшими членами в лінійній частині, зокрема, на рівняння вигляду

$$\prod_{j=1}^{p} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_j \Delta - b_j \right) u(t,x) = F(t,x) + \varepsilon f(t,x,u),$$

де $a_j,\ b_j \in \mathbb{R}$, а також на випадок задачі, яка отримується із задачі (1)–(3) шляхом заміни в ній диференціальних виразів $\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ на

$$L_j \equiv -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(p_j(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + q_j(x_j), \ \ j = 1, \ldots, p.$$

1. *Артемьев Н. А.* Периодические решения одного класса уравнений в частных производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1937. – № 1. – С. 15–50.
2. *Білусяк Н. І., Пташник Б. Й.* Крайова задача з даними на всій границі області для слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 2. – С. 244–249.
3. *Гой Т. П., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 2. – С. 186–195.
4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
5. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* О периодических решениях волновых уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 8. – С. 1115–1121.
6. *Орлов А. В.* О периодических решениях задачи Дирихле для нелинейного волнового уравнения // Геометр. вопросы теории функций и множеств. – Калинин, 1987. – С. 88–98.
7. *Писаренко В. Г.* Побудова деяких наближень розв'язків квазілінійних хвильових рівнянь асимптотичними методами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1971. – № 5. – С. 418–422.
8. *Полищук В. Н., Пташник Б. И.* О периодической краевой задаче для гиперболических операторов, распадающихся на линейные множители первого порядка с постоянными коэффициентами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1976. – Вып. 3. – С. 6–12.
9. *Пташник Б. И.* Периодическая краевая задача для линейных гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами // Мат. физика. – 1972. – Вып. 12. – С. 117–121.
10. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
11. *Роговченко С. П.* О периодических решениях линейного телеграфного уравнения, подверженного импульсному воздействию // Физ.-техн. прил. нелинейных краевых задач. – Киев, 1987. – С. 119–124.
12. *Соколов Г. Т.* О периодических решениях волнового уравнения // Учен. записки Ферган. гос. пед. ин-та. Сер. матем. – 1965. – Вып. 1. – С. 17–25.
13. *Fučik S., Mawhin J.* Generalized periodic solutions of nonlinear telegraph equations // Nonlinear Anal., Theory, Methods and Appl. – 1978. – **2**, No. 5. – P. 609–617.
14. *Havlova J.* Periodic solutions of nonlinear telegraph equations // Čas. péstov. mat. – 1965. – **90**, No. 3. – P. 273–289.
15. *Li S., Sculkin A.* Periodic solutions for a class of nonautonomous wave equations // Differ. and Integral Equations. – 1996. – **9**, No. 6. – P. 1197–1212.
16. *Prodi G.* Soluzioni periodiche di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico non lineari // Ann. mat. pura et appl. – 1956. – **42**. – P. 25–49.
17. *Rabinowitz P. H.* Periodic solutions of non-linear hyperbolic partial differential equations. II // Comm. pure and appl. math. – 1969. – **22**, No. 1. – P. 15–30.
18. *Štedry M.* Small time-periodic solutions to fully nonlinear telegraph equations with several spatial variables // Proc. XIth Int. Conf. Nonlinear Oscillation (Aug., 17–23, 1987). – Budapest, 1987. – P. 723–725.
19. *Vejvoda O.* Periodic solutions of a linear and weakly nonlinear wave equation in one dimension. I // Czechosl. Math. J. – 1964. – **14**(**89**), No. 3. – P. 341–382.

ЗАДАЧА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПО ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Установлены условия существования и единственности (часть из них имеет теоретико-числовой характер) классического решения задачи с условиями периодичности по временной переменной и условиями типа условий Дирихле по пространственным координатам для слабо нелинейного строго гиперболического уравнения с постоянными в линейной части оператора коэффициентами.

PROBLEM WITH PERIODIC IN TIME VARIABLES CONDITIONS FOR WEAKLY NONLINEAR EQUATIONS

The conditions of existence and uniqueness (part of them has the number-theoretic character) of classical solution to the problem with periodic conditions by time variable and Dirichlet-type conditions by space variables for weakly nonlinear strictly hyperbolic equation with constant coefficients in the linear part of operator are established.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
05.08.03