УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен[1], І. П. Мединський[2]

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ $\vec{2b}$-ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Встановлено теорему про підвищення гладкості та апріорні оцінки розв'язків задачі Коші для лінійної $\vec{2b}$-параболічної системи рівнянь, що має слабке виродження на початковій гіперплощині.

Об'єктом здійснюваного в цій статті дослідження є один клас лінійних параболічних за С. Д. Ейдельманом систем рівнянь із виродженням на початковій гіперплощині. Для цього класу систем розглядається задача Коші зі звичайними початковими умовами. Дослідження таких задач розпочато в працях [1–3] з метою перенесення результатів з [4–9, 11–13] на $\vec{2b}$-параболічні системи з виродженням на початковій гіперплощині. У працях [1, 3], зокрема, побудовано фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші (ФМРЗК), досліджено її властивості та властивості породжених нею потенціалів; у [2] одержано інтегральне зображення розв'язків задачі Коші.

Ці результати одержано за умови існування відповідних спряжених систем, що звужує сферу їх застосування, зокрема, до квазілінійних систем. Тому подальше дослідження в цьому напрямку потребувало використання техніки апріорних оцінок, що передбачає поглиблене вивчення властивостей ФМРЗК Z, зокрема, як функції часової змінної, а також похідних від об'ємного потенціалу. Результати дослідження матриці Z наведено в [1, 3], а об'ємного потенціалу – в [10]. Доведені в [10] леми мають і самостійний інтерес, оскільки стосуються властивостей інтегральних операторів загальної конструкції, які діють у спеціальних вагових просторах Гельдера, будова яких є більш загальною, ніж відповідних просторів з праці [13]. Це дало можливість одержати результати, які уточнюють і доповнюють результати, наведені в [13].

1. Користуватимемося такими позначеннями: n, $b_1,\ldots,b_n$ і N – задані натуральні числа; $\vec{2b} \equiv (2b_1,\ldots,2b_n)$, b – найменше спільне кратне чисел $b_1,\ldots,b_n$, $m_j \equiv b/b_j$, $q_j \equiv 2b_j/(2b_j-1)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$; $M \equiv \sum_{j=1}^{n} m_j$; T – задане додатне число; C_N і C_{NN} – сукупності відповідно всіх стовпців висоти N і матриць розміру $N \times N$, елементами яких є комплексні числа; $\|k\| \equiv \sum_{j=1}^{n} m_j k_j$, якщо $k \equiv (k_1,\ldots,k_n)$ – мультиіндекс; I – одинична матриця порядку N; $\alpha : [0,T] \to [0,\infty)$ і $\beta : [0,T] \to [0,\infty)$ – задані неперервні функції такі, що $\alpha(0)\beta(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ для $t > 0$ і β монотонно неспадна;

$$A(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}, \qquad B(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\, d\theta, \qquad 0 < \tau \le t \le T;$$

$$E_c(t,\tau,x) \equiv \exp\left\{-c\sum_{j=1}^{n} \left(B(t,\tau)\right)^{1-q_j} |\, x_j\,|^{q_j}\right\}, \quad 0<\tau\le t\le T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad c>0;$$

$$p_0(x;x') \equiv \left(\sum_{j=1}^{n} | x_j - x'_j |^{2/m_j} \right)^{1/2},$$

$$p(t,x;t',x') \equiv \left[(A(t,t'))^{1/b} + (p_0(x;x'))^2 \right]^{1/2}, \qquad \{(t,x);(t',x')\} \subset \Pi_{[0,T]}.$$

Розглянемо систему N рівнянь вигляду

$$\left(\alpha(t) I \partial_t - \beta(t) \sum_{1 \le \|k\| \le 2b} a_k(t,x) \partial_x^k - a_0(t,x) \right) u(t,x) = f(t,x),$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де $a_k : \Pi_{(0,T]} \to C_{NN}$, $\|k\| \le 2b$, $f : \Pi_{(0,T]} \to C_N$ – задані, а $u : \Pi_{(0,T]} \to C_N$ – невідома функції.

Використовуватимемо такі умови.

1°. Існує така стала $\rho > 0$, що для довільних $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma \in \mathbb{R}^n$ p – корені $p_1, \ldots, p_N$ рівняння $\det\left(\sum_{\|k\|=2b} a_k(t,x)(i\sigma)^k - pI \right) = 0$ задовольняють нерівності $\operatorname{Re} p_j(t,x,\sigma) \le -\rho \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{2b_j}$, $j \in \{1,\ldots,N\}$.

2°. Коефіцієнти a_k, $\|k\| \le 2b$, обмежені й неперервні за t в $\Pi_{[0,T]}$ (при цьому неперервність коефіцієнтів з $\|k\| = 2b$ рівномірна щодо $x \in \mathbb{R}^n$), а також задовольняють у $\Pi_{[0,T]}$ умову Гельдера за x з показником $\gamma \in (0,1)$ щодо відстані p_0:

$$\exists\, C > 0 \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall\, \{x,x'\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \forall\, k, \quad \|k\| \le 2b:$$

$$| \Delta_x^{x'} a_k(t,x) | \equiv | a_k(t,x) - a_k(t,x') | \le C(p_0(x;x'))^{\gamma}.$$

3°. Функції a_k, $\|k\| \le 2b$, обмежені й задовольняють умову

$$\exists\, C > 0 \quad \forall \{t,t'\} \subset (0,T], \quad t < t', \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, k, \quad \|k\| \le 2b:$$

$$| \Delta_t^{t'} a_k(t,x) | \equiv | a_k(t,x) - a_k(t',x) | \le C(A(t',t))^{\gamma/(2b)}.$$

4°. Коефіцієнти a_k, $\|k\| \le 2b$, мають обмежені й неперервні за t похідні $\partial_x^k a_k$, $\|k\| \le 2b$, які задовольняють у $\Pi_{[0,T]}$ умову Гельдера за x відносно p_0 з показником $\gamma \in (0,1)$.

5°. $\qquad \exists\, \gamma_0 \in (0,1), \quad \exists K > 0 \quad \forall t \in (0,T]: \qquad \int_0^t (B(t,\tau))^{-1+\gamma_0/(2b)} \dfrac{d\tau}{\alpha(\tau)} \le K.$

Припускатимемо, що $A(T,0) < \infty$, і позначатимемо через γ_1 число $\gamma - \gamma_0$. Згідно з [1, 3] за умов ***1***°–***3***° для слабко виродженої системи (1) існує ФМРЗК, для якої справджуються оцінки

$$| \partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi) | \le C\,(B(t,\tau))^{-(M+\|k\|)/(2b)} E_c(t,\tau,x-\xi), \tag{2}$$

$$| \Delta_{t,x}^{t',x'} \partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi) | \equiv | \partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi) - \partial_x^k Z(t',x';\tau,\xi) | \le$$

$$\le C\big(p(t,x;t',x')\big)^{\gamma}\big(B(t,\tau)\big)^{-(M+\|k\|+\gamma)/(2b)}\big(E_c(t,\tau,x-\xi)+$$

$$+E_c(t',\tau,x'-\xi)\big),\qquad 0<\tau<t<t'\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad \|k\|\le 2b. \quad (3)$$

2. Для функцій $u:\Pi_{(0,T]}\to C_N$ будемо використовувати простори $C^{\gamma,\lambda}_{\mu,r}$ з [10] у випадку $\delta=\beta$. За допомогою цих просторів означимо простори $U^{\gamma,\lambda}_{\mu,r}$ і $U^{\gamma,\lambda}_{0}$ для заданих чисел $\{\gamma,\lambda\}\subset(0,1]$, $\mu\in\{0,1,\ldots\}$ і $r\in\mathbb{R}$. Вони складаються відповідно з функцій $u\in C^{0,0}_{\mu,r+1}$ і $u\in C^{0,0}_{0,0}$, які мають похідні $\partial_x^k u$, $0<\|k\|\le 2b$, що належать відповідно до просторів $C^{\zeta,\zeta/(2b)}_{\mu,r+1-\|k\|/(2b)}$ і $C^{\zeta,\zeta/(2b}_{0,0}$, де $\zeta=\gamma$ для $\|k\|<2b$ і $\zeta=\lambda$ для $\|k\|=2b$. Норми в просторах визначаються відповідно формулами

$$\|u\|_{U^{\gamma,\lambda}_{\mu,r}}\equiv\|u\|^{0,0}_{\mu,r+1}+\sum_{0<\|k\|<2b}\big\|\partial_x^k u\big\|^{\gamma,\gamma/(2b)}_{\mu,r+1-\|k\|/(2b)}+\sum_{\|k\|=2b}\big\|\partial_x^k u\big\|^{\lambda,\lambda/(2b)}_{\mu,r},$$

$$\|u\|_{U^{\gamma,\lambda}_{0}}\equiv\|u\|^{0,0}_{0,0}+\sum_{0<\|k\|<2b}\big\|\partial_x^k u\big\|^{\gamma,\gamma/(2b)}_{0,0}+\sum_{\|k\|=2b}\big\|\partial_x^k u\big\|^{\lambda,\lambda/(2b)}_{0,0}.$$

Для слабко виродженої системи (1) можна ставити початкову умову в класичному сенсі

$$u(t,x)\big|_{t=0}=\varphi(x),\qquad x\in\mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Припускатимемо, що початкова функція $\varphi:\mathbb{R}^n\to C_N$ належить до простору $C^{2b+\gamma}$, який складається з неперервних функцій, для яких є скінченною норма

$$\|\varphi\|^{2b+\gamma}\equiv$$

$$\equiv\sum_{\|k\|\le 2b}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{\big|\partial_x^k\varphi(x)\big|}{\Psi(0,x)}+\sup_{\substack{\{x,x'\}\in\mathbb{R}^n\\ x\ne x'}}\left(\frac{\big|\Delta_x^{x'}\partial_x^k\varphi(x)\big|}{\big(p_0(x;x')\big)^{\gamma}}\big(\Psi(0,x)+\Psi(0,x')\big)^{-1}\right)\right),$$

де функція Ψ така, як і в [10]. ФМРЗК Z для системи (1) породжує об'ємний потенціал

$$u(t,x)=\int_0^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi,\qquad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \quad (5)$$

властивості якого описані в наступних лемах.

Лема 1. *Нехай для коефіцієнтів системи* (1) *виконуються умови* ***1°***, ***2°***. *Тоді є правильними твердження*:

а) *якщо* $f\in C^{\lambda,0}_{\mu+1,r}$, $\lambda\le\gamma$, $\mu\in\{0,1,\ldots\}$, $r\ge 0$, *то функція* (5) *має неперервні похідні, які входять у систему* (1) *і обчислюються за такими формулами*:

$$\partial_x^k u(t,x)=\int_0^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\,f(\tau,\xi)\,d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\quad \|k\|\le 2b, \quad (6)$$

$$\partial_x^k u(t,x)=\int_0^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\,\Delta_\xi^x f(\tau,\xi)\,d\xi+$$

$$+\int_0^t\left(\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\,d\xi\right)\frac{f(\tau,x)}{\alpha(\tau)}\,d\tau,\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\quad \|k\|=2b, \quad (7)$$

$$\alpha(t)\partial_t u(t,x) = f(t,x) + \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(t)\partial_t Z(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^x f(\tau,\xi)\,d\xi +$$

$$+\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(t)\partial_t Z(t,x;\tau,\xi)\,d\xi \right) \frac{f(\tau,x)}{\alpha(\tau)}\,d\tau, \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}; \tag{8}$$

б) *якщо* $f \in C_{0,0}^{\lambda,0}$, $\lambda \le \gamma$, *і додатково припускається виконання умови* ***5***° *з деяким* $\gamma_0 < \lambda$, *то функція* (5) *має неперервні похідні, які входять у систему* (1) *і обчислюються за формулами* (6)–(8);

в) *якщо* $f \in C_{\mu+1,r}^{0,0}$, $\mu \in \{0,1,\ldots\}$, $r \ge 0$, *то для функції* (5) *та її похідних, які обчислюються за формулами* (6), *справджуються оцінки*

$$\| \partial_x^k u \|_{\mu,1+r-\|k\|/(2b)}^{0,0} \le C \| f \|_{\mu+1,r}^{0,0}, \qquad \| k \| < 2b, \tag{9}$$

$$[\partial_x^k u]_{\mu,1+r-\|k\|/(2b)}^{\gamma,0} \le C \| f \|_{\mu+1,r}^{0,0}, \qquad \| k \| < 2b. \tag{10}$$

Зауваження. З оцінок (9), (10) випливає, що $\partial_x^k u \in C_{\mu,1+r-\|k\|/(2b)}^{\gamma,0}$, $\| k \| < 2b$, для довільних $\mu \in \{0,1,\ldots\}$ і $r \ge 0$ і, отже, $\partial_x^k u \in C_{\mu,r}^{\gamma,0}$, $\| k \| < 2b$.

Лема 2. *Нехай у системі* (1) *коефіцієнти* a_k, $\| k \| \le 2b$, *залежать тільки від параметрів* $(\theta, y) \in \Pi_{(0,T]}$, *причому як функції цих параметрів вони задовольняють умови* ***1***°*–****3***°. *Нехай, далі,* $G_0(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot;\theta,y)$ – *ФМРЗК для системи*

$$\left(\alpha(t) I \partial_t - \beta(t) \sum_{\|k\|=2b} a_k(\theta,y)\partial_x^k - a_0(\theta,y) \right) u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{11}$$

Якщо $f \in C_{1,r}^{\gamma,0}$, $r > \gamma/(2b)$, *то для інтеграла*

$$v(t,x;\theta,y) \equiv \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\tau,\xi;\theta,y) f(\tau,\xi)\,d\xi, \quad \{(t,x),(\theta,y)\} \in \Pi_{(0,T]},$$

є правильним таке твердження: функції $v_k(t,x) \equiv \partial_x^k v(t,x;\theta,y)\big|_{(\theta,y)=(t,x)}$, $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$, *належать до просторів* $\partial_x^k u \in C_{\mu,1+r-\|k\|/(2b)}^{\gamma,\gamma/(2b)}$, $0 < \| k \| \le 2b$, *і справджуються оцінки*

$$\| v_k \|_{0,1+r-\|k\|/(2b)}^{\gamma,\gamma/(2b)} \le C \| f \|_{1,r}^{\gamma,0}, \qquad 0 < \| k \| \le 2b. \tag{12}$$

Якщо $f \in C_{0,0}^{\gamma,0}$ *і додатково виконується умова* ***5***° *з* $\gamma_0 < \gamma$, *то* v_k, $0 < \| k \| \le 2b$, *належать до просторів* $C_{0,0}^{\zeta,\zeta/(2b)}$ *і справджуються оцінки*

$$\| v_k \|_{0,0}^{\zeta,\zeta/(2b)} \le C \| f \|_{0,0}^{\gamma,0}, \qquad 0 < \| k \| \le 2b, \tag{13}$$

де $\zeta = \gamma$, *якщо* $\| k \| < 2b$, *і* $\zeta = \gamma_1$, *якщо* $\| k \| = 2b$.

Д о в е д е н н я лем 1 і 2 проводиться за допомогою відповідних лем з праці [10].

Наведемо ще одне твердження, доведення якого є аналогічним до доведення відповідних тверджень із [2] і ґрунтується на формулі Ґріна – Остроградського.

Лема 3. *Нехай функція* $u : \Pi_{[0,T]} \to C_N$ *неперервна, задовольняє умову*

$$\exists\, C > 0 \qquad \forall t \in [0,T] : W_0[u;t] \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{|\, u(t,x)\,|}{\Psi(t,x)} \le C$$

і є в $\Pi_{(0,T]}$ *розв'язком системи* (1), *у якій* f *неперервна в* $\Pi_{(0,T]}$ *і задовольняє умову* $\int\limits_0^T W_0[f;\tau]\dfrac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty$.

Якщо виконуються умови **1°**, **2°** і **4°**, *то є правильною формула*

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)u(0,\xi)\,d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi, \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{14}$$

де Z *− ФМРЗК для системи* (1).

3. Основні результати статті містяться у наступній теоремі.

Теорема. *Нехай коефіцієнти* a_k, $\|k\| \le 2b$, *системи* (1) *задовольняють умови* **1°–3°** *з деяким* $\gamma \in (0,1)$, *виконується умова* **5°** *з* $\gamma_0 < \gamma$, $A(T,0) < \infty$, $f \in C_{0,0}^{\gamma,0}$ *і* $\varphi \in C^{2b+\gamma}$. *Тоді якщо* u *− регулярний розв'язок задачі Коші* (1), (4) *з простору* $U_0^{0,0}$, *то* $u \in U_0^{\gamma,\gamma_1}$ *і справджується оцінка*

$$\|\, u \,\|_{U_0^{\gamma,\gamma_1}} \le C\big(\|\,\varphi\,\|^{2b+\gamma} + \|\, f\,\|_{0,0}^{\gamma,0}\big). \tag{15}$$

Д о в е д е н н я. Твердження теореми доведемо за методикою, запозиченою з праць [7, 8, 12]. Підставимо розв'язок u в систему (1) і запишемо одержану тотожність у вигляді

$$\Big(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t)\sum_{1\le\|k\|\le 2b} a_k(t,y)\,\partial_x^k - a_0(t,y)\Big)v(t,x) =$$

$$= f_1^{(y)}(t,x) + f_2^{(y)}(t,x), \qquad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{16}$$

де $\qquad v \equiv u - \varphi$,

$$f_1^{(y)}(t,x) \equiv f(t,x) + \beta(t)\sum_{1\le\|k\|\le 2b} a_k(t,y)\partial_x^k\varphi(x) + a_0(t,y)\,\varphi(x),$$

$$f_2^{(y)}(t,x) \equiv \beta(t)\sum_{1\le\|k\|\le 2b} \Delta_x^y a_k(t,x)\partial_x^k u(t,x) + \Delta_x^y a_0(t,x)\,u(t,x),$$

$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}$; y − довільно фіксована точка з $\mathbb{R}^n$.

Оскільки коефіцієнти системи (16) не залежать від x, а $v\big|_{t=0} = 0$, то на підставі леми 3 маємо зображення

$$u(t,x) = u_1(t,x;y) + u_2(t,x;y) + \varphi(x), \qquad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{17}$$

де

$$u_j(t,x;y) \equiv \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi;y)\, f_j^{(y)}(\tau,\xi)\,d\xi, \qquad j\in\{1,2\}, \tag{18}$$

$G(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot;y)$ − ФМРЗК для системи

$$\Big(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t)\sum_{1\le\|k\|\le 2b} a_k(t,y)\partial_x^k - a_0(t,y)\Big)v(t,x) = 0, \qquad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}.$$

Для G справджуються оцінки (2) такі, як для матриці Z, а також оцінки (3) для приросту за змінною y.

З припущень щодо коефіцієнтів системи (1), функцій f і φ випливає, що для кожної фіксованої точки $y \in \mathbb{R}^n$ функція $f_1^{(y)}$ належить до простору $C_{0,0}^{\gamma,0}$. Тому на підставі леми 1 маємо

$$\partial_x^k u_1(t,x;y) =$$

$$= \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G(t,x;\tau,\xi;y) f_1^{(y)}(\tau,\xi)\,d\xi, (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad \|k\| < 2b, \quad (19_1)$$

$$\partial_x^k u_1(t,x;y) =$$

$$= \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G(t,x;\tau,\xi;y)\, \Delta_\xi^x f_1^{(y)}(\tau,\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G(t,x;\tau,\xi;y)\,d\xi \right) \frac{f_1^{(y)}(\tau,x)}{\alpha(\tau)}\,d\tau, \ (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \ \|k\| = 2b. \quad (20)$$

Для функції u_2 також справджуються рівності

$$\partial_x^k u_2(t,x;y) = \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G(t,x;\tau,\xi;y)\, f_2^{(y)}(\tau,\xi)\,d\xi, \quad \|k\| < 2b, \quad (19_2)$$

але одержати для цієї функції формули, аналогічні до (20), взагалі кажучи, не можна. Це пов'язано з тим, що функція $f_2^{(y)}$ не належить до простору $C_{0,0}^{\gamma,0}$, оскільки вона містить похідні від розв'язку, умова Гельдера за x для яких не припускається. Якщо, однак, проаналізувати доведення формул (20), то можна переконатися, як і в [7], що існують похідні $\partial_x^k u_2(\cdot,\cdot;y)$, $\|k\| = 2b$, у точці $x = y$, для яких є правильними формули

$$\partial_x^k u_2(t,x;y)\Big|_{x=y} = \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G(t,x;\tau,\xi;y)\Big|_{x=y} \Big(\Delta_\xi^y a_0(\tau,\xi) u(\tau,\xi) +$$

$$+ \beta(\tau) \sum_{0<\|k\|\le 2b} \Delta_\xi^y a_k(\tau,\xi)\, \partial_x^k u(\tau,\xi) \Big) d\xi, \quad (t,y) \in \Pi_{(0,T]}, \ \|k\| = 2b. \ (21)$$

Оскільки рівності (17), (19_1), (19_2), (20) і (21) справджуються для будь-якої точки $y \in \mathbb{R}^n$, то поклавши в них $y = x$, одержимо

$$\partial_x^k u(t,x) = \partial_x^k u_1(t,x;y)\Big|_{y=x} + \partial_x^k u_2(t,x;y)\Big|_{y=x} + \partial_x^k \varphi(x),$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad \|k\| \le 2b. \quad (22)$$

Провівши оцінки для доданків з (22), одержимо нерівність

$$W(t) < C\big(\|\varphi\|^{2b+\gamma} + \|f\|_{0,0}^{\gamma,0}\big) + C\int_0^t (B(t,\tau))^{-1+\gamma/(2b)} W(\tau) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)},$$

$$W(t) \equiv \sum_{\|k\|\le 2b} W_0[\partial_x^k u; t], \qquad t \in (0,T]. \quad (23)$$

На підставі умови **5°** маємо

$$\int_0^t (B(t,\tau))^{-1+\gamma/(2b)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \le K(B(t,0))^{(\gamma-\gamma_0)/(2b)}. \tag{24}$$

Нехай число $t^* \in (0,T]$ таке, що

$$CK(B(t^*,0))^{(\gamma-\gamma_0)/(2b)} < 1, \tag{25}$$

де C − стала з (23), а K − стала з умови **5°**. Тоді за допомогою (24) і (25) з нерівності (23) для $t \in (0,t^*]$ одержимо

$$\sup_{t\in(0,t^*]} W(t) < C_1(\|\varphi\|^{2b+\lambda} + \|f\|_{0,0}^{\lambda,0}), \tag{26}$$

де $C_1 \equiv C\left(1 - CK(B(t^*,0))^{(\gamma-\gamma_0)/(2b)}\right)^{-1}$.

Для $t > t^*$ з урахуванням (23) і (26) маємо

$$W(t) \le C(\|\varphi\|^{2b+\gamma} + \|f\|_{0,0}^{\gamma,0}) + C\int_0^{t^*} (B(t,\tau))^{-1+\gamma/(2b)} W(\tau)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)} +$$

$$+ C\int_{t^*}^t (B(t,\tau))^{-1+\gamma/(2b)} W(\tau)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \le C(\|\varphi\|^{2b+\gamma} + \|f\|_{0,0}^{\gamma,0}) +$$

$$+ CK(B(t^*,0))^{(\gamma-\gamma_0)/(2b)} \sup_{t\in(0,t^*]} W(t) +$$

$$+ C\int_{t^*}^t (A(t,\tau))^{-1+\gamma/(2b)} (\beta(\tau))^{-1+\gamma/(2b)} W(\tau)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \le$$

$$\le C_2(\|\varphi\|^{2b+\gamma} + \|f\|_{0,0}^{\gamma,0}) + C_3\int_{t^*}^t (A(t,\tau))^{-1+\gamma/(2b)} W(\tau)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)},$$

де $\quad C_2 \equiv C\left(1 + C_1K(B(t^*,0))^{(\gamma-\gamma_0)/(2b)}\right), \qquad C_3 \equiv C(\beta(t^*))^{-1+\gamma/(2b)}$.

Звідси випливає така нерівність для W:

$$W(t) \le a + b\int_{t^*}^t (A(t,\tau))^{-1+\gamma/(2b)} W(\tau)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}, \qquad t \in (t^*,T]. \tag{27}$$

Тут $a \equiv C_2(\|\varphi\|^{2b+\gamma} + \|f\|_{0,0}^{\gamma,0})$ і $b \equiv C_3$.

З нерівностей (26) і (27), як і в [8], одержуємо оцінку

$$\|u\|_{U_0^{0,0}} \le C(\|\varphi\|^{2b+\gamma} + \|f\|_{0,0}^{\gamma,0}). \tag{28}$$

Зауважимо, що для молодших похідних (22) справджуються оцінки

$$[\partial_x^k u]_{0,0}^{\gamma,0} \le C(\|\varphi\|^{2b+\gamma} + \|f\|_{0,0}^{\gamma,0}), \qquad \|k\| < 2b. \tag{29}$$

Перейдемо до оцінок приростів похідних від u. Для цього запишемо таке зображення розв'язку:

$$u(t,x) = u_1(t,x;\theta,y) + u_2(t,x;\theta,y) + \varphi(x), \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{30}$$

де (θ,y) − довільно фіксована точка шару $\Pi_{(0,T]}$,

$$u_j(t,x;\theta,y)\equiv$$

$$\equiv \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\tau,\xi;\theta,y) F_j^{(\theta,y)}(\tau,\xi)\,d\xi, (t,x)\in \Pi_{(0,T]}, \quad j\in\{1,2\}, \quad (31)$$

$G_0(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot;\theta,y)$ − ФМРЗК системи (11),

$$F_1^{(\theta,y)}(t,x)\equiv f(t,x)+\beta(t)\sum_{\|k\|=2b} a_k(\theta,y)\,\partial_x^k\varphi(x)+a_0(\theta,y)\,\varphi(x)+$$

$$+\beta(t)\sum_{0<\|k\|<2b} a_k(t,x)\,\partial_x^k u(t,x)+\Delta_{t,x}^{\theta,y}a_0(t,x)\,u(t,x), \qquad (32_1)$$

$$F_2^{(\theta,y)}(t,x)\equiv \beta(t)\sum_{\|k\|=2b}\Delta_{t,x}^{\theta,y}a_k(t,x)\,\partial_x^k u(t,x). \qquad (32_2)$$

Зображення (30) одержуємо аналогічно, як (17), за допомогою леми 3. З припущень теореми та оцінок (29) випливає, що $F_1^{(\theta,y)}\in C_{0,0}^{\gamma,0}$ для будь-якої фіксованої точки $(\theta,y)\in\Pi_{(0,T]}$, а тому на підставі леми 2 функції $u_1^{(k)}(t,x)\equiv$ $\equiv \partial_x^k u_1(t,x;\theta,y)\big|_{(\theta,y)=(t,x)}$, $(t,x)\in\Pi_{(0,T]}$, належать до просторів $C_{0,0}^{\gamma_1,\gamma_1/(2b)}$, $0<\|k\|\le 2b$. За допомогою (13), (28) і (32_1), маємо

$$\|u_1\|_{U_0^{\gamma,\gamma_1}} \le C\big(\|\varphi\|^{2b+\gamma}+\|f\|_{0,0}^{\gamma,0}\big). \qquad (33)$$

Обґрунтування можливості диференціювання другого доданка з (30) проводиться безпосередньо. При цьому для молодших похідних справджуються формули, які одержуються з (19_2) заміною $u_2(t,x;y)$, $G(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot;y)$, $f_2^{(y)}(\cdot,\cdot)$ на $u_2(t,x;\theta,y)$, $G_0(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot;\theta,y)$, $F_2^{(\theta,y)}(\cdot,\cdot)$ відповідно.

Похідні $\partial_x^k u_2(\cdot,\cdot;\theta,y)$, $\|k\|=2b$, існують у точці $(t,x)=(\theta,y)$ і визначаються формулами

$$\partial_x^k u_2(t,x;\theta,y)\big|_{(t,x)=(\theta,y)} = \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k G_0(t,x;\tau,\xi;\theta,y)\big|_{(t,x)=(\theta,y)}\times$$

$$\times\Big(\beta(\tau)\sum_{\|k\|=2b}\Delta_{\tau,\xi}^{\theta,y}a_k(\tau,\xi)\partial_x^k u(\tau,\xi)\Big)d\xi, \quad (\theta,y)\in\Pi_{(0,T]}, \quad \|k\|=2b. \quad (34)$$

Оцінимо прирости похідних $u_2^{(k)}(t,x)\equiv \partial_x^k u_2(t,x;\theta,y)\big|_{(\theta,y)=(t,x)}$, $(t,x)\in$ $\in\Pi_{(0,T]}$, $0<|k|\le 2b$.

Зауважимо, що справджуються оцінки

$$\big|u_2^{(k)}(t,x)\big|\le C\,\Psi(t,x)\big(B(t,0)\big)^{(2b-|k|+\gamma)/(2b)}\|u\|_{U_0^{0,0}},$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \qquad 0<|k|\le 2b. \qquad (35)$$

Коли $p_0^{2b}\ge B(t,0)$, то за допомогою (35) одержуємо

$$\big|\Delta_x^{x'}u_2^{(k)}(t,x)\big|\le\big|u_2^{(k)}(t,x)\big|+\big|u_2^{(k)}(t,x')\big|\le$$

$$\le C\| u \|_{U_0^{0,0}} \left(B(t,0)\right)^{(2b-\|k\|+\gamma)/(2b)} \left(\Psi(t,x)+\Psi(t,x')\right) \le$$

$$\le C\| u \|_{U_0^{0,0}} \, p_0^{\gamma}\left(\Psi(t,x)+\Psi(t,x')\right), \qquad 0<\| k \| \le 2b. \tag{36}$$

Нехай $p_0^{2b} < B(t,0)$ і число t_0 є таким, що $B(t,t_0) = p_0^{2b}$. На підставі (34) запишемо зображення

$$\Delta_x^{x'} u_2^{(k)}(t,x) =$$

$$= \int_0^{t_0} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\Delta_x^{x'} \partial_x^k G_0(t,x;\tau,\xi;\theta,y) F_2^{(\theta,y)}(\tau,\xi) \right)\Big|_{(\theta,y)=(t,x)} d\xi \, +$$

$$+ \int_0^{t_0} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\Delta_x^{x'} \partial_y^k G_0(\theta,y;\tau,\xi;t,x) \right)\Big|_{(\theta,y)=(t,x)} F_2^{(t,x)}(\tau,\xi)\, d\xi \, +$$

$$+ \int_0^{t_0} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\partial_{x'}^k \, G_0(t,x';\tau,\xi;\theta,y;) \right)\Big|_{(\theta,y)=(t,x')} \Delta_x^{x'} F_2^{(t,x)}(\tau,\xi)\, d\xi \, +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\partial_x^k G_0(t,x;\tau,\xi;\theta,y) F_2^{(\theta,y)}(\tau,\xi) \right)\Big|_{(\theta,y)=(t,x)} d\xi \, -$$

$$- \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\partial_{x'}^k \, G_0(t,x';\tau,\xi;\theta,y) F_2^{(\theta,y)}(\tau,\xi) \right)\Big|_{(\theta,y)=(t,x)} d\xi. \tag{37}$$

Оцінюючи інтеграли з (37), отримуємо оцінки

$$\left| \Delta_x^{x'} u_2^{(k)}(t,x) \right| \le C p_0^{\gamma} \, \|u\|_{U_0^{0,0}} \left(\Psi(t,x)+\Psi(t,x')\right), \qquad \|k\| = 2b. \tag{38}$$

Зі співвідношень (30), (32_2), (33), (36) і (38) випливає, що $F_2^{(\theta,y)} \in C_{1,0}^{\gamma_1,0}$. На підставі леми 2 одержимо, що $u_2^{(k)}$ належить до простору $C_{0,0}^{\gamma_1,\gamma_1/(2b)}$ для $\| k \| = 2b$ і справджуються оцінки (12), у яких v_k замінено на $u_2^{(k)}$, а f – на $F_2^{(t,x)}$. Отже, $u_2 \in U_0^{\gamma,\gamma_1}$ і

$$\| u_2 \|_{U_0^{\gamma,\gamma_1}} \le C\left(\| \varphi \|^{2b+\gamma} + \| f \|_{0,0}^{\gamma,0} \right). \tag{39}$$

Зі співвідношень (30), (33) і (39) випливає, що $u \in U_0^{\gamma,\gamma_1}$ і справджується оцінка (15). Теорему доведено. ◊

1. *Березан Л. П.* Деякі властивості фундаментальної матриці розв’язків задачі Коші для $\vec{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2000. – Вип. 76. – С. 5–10.
2. *Березан Л. П.* Інтегральне зображення розв’язків узагальненої задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $\vec{2b}$-параболічної системи // Наук. вісник Чернів. ун-ту. Математика. – 1999. – Вип. 46. – С. 13–18.
3. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Фундаментальна матриця розв’язків задачі Коші для $\vec{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 7–12.

4. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. АН України. – 1994. – № 6. – С. 7–11.
5. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д.* Фундаментальні матриці розв'язків параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині / Чернів. ун-т. – Чернівці, 1995. – 51 с. – Деп. в ДНТБ України 12.07.95, № 1808-Ук95.
6. *Ивасишен С. Д.* Интегральное представление и начальные значения решений $\vec{2b}$-параболических систем // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 4. – С. 500–506.
7. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\vec{2b}$-параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1968. – Вып. 1. – С. 3–175.
8. *Мединський І. П.* Про апріорні оцінки розв'язків параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 2000. – № 407. – С. 185–194.
9. *Мединський І. П.* Про властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 1999. – № 364. – С. 298–307.
10. *Мединський І. П., Івасишен С. Д.* Властивості інтегралів типу похідних від об'ємних потенціалів для $\vec{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 4. – С. 76–86.
11. *Мединський І. П., Івасишен С. Д.* Про коректну розв'язність параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2000. – Вип. 76. – С. 71–76.
12. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – Москва: Наука, 1964. – 443 с.
13. *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* Properties of integrals which have the type of derivatives of volume potentials for parabolic systems with degenerations on the initial hyperplane // Мат. студії. – 2000. – **13**, № 1. – С. 33–46.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ $\vec{2b}$-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ВЫРОЖДЕНИЕМ НА НАЧАЛЬНОЙ ГИПЕРПЛОСКОСТИ

Доказана теорема о повышении гладкости и априорных оценках решений задачи Коши для линейной $\vec{2b}$–параболической системы уравнений, которая имеет слабое вырождение на начальной гиперплоскости.

CAUCHY PROBLEM FOR $\vec{2b}$-PARABOLIC SYSTEMS WITH DEGENERATION ON INITIAL HYPERPLANE

The theorem on increase of smoothness and a priori estimations of solutions to Cauchy problem for linear $\vec{2b}$-parabolic system of equations, having weak degeneration on initial hyperplane, is set.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано 01.08.03