УДК 517.9

М. М. Притула, О. В. Воробйова

ПОБУДОВА ЗВ'ЯЗНОСТІ КАРТАНА ТА АСОЦІЙОВАНИХ НЕЛОКАЛЬНИХ СКІНЧЕННОВИМІРНИХ РЕДУКЦІЙ НА ІНТЕГРАЛЬНОМУ ДЖЕТ-ПІДМНОГОВИДІ ДЛЯ ІНВЕРСНОЇ МОДИФІКОВАНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРІЗА

На основі диференціально-геометричної теорії Картана побудовано систему рівнянь паралельного перенесення (зв'язності) на приєднаному розшаруванні до джет-підмноговиду для інверсної модифікованої системи Кортевега – де Фріза. Досліджено ієрархію асоційованих скінченновимірних нелокальних редукцій цієї системи, встановлено їх гамільтоновість і повну інтегровність за Ліувіллем.

Вступ. Як відомо з результатів досліджень, цілком інтегровні гамільтонові системи на гладких функціональних многовидах допускають у багатьох випадках скінченновимірні інваріантні симплектичні підмноговиди, редукція на які є еквівалентною певним цілком інтегровним гамільтоновим системам. Зокрема, таку властивість мають цілком інтегровні за Лаксом гамільтонові системи на функціональних многовидах. Ґрунтуючись на диференціально-геометричній теорії Картана існування так званих геометричних об'єктів, транзитивно інваріантних відносно дії певної групи Лі, постала задача опису певного класу інтегровних за Лаксом динамічних систем як певних геометричних об'єктів у сенсі Картана, реалізованих за допомогою інтегрального підмноговиду деякого цілком інтегровного ідеалу в алгебрі Ґрасмана диференціальних форм на асоційованому з динамічною системою джет-підмноговиді. Розв'язок такої задачі дає можливість будувати ефективно рівняння паралельного перенесення для асоційованої зв'язності на відповідному головному розшаруванні та інтерпретувати їх як зображення типу Лакса для вихідної динамічної системи на джет-підмноговиді. У застосуванні цих результатів до динамічної інверсної модифікованої системи Кортевега – де Фріза встановлено її нове нестандартне матричне зображення типу Лакса, яке дало можливість побудувати нескінченну ієрархію її скінченновимірних редукцій на спеціальні нелокальні скінченновимірні інваріантні підмноговиди та довести їх повну інтегровність за Ліувіллем. Перейдемо до дослідження такої задачі.

1. Розглянемо інверсну модифіковану систему Кортевега – де Фріза на функціональному многовиді $M \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{R}^3)$:

$$w_t = \left\{\begin{aligned} u_t &= v \\ p_t &= u_x + u^2 v \\ v_t &= p \end{aligned}\right\} = K[u,p,v], \tag{1}$$

де $w = (u,p,v)^\top \in M$; $t \in \mathbb{R}_+$ – еволюційний параметр; «$\top$» – символ транспонування.

Потік (1) на M можна переписати через множину 2-форм $\{\alpha\} \subset \Lambda^2(J(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^3))$ на приєднаному джет-підмноговиді $J(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^3)$ таким чином:

$$\begin{aligned}\{\alpha\} = \{\alpha_1^{(2)} &:= du^{(0)} \wedge dx + v^{(0)} dx \wedge dt\,;\\ \alpha_2^{(2)} &:= dp^{(0)} \wedge dx + du^{(0)} \wedge dt - (u^{(0)})^2 du^{(0)} \wedge dx\,;\\ \alpha_3^{(2)} &:= dv^{(0)} \wedge dx + p^{(0)} dx \wedge dt :\\ &\qquad (x,\ t,\ u^{(0)},\ p^{(0)},\ v^{(0)})^\top \in M^5 \subset J(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^3)\}\,,\end{aligned} \tag{2}$$

де M^5 − деякий скінченновимірний підмноговид $J(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^3)$ з локальними координатами $(x,\ t,\ u^{(0)}=u,\ p^{(0)}=p,\ v^{(0)}=v)$; «$\wedge$» − символ операції зовнішнього множення в алгебрі Ґрасмана $\Lambda(M)$. Множина 2-форм (2) генерує ідеал $I(\alpha)\subset\Lambda(J)$, який є інтегровним з огляду на його замкненість, $dI(\alpha)\subset I(\alpha)$, тобто

$$d\alpha_1^{(2)}=\alpha_3^{(2)}\wedge dt,\quad d\alpha_2^{(2)}=0,\quad d\alpha_3^{(2)}=\alpha_2^{(2)}\wedge dt+(u^{(0)})^2\alpha_1^{(2)}\wedge dt\,.$$

Отже, ідеал $I(\alpha)$ є інтегровним за Картаном − Фробеніусом (що випливає із теореми Картана) [5], а інтегральний підмноговид $M_\alpha^2=\{x,\ t\in\mathbb{R}^2\}\subset M^5$ визначається локально умовою $I(\alpha)=0$.

Будемо шукати редуковану 1-форму «зв'язності» $\Gamma\in\Lambda(M^5)\otimes\mathcal{G}$, що належить до деякої ще не визначеної алгебри Лі $\mathcal{G}$ структурної групи G і задовольняє співвідношення

$$\Omega=d\Gamma+\Gamma\wedge\Gamma\in I(\alpha)\otimes\mathcal{G}. \tag{3}$$

Цю 1-форму можна зобразити, використовуючи (2), таким чином:

$$\Gamma:=b^{(x)}(u^{(0)},p^{(0)},v^{(0)};\lambda)\,dx+b^{(t)}(u^{(0)},p^{(0)},v^{(0)};\lambda)\,dt\,, \tag{4}$$

де елементи $b^{(x)},\ b^{(t)}\in\mathcal{G}$ задовольняють такі рівняння, породжені (3):

$$\begin{aligned}\Omega\equiv{}&\frac{\partial b^{(x)}}{\partial u^{(0)}}du^{(0)}\wedge dx+\frac{\partial b^{(x)}}{\partial p^{(0)}}dp^{(0)}\wedge dx+\frac{\partial b^{(x)}}{\partial v^{(0)}}dv^{(0)}\wedge dx+\\&+\frac{\partial b^{(t)}}{\partial u^{(0)}}du^{(0)}\wedge dt+\frac{\partial b^{(t)}}{\partial p^{(0)}}dp^{(0)}\wedge dt+\frac{\partial b^{(t)}}{\partial v^{(0)}}dv^{(0)}\wedge dt+\\&+\left[b^{(x)},b^{(t)}\right]dx\wedge dt=g_1(du^{(0)}\wedge dx+v^{(0)}dx\wedge dt)+\\&-g_2(dp^{(0)}\wedge dx+du^{(0)}\wedge dt-(u^{(0)})^2du^{(0)}\wedge dx)+\\&+g_3(dv^{(0)}\wedge dx+p^{(0)}dx\wedge dt)\in I(\alpha)\otimes\mathcal{G}\end{aligned} \tag{5}$$

для деяких $\mathcal{G}$ -значних функцій g_1,g_2,g_3 на M.

З рівності (5) знаходимо, що

$$\begin{aligned}&\frac{\partial b^{(x)}}{\partial u^{(0)}}=g_1-(u^{(0)})^2g_2,\qquad\frac{\partial b^{(x)}}{\partial p^{(0)}}=g_2,\qquad\frac{\partial b^{(x)}}{\partial v^{(0)}}=g_3,\\&\frac{\partial b^{(t)}}{\partial u^{(0)}}=g_2,\quad\frac{\partial b^{(t)}}{\partial p^{(0)}}=0,\quad\frac{\partial b^{(t)}}{\partial v^{(0)}}=0,\quad\left[b^{(x)},b^{(t)}\right]=g_1v^{(0)}+g_3p^{(0)}.\end{aligned} \tag{6}$$

Зі співвідношень (6) вилученням функцій g_1,g_2,g_3 отримаємо умови для знаходження $b^{(x)}(u^{(0)},\ p^{(0)},\ v^{(0)};\lambda),\ \ b^{(t)}(u^{(0)},\ p^{(0)},\ v^{(0)};\lambda)$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial b^{(x)}}{\partial p^{(0)}}=\frac{\partial b^{(t)}}{\partial u^{(0)}},\qquad\frac{\partial b^{(t)}}{\partial p^{(0)}}=0,\qquad\frac{\partial b^{(t)}}{\partial v^{(0)}},\\&\left[b^{(x)},b^{(t)}\right]=v^{(0)}\frac{\partial b^{(x)}}{\partial u^{(0)}}+(u^{(0)})^2v^{(0)}\frac{\partial b^{(x)}}{\partial p^{(0)}}+p^{(0)}\frac{\partial b^{(x)}}{\partial v^{(0)}}.\end{aligned} \tag{7}$$

Розв'язуючи (7) у явному вигляді, отримуємо розклади

$$b^{(t)}=A_0+A_1u^{(0)},$$

$$b^{(x)} = [[A_1, A_0], A_0]\,u^{(0)} + [[A_1, A_0], A_1]\,\frac{(u^{(0)})^2}{2} -$$

$$- A_1\,\frac{(u^{(0)})^3}{3} + A_1 p^{(0)} + [A_1,\ A_0]\,v^{(0)} + A_2\,, \tag{8}$$

де $A_j \in \mathcal{G},\ j = \overline{0,2}$, − деякі елементи на M алгебри Лі $\mathcal{G}$, які задовольняють такі рівняння:

$$[A_0, A_2] = 0\,,$$

$$[[[A_1, A_0], A_0], A_0] + [A_2, A_1] = 0\,,$$

$$\frac{1}{2}[[[A_1, A_0], A_1], A_1] - \frac{1}{3}[[[A_1, A_0], A_1], A_0] = 0\,,$$

$$[[[A_1, A_0], A_0], A_1] + \frac{1}{2}[[[A_1, A_0], A_1], A_0] = 0\,. \tag{9}$$

Із (9) випливає, що 2-форма кривизни

$$\Omega \in \operatorname{span}\{A_1,\ [A_0, A_1],\ [[A_1, A_0], A_1] : A_j \in J,\ j = \overline{0,1}\}.$$

Отже, щоб редукувати за допомогою теореми Амброуза − Зінгера [5] асоційований головний розшарований простір $P(M; G = \mathrm{GL}(n))$ до головного розшарування $P(M; G(h))$, де $G(h) \subset G$ є відповідною голономною групою Лі зв'язностей Γ на P, потрібно виконати умову, щоб множина $\mathcal{G}(h) \subset \mathcal{G}$ була підалгеброю Лі в $\mathcal{G} : \nabla_x^{(m)} \nabla_t^{(n)} \Omega \in \mathcal{G}(h)$ для всіх $m, n \in \mathbb{Z}_+$. Тут ∇_x, $\nabla_t : \Lambda(M) \to \Lambda(M)$ − коваріантні похідні, $\nabla_x := \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma(b^{(x)})$, $\nabla_t := \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma(b^{(t)})$. Щоб завершити описану вище процедуру, вимагаємо, щоб

$$\mathcal{G}(h) = \mathcal{G}(h)_0 := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\nabla_x^{(m)} \nabla_t^{(n)}\, \Omega \in \mathcal{G} : m + n = 0\}.$$

Це означає, що

$$\mathcal{G}(h)_0 = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{A_1,\ A_3 = [A_0, A_1],\ A_4 = [[A_1, A_0], A_1]\}. \tag{10}$$

Для того щоб задовольнялися співвідношення (9), розширимо базис (10) зовнішніми елементами $A_0, A_2 \in \mathcal{G}(h)$:

$$A_0 = g_{01}A_1 + g_{03}A_3 + g_{04}A_4\,,$$

$$A_2 = g_{21}A_1 + g_{23}A_3 + g_{24}A_4\,. \tag{11}$$

Підставляючи розширення (11) у (9), отримуємо, що

$$q_{21} = q_{23} = 0, \qquad q_{24} = -6\lambda^2, \qquad q_{01} = q_{03} = 0, \qquad q_{04} = -\frac{3}{2},$$

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad A_3 = \begin{Vmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3}\lambda \\ \frac{\sqrt{6}}{3}\lambda & 0 \end{Vmatrix}, \qquad A_4 = \begin{Vmatrix} -\frac{2}{3}\lambda & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\lambda \end{Vmatrix},$$

$$A_0 = \begin{Vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{Vmatrix}, \qquad A_2 = \begin{Vmatrix} 4\lambda^3 & 0 \\ 0 & -4\lambda^3 \end{Vmatrix}.$$

для деяких довільних дійсних параметрів $\lambda \in \mathbb{R}$.

Тоді з (8) отримуємо

$$b^{(t)} = \left\| \begin{matrix} \lambda & \frac{1}{\sqrt{6}}u \\ \frac{1}{\sqrt{6}}u & -\lambda \end{matrix} \right\|,$$

$$b^{(x)} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} -\frac{1}{3}\lambda u^2 + 4\lambda^3 & \frac{2\sqrt{6}}{3}\lambda^2 u - \frac{\sqrt{6}}{18}u^3 + \frac{\sqrt{6}}{6}p - \frac{\sqrt{6}}{3}\lambda v \\ \frac{2\sqrt{6}}{3}\lambda^2 u - \frac{\sqrt{6}}{18}u^3 + \frac{\sqrt{6}}{6}p + \frac{\sqrt{6}}{3}\lambda v & \frac{1}{3}\lambda u^2 - 4\lambda^3 \end{matrix} \right\|. \qquad (12)$$

Відповідно узгоджені для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ рівняння паралельного перенесення на асоційованому розшаруванні $P(M,G;\mathbb{C}^2)$ мають вигляд $dy + \Gamma_\lambda y = 0$, де $y \in \mathbb{C}^2$, $G = \mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$, причому 2-форма кривизни $\Omega^{(2)} \in \Lambda^2(J)$ тотожно анулюється на інтегральному підмноговиді M_α^2.

2. Сформулюємо асоційовану зі зв'язністю (4) лінійну узагальнену задачу на власні значення для диференціального виразу

$$dy/dx = l[u,p,v;\lambda]\,y \qquad (13)$$

у просторі функцій $L_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)$, де за означенням $l[u,p,v;\lambda] = -\,b^{(x)}[u,p,v;\lambda]$ і $\lambda \in \mathbb{C}$ – відповідний спектральний параметр. Співвідношення (13) є сумісним на множині розв'язків динамічної системи (1) за Лаксом з лінійним рівнянням

$$dy/dt = p(l)\,y\,, \qquad (13')$$

де $p(l) = -\,b^{(t)}[u,p,v;\lambda]$. Будемо також вважати, що на інтегральному підмноговиді M_α^2 відповідні функції $(u,p,v): M_\alpha^2 \to \mathbb{R}^3$ є гладкими і 2π-періодичними щодо змінних $x,\ t \in \mathbb{R}$, тобто підмноговид M_α^2 є зв'язним компактним підмноговидом у $J(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^3)$, дифеоморфним тору $\mathbb{T}^2$. На основі загальної теорії [3] спектральних задач типу (13) можна знайти власні функції виразу (13) як власні вектори відповідної матриці монодромії $S(x;\lambda)$, $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, із власними значеннями ± 1. Нехай $\sigma_r(l) = \{\lambda_j \in \mathbb{R} : j = \overline{1,n}\}$ – дійсна частина узагальненого спектра $\sigma(l)$ періодичної задачі

$$dy_j/dx = l[u,p,v;\lambda_j]\,y_j, \quad y_j(x+2\pi) = y_j(x), \quad x \in \mathbb{R},\ j = \overline{1,N}, \qquad (14)$$

якому відповідає набір 2π-періодичних власних функцій $y_j \in L_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)$, $j = \overline{1,N}$, де $N \in \mathbb{Z}_+$ – деяке фіксоване число. З умови узгодженості зв'язності (4) на підмноговиді M_α^2 для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ випливає, що узагальнені власні значення $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1,N}$, розглядувані як гладкі за Фреше функціонали на просторі функцій $M \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{R}^3)$, є інваріантними відносно еволюційного параметра $t \in \mathbb{R}$, тобто $d\lambda_j/dt = 0$ для всіх $j = \overline{1,N}$. Це дає можливість за допомогою теорії редукції Новикова – Богоявленського [1, 2] розглянути інваріантні скінченновимірні підмноговиди на M та відповідні динамічні системи на них, асоційовані з вихідною інверсною модифікованою динамічною системою типу Кортевега – де Фріза (1). Теорія скінченновимірних редукцій на інваріантні підмноговиди може бути узагальнена на випадок, коли система (1) має також нелокальні консервативні закони збереження, наприклад, власні значення відповідної спектральної задачі типу Лакса. Тоді розширена функція Лагранжа $\mathcal{L}$, яка містить ці власні значення, буде вже нелокальним функціоналом на нескінченновимірному функціональному многовиді M, залежним від відповідних нелокальних функціоналів. Тому природно розглядати так звану задачу нелокальної редукції [6, 9, 10] системи (1) на відповідні критичні точки нелокального функціонала Лагранжа $\mathcal{L}$. Для того щоб ефективно розв'язати цю задачу, застосовують метод розширення фазового простору. Тобто вихідний фазовий простір M розширюють новими фазовими просторовими змінними, які містять згадані вище власні функції і їх приєднані. Як наслідок отримуємо новий «нелокальний» фазовий простір M, стосовно до якого функціонал Лагранжа $\mathcal{L}$ буде вже локальним функціоналом на M. Встановлено, що такі інваріантні скінченновимірні підмноговиди розв'язків мають симплектичну структуру, а векторні поля d/dx і d/dt, породжені на многовиді M нелінійною динамічною системою, є гамільтоновими на них відносно цієї симплектичної структури.

3. Застосуємо згаданий метод редукції [6, 9, 10] для системи (1), яка у бігамільтоновій формі має вигляд

$$w_t = -\vartheta \operatorname{grad}\gamma_{j+1} = -\eta \operatorname{grad}\gamma_j ,$$

де $w = (u,p,v)^\top$; $\gamma_j \in D(M)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, − нескінченна послідовність інволютивних законів збереження ($D(M)$ − простір гладких за Фреше функціоналів на M):

$$\gamma_1 = \int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{3}up - \frac{1}{3}v^2 - \frac{1}{6}u^4\right)dx, \qquad \gamma_2 = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{7}{3}uu_x\right)dx,$$

$$\gamma_3 = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{27}u^6 - \frac{2}{9}u^3p - \frac{2}{3}u_xv + \frac{1}{3}p^2\right)dx, \quad \ldots,$$

а ϑ, η − пара узгоджених за Маґрі [3] імплектичних операторів

$$\vartheta = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \partial & -u^2 \\ 1 & u^2 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \eta = \begin{Vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{Vmatrix},$$

де

$$\eta_{11} = -4v\partial^{-1}v,$$

$$\eta_{12} = 4v\partial^{-1}u\partial - 4v\partial^{-1}u^2v - 6\partial,$$

$$\eta_{13} = 2u^2 - 4v\partial^{-1}p,$$

$$\eta_{21} = -4\partial u\partial^{-1}v - 4u^2v\partial^{-1}v - 6\partial,$$

$$\eta_{22} = 4\partial u\partial^{-1}u\partial - 6u^2\partial - 6\partial u^2 - 4u^2v\partial^{-1}u^2v + 4u^2v\partial^{-1}u\partial - 4\partial u\partial^{-1}u^2v,$$

$$\eta_{23} = 2u^4 - 4\partial u\partial^{-1}p - 4u^2v\partial^{-1}p,$$

$$\eta_{31} = 2u^2 - 4p\,\partial^{-1}v,$$

$$\eta_{32} = -2u^4 + 4p\,\partial^{-1}u\partial - 4p\,\partial^{-1}u^2v,$$

$$\eta_{33} = 6\partial - 4p\,\partial^{-1}u\partial.$$

Дослідимо диференціально-геометричні властивості інваріантного підмноговиду $M_N \subset M$ динамічної системи (1):

$$M_N := \{(u,p,v) \in M : \operatorname{grad} \mathcal{L}_N[u,p,v] = 0\}, \tag{15}$$

де згідно з означенням функціонал Лагранжа $\mathcal{L}_N$ на M має вигляд

$$\mathcal{L}_N := -\frac{3}{2}\gamma_1 + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j .$$

Оскільки функціонал $\gamma_1 \in D(M)$ є теж інваріантом динамічної системи (1) на M, то для підмноговиду M_N справджується така лема.

Лема. *Підмноговид* (15) *є інваріантним щодо динамічної системи* (1), *заданої на* M.

Д о в е д е н н я. Оскільки згідно з теоремою Лакса [3] підмноговид M_N складається із критичних точок інваріантного функціонала $\mathcal{L}_N \in D(M)$, то величина $\varphi := \operatorname{grad} \mathcal{L}_N \in T^*(M)$ задовольняє для всіх $t \in \mathbb{R}$ лінійне рівняння

$$d\varphi/dt + K'^*[w]\cdot\varphi = 0 \tag{16}$$

для будь-якої точки $w = (u,p,v)^\top \in M$. Покладаючи тепер $(u_0,p_0,v_0) = = w_0 \in M_N$, знаходимо, що, коли $\varphi = 0$ при $t = 0$, то на підставі лінійності рівняння (16) $\varphi \equiv 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Це означає, що $\varphi = \operatorname{grad}\mathcal{L}_N \equiv 0$ вздовж орбіт динамічної системи (1), тобто елемент $w(t;w_0) \in M_N$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, що й доводить лему. ◊

Отже, завдяки інваріантності підмноговиду $M_N \subset M$ можемо редукувати векторне поле (1) на підмноговид M_N, до якого воно є дотичним. Результуюче векторне поле $K_N[w] \in T(M_N)$ буде, очевидно, скінченновимірним потоком на M_N, який допускає канонічний запис як система звичайних нелінійних диференціальних рівнянь у термінах відповідних координатних функцій на M_N. Їх описом, а також знаходженням їх явних виразів і займемося далі.

При побудові підмноговиду M_N (15) необхідно отримати величини $\operatorname{grad}\lambda_j \in T^*(M)$, $j = \overline{1,N}$, як нелокальні функціонали. З цією метою розглянемо нелокальне розширення фазового простору за допомогою координат $(y_{1,j}, y^*_{1,j}, y_{2,j}, y^*_{2,j}) \in W_2^1$, $j = \overline{1,N}$, де $(y_{1,j}, y^*_{1,j})^\top$, $(y_{2,j}, y^*_{2,j})^\top$, $j = \overline{1,N}$, − відповідні періодичні власні функції матриці монодромії $S(x;\lambda)$ задачі (14). Покладаючи тепер так обчислений функціонал $\operatorname{Sp} S(x;\lambda) = \Delta(\lambda)$, який є породжуючим функціоналом для законів збереження динамічної системи (1), можемо знайти нормуючі коефіцієнти

$$\xi(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_j} = \operatorname{Sp}\int_0^{2\pi} S(x;\lambda)\frac{d}{d\lambda} l[u,p,v;\lambda]\Big|_{\lambda=\lambda_j} dx$$

відповідних нелокальних законів збереження. Матриця $S(x;\lambda)$, як відомо [2, 4], допускає зображення у вигляді $S(x;\lambda) = YC(\lambda)Y^{-1}$ із деякою сталою матрицею $C(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, де $Y = \begin{Vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^* & y_2^* \end{Vmatrix}$. Покладаючи для зручності $C(\lambda) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$, отримуємо нормуючі функціонали

$$\xi(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_j} = \mathrm{Sp}\int_0^{2\pi} S(x;\lambda)\frac{d}{d\lambda}l[u,p,v;\lambda]\Big|_{\lambda=\lambda_j}dx =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big[2(y_{1,j}y_{2,j}^* + y_{1,j}^*y_{2,j})\Big(12\lambda^2 - \frac{1}{3}u^2\Big) + 2y_{1,j}y_{2,j}\Big(-\frac{4\sqrt{6}}{3}\lambda u - \frac{\sqrt{6}}{3}v\Big) -$$

$$- 2y_{1,j}^*y_{2,j}^*\Big(-\frac{4\sqrt{6}}{3}\lambda u + \frac{\sqrt{6}}{3}v\Big)\Big]dx\,, \tag{17}$$

які є визначальними для побудови нелокальних функціоналів $\lambda_j = \lambda_j[u,p,v,y_{1,j},y_{1,j}^*,y_{2,j},y_{2,j}^*]$, $j=\overline{1,N}$, на вже розширеному просторі $\overline{M}_N$. З цією метою запишемо систему (13) у явному вигляді для лінійно незалежної пари розв'язків $(y_{1,j},y_{1,j}^*)^\top$, $(y_{2,j},y_{2,j}^*)^\top$:

$$y_{1,x} = \Big(\frac{1}{3}\lambda u^2 - 4\lambda^3\Big)y_1 + \Big(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\lambda^2u + \frac{\sqrt{6}}{18}u^3 - \frac{\sqrt{6}}{6}p + \frac{\sqrt{6}}{3}\lambda v\Big)y_1^*,$$

$$y_{1,x}^* = \Big(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\lambda^2u + \frac{\sqrt{6}}{18}u^3 - \frac{\sqrt{6}}{6}p - \frac{\sqrt{6}}{3}\lambda v\Big)y_1 + \Big(-\frac{1}{3}\lambda u^2 + 4\lambda^3\Big)y_1^*,$$

$$y_{2,x} = \Big(\frac{1}{3}\lambda u^2 - 4\lambda^3\Big)y_2 + \Big(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\lambda^2u + \frac{\sqrt{6}}{18}u^3 - \frac{\sqrt{6}}{6}p + \frac{\sqrt{6}}{3}\lambda v\Big)y_2^*,$$

$$y_{2,x}^* = \Big(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\lambda^2u + \frac{\sqrt{6}}{18}u^3 - \frac{\sqrt{6}}{6}p - \frac{\sqrt{6}}{3}\lambda v\Big)y_2 + \Big(-\frac{1}{3}\lambda u^2 + 4\lambda^3\Big)y_2^*. \tag{18}$$

Помноживши у системі (18) перше рівняння на y_2^*, друге – на $(-y_2)$, третє – на y_1^* і четверте – на $(-y_1)$, додамо їх почленно та проінтегруємо по періоду, отримаємо

$$\int_0^{2\pi}(y_{1,x}y_2^* - y_2y_{1,x}^* + y_{2,x}y_1^* - y_1y_{2,x}^*)\,dx = \int_0^{2\pi}\Big[2\Big(\frac{1}{3}\lambda u^2 -$$

$$- 4\lambda^3\Big)(y_1y_2^* + y_2y_1^*) + 2\Big(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\lambda^2u + \frac{\sqrt{6}}{18}u^3 - \frac{\sqrt{6}}{6}p + \frac{\sqrt{6}}{3}\lambda v\Big)y_1^*y_2^* +$$

$$+ 2\Big(\frac{2\sqrt{6}}{3}\lambda^2u - \frac{\sqrt{6}}{18}u^3 + \frac{\sqrt{6}}{6}p + \frac{\sqrt{6}}{3}\lambda v\Big)y_1y_2\Big]dx. \tag{19}$$

Оскільки $\xi(\lambda)$ в (17) є інваріантом за означенням, то з рівності (19) отримуємо

$$\lambda\frac{\xi(\lambda)}{2} = \int_0^{2\pi}\Big[-y_{1,x}y_2^* + y_2y_{1,x}^* - y_{2,x}y_1^* + y_1y_{2,x}^* + 8\lambda^3(y_1y_2^* + y_2y_1^*) +$$

$$+\Big(\frac{2\sqrt{6}}{3}\lambda^2u + \frac{\sqrt{6}}{18}u^3 - \frac{\sqrt{6}}{6}p\Big)y_1^*y_2^* +$$

$$+\Big(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\lambda^2u - \frac{\sqrt{6}}{18}u^3 + \frac{\sqrt{6}}{6}p\Big)y_1y_2\Big]dx. \tag{20}$$

Враховуючи, що функціонали $\xi(\lambda_j)$, $j=\overline{1,N}$, є інваріантами динамічної системи (1), можна їх нормувати одиницею, тобто покласти $\tilde{\xi}(\lambda_j) = \dfrac{\xi(\lambda_j)}{2} \equiv$ $\equiv 1,\ j = \overline{1, N}$. Тоді з (20) отримаємо

$$\lambda_j = \int_0^{2\pi} \Big[- y_{(1,j)x} y_{2,j}^* + y_{2,j} y_{(1,j)x}^* - y_{(2,j)x} y_{1,j}^* + y_{1,j} y_{(2,j)x}^* + \\ + 8\lambda_j^3 \left(y_{1,j} y_{2,j}^* + y_{2,j} y_{1,j}^* \right) + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3} \lambda_j^2 u + \frac{\sqrt{6}}{18} u^3 - \frac{\sqrt{6}}{6} p \right) y_{1,j}^* y_{2,j}^* + \\ + \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3} \lambda_j^2 u - \frac{\sqrt{6}}{18} u^3 + \frac{\sqrt{6}}{6} p \right) y_{1,j} y_{2,j} \Big] dx. \tag{21}$$

4. Користуючись явним виразом (21) для функціоналів $\lambda_j \in D(M)$, $j = \overline{1, N}$, знаходимо, що

$$\operatorname{grad}(\lambda_j) = \left(\left(\frac{2\sqrt{6}}{3} \lambda_j^2 + \frac{\sqrt{6}}{16} u^2 \right) (y_{1,j}^* y_{2,j}^* - y_{1,j} y_{2,j}), \right. \\ \left. -\frac{\sqrt{6}}{6} (y_{1,j}^* y_{2,j}^* - y_{1,j} y_{2,j}),\ 0 \right)^\top \in T^*(M). \tag{22}$$

Тепер підмноговид (15) можна записати так:

$$M_N = \left\{ (u, p, v)^\top \in M : p - u^3 = \sum_{j=1}^N \left(\frac{2\sqrt{6}}{3} \lambda_j^2 + \frac{\sqrt{6}}{16} u^2 \right) (y_{1,j}^* y_{2,j}^* - y_{1,j} y_{2,j}), \right. \\ \left. u = \sum_{j=1}^N -\frac{\sqrt{6}}{6} (y_{1,j}^* y_{2,j}^* - y_{1,j} y_{2,j}),\ v = 0 \right\}. \tag{23}$$

Розглянемо власні значення $\lambda_j = \lambda_j[u, p, v, y_{1,j}, y_{1,j}^*, y_{2,j}, y_{2,j}^*]$, $j = \overline{1, N}$, як нелокальні функціонали на розширеному функціональному просторі $\overline{M}_N \subset$ $\subset M \times W^N$ (тут W^N – декартів степінь порядку N простору W):

$$\overline{M}_N := \{ (u, p, v, y_{1,j}, y_{1,j}^*, y_{2,j}, y_{2,j}^*)^\top \in M \times W^N : \\ : \operatorname{grad} \overline{\mathcal{E}}_N [u, p, v, y_{1,j}, y_{1,j}^*, y_{2,j}, y_{2,j}^*] = 0 \},$$

$$\overline{\mathcal{E}}_N = -\frac{3}{2}\gamma_1 + \sum_{j=1}^N \lambda_j' + \sum_{j=1}^N s_j (\tilde{\xi}(\lambda_j) - 1),$$

$$\lambda_j' := \int_0^{2\pi} \Big[- y_{(1,j)x} y_{2,j}^* + y_{2,j} y_{(1,j)x}^* - y_{(2,j)x} y_{1,j}^* + y_{1,j} y_{(2,j)x}^* + \\ + 8\lambda_j^3 (y_{1,j} y_{2,j}^* + y_{2,j} y_{1,j}^*) + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3} \lambda_j^2 u + \frac{\sqrt{6}}{18} u^3 - \frac{\sqrt{6}}{6} p \right) y_{1,j}^* y_{2,j}^* + \\ + \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3} \lambda_j^2 u - \frac{\sqrt{6}}{18} u^3 + \frac{\sqrt{6}}{6} p \right) y_{1,j} y_{2,j} \Big] dx,$$

де $s_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, N}$, – деякі невідомі. Для знаходження s_j, $j = \overline{1, N}$, скористаємось рівністю $\operatorname{grad} \overline{\mathcal{E}}_N [u, p, v, y_{1,j}, y_{1,j}^*, y_{2,j}, y_{2,j}^*] = 0$ і рівняннями (18). Тоді при $\lambda = \lambda_j$, $j = \overline{1, N}$, одержимо

$$\frac{\delta \overline{\mathcal{L}}_N}{\delta y_{1,j}} = y^*_{(2,j)x} + 8\lambda_j^3 y^*_{2,j} + \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\lambda_j^2 u - \frac{\sqrt{6}}{18}u^3 + \frac{\sqrt{6}}{6}p\right) y_{2,j} +$$

$$+ s_j\left[y^*_{2,j}\left(12\lambda^2 - \frac{1}{3}u^2\right) + y_{2,j}\left(-\frac{4\sqrt{6}}{3}\lambda u - \frac{\sqrt{6}}{3}v\right)\right] = 0, \qquad \Rightarrow s_j = -\lambda_j\,,$$

$$\frac{\delta \overline{\mathcal{L}}_N}{\delta y_{2,j}} = y^*_{(1,j)x} + 8\lambda_j^3 y^*_{1,j} + \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\lambda_j^2 u - \frac{\sqrt{6}}{18}u^3 + \frac{\sqrt{6}}{6}p\right) y_{1,j} +$$

$$+ s_j\left[y^*_{1,j}\left(12\lambda^2 - \frac{1}{3}u^2\right) + y_{1,j}\left(-\frac{4\sqrt{6}}{3}\lambda u - \frac{\sqrt{6}}{3}v\right)\right] = 0, \qquad \Rightarrow s_j = -\lambda_j\,,$$

$$\frac{\delta \overline{\mathcal{L}}_N}{\delta y^*_{1,j}} = -y_{(2,j)x} + 8\lambda_j^3 y_{2,j} + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\lambda_j^2 u + \frac{\sqrt{6}}{18}u^3 - \frac{\sqrt{6}}{6}p\right) y^*_{2,j} +$$

$$+ s_j\left[y_{2,j}\left(12\lambda^2 - \frac{1}{3}u^2\right) - y^*_{2,j}\left(-\frac{4\sqrt{6}}{3}\lambda u + \frac{\sqrt{6}}{3}v\right)\right] = 0, \qquad \Rightarrow s_j = -\lambda_j\,,$$

$$\frac{\delta \overline{\mathcal{L}}_N}{\delta y^*_{2,j}} = -y_{(1,j)x} + 8\lambda_j^3 y_{1,j} + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\lambda_j^2 u + \frac{\sqrt{6}}{18}u^3 - \frac{\sqrt{6}}{6}p\right) y^*_{1,j} +$$

$$+ s_j\left[y_{2,j}\left(12\lambda^2 - \frac{1}{3}u^2\right) - y^*_{2,j}\left(-\frac{4\sqrt{6}}{3}\lambda u + \frac{\sqrt{6}}{3}v\right)\right] = 0, \qquad \Rightarrow s_j = -\lambda_j,\ j = \overline{1,N}\,.$$

Згідно з [9, 10] на $\overline{M}_N$ існує симплектична структура $\omega^{(2)} = d\overline{\alpha}^{(1)}$ така, що

$$d\overline{\alpha}^{(1)}/dx = d\overline{\mathcal{L}}_N[u,p,v,y_{1,j},y^*_{1,j},y_{2,j},y^*_{2,j}] -$$
$$-\left\langle \operatorname{grad}\overline{\mathcal{L}}_N[u,p,v,y_{1,j},y^*_{1,j},y_{2,j},y^*_{2,j}],\right.$$
$$\left.(du,dp,dv,dy_{1,j},dy^*_{1,j},dy_{2,j},dy^*_{2,j})^\top\right\rangle,$$

де дужками $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначено звичайний скалярний добуток дійсного простору.

На підставі вищевикладеного сформулюємо

Твердження 1. *Інваріантний скінченновимірний підмноговид* $\overline{M}_N$ *з координатами* $(y_{1,j},y^*_{1,j},y_{2,j},y^*_{2,j})^\top$, $j=\overline{1,N}$, *розширеної динамічної системи* (1), (13′) *при* $\lambda=\lambda_j$, $j=\overline{1,N}$, *має канонічну симплектичну структуру*

$$\omega^{(2)} = \sum_{j=1}^{N}(dy_{1,j}\wedge y^*_{2,j} + y_{2,j}\wedge y^*_{1,j})\,. \tag{24}$$

Покажемо, що векторні поля d/dx і d/dt мають зображення Лакса. За Діраком [7] 2-форма (24) задає також канонічну симплектичну структуру на інваріантному $2N$-вимірному підмноговиді $M_N\subset\overline{M}_N$ системи (1). В'язі (23), що визначають підмноговид $M_N\subset\overline{M}_N$, не змінюють вигляду канонічної симплектичної структури (24) на цьому інваріантному $2N$-вимірному підмноговиді.

Переконаємось, що векторні поля d/dx і d/dt, породжені інверсною динамічною системою (1) на розширеному підмноговиді $\overline{M}_N$, є гамільтоновими з відповідними гамільтоніанами $\bar{h}^{(x)}$ і $\bar{h}^{(t)}$:

$$\begin{aligned}
\bar{h}^{(x)} = &-\frac{2}{3}\sqrt{6}u\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2(y_{1,j}y_{2,j}-y_{1,j}^*y_{2,j}^*)+\frac{\sqrt{6}}{18}u^3\sum_{j=1}^{N}(y_{1,j}y_{2,j}-y_{1,j}^*y_{2,j}^*)-\\
&-\frac{1}{3}u^2\sum_{j=1}^{N}\lambda_j(y_{1,j}y_{2,j}^*+y_{2,j}y_{1,j}^*)-\frac{\sqrt{6}}{6}p\sum_{j=1}^{N}(y_{1,j}y_{2,j}-y_{1,j}^*y_{2,j}^*)-\\
&-\frac{\sqrt{6}}{3}v\sum_{j=1}^{N}\lambda_j(y_{1,j}y_{2,j}+y_{1,j}^*y_{2,j}^*)+4\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^3(y_{1,j}y_{2,j}^*+y_{2,j}y_{1,j}^*)+\\
&+pu-\frac{1}{4}u^4-\frac{1}{2}v^2, \qquad (25)
\end{aligned}$$

$$\bar{h}^{(t)} = \sum_{j=1}^{N}\lambda_j(y_{1,j}y_{2,j}^*+y_{2,j}y_{1,j}^*)+\frac{\sqrt{6}}{6}u\sum_{j=1}^{N}(y_{1,j}^*y_{2,j}^*-y_{1,j}y_{2,j})+\frac{1}{2}u^2, \qquad (26)$$

які визначаємо при $j=\overline{1,N}$ з таких рівностей:

$$\begin{aligned}
-\frac{d\bar{h}^{(x)}}{dx} = &\Big\langle \operatorname{grad}\bar{\mathcal{L}}_N\,[u,p,v,y_{1,j},y_{1,j}^*,y_{2,j},y_{2,j}^*],\\
&(u_x,p_x,v_x,y_{(1,j)x},y_{(1,j)x}^*,y_{(2,j)x},y_{(2,j)x}^*)^\top\Big\rangle,\\
-\frac{d\bar{h}^{(t)}}{dx} = &\Big\langle \operatorname{grad}\bar{\mathcal{L}}_N[u,p,v,y_{1,j},y_{1,j}^*,y_{2,j},y_{2,j}^*],\\
&(u_t,p_t,v_t,y_{(1,j)t},y_{(1,j)t}^*,y_{(2,j)t},y_{(2,j)t}^*)^\top\Big\rangle.
\end{aligned}$$

На підмноговиді $M_N\subset\bar{M}_N$ для функціоналів (25) та (26) отримуємо

$$\begin{aligned}
h^{(x)} = \bar{h}^{(x)}\Big|_{M_N} = &-\frac{2}{3}\sum_{j,k=1}^{N}\lambda_j^2(y_{1,j}y_{2,j}-y_{1,j}^*y_{2,j}^*)(y_{1,k}y_{2,k}-y_{1,k}^*y_{2,k}^*)+\\
&+\frac{1}{12}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\sqrt{6}}{6}(y_{1,j}y_{2,j}-y_{1,j}^*y_{2,j}^*)\right)^4-\frac{1}{18}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j(y_{1,j}y_{2,j}^*+\\
&+y_{2,j}y_{1,j}^*)\left(\sum_{j=1}^{N}(y_{1,j}y_{2,j}-y_{1,j}^*y_{2,j}^*)\right)^2+4\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^3(y_{1,j}y_{2,j}^*+y_{2,j}y_{1,j}^*),\\
h^{(t)} = \bar{h}^{(t)}\Big|_{M_N} = &\sum_{j=1}^{N}\lambda_j(y_{1,j}y_{2,j}^*+y_{2,j}y_{1,j}^*)-\\
&-\frac{1}{6}\sum_{j,k=1}^{N}(y_{1,j}^*y_{2,j}^*-y_{1,j}y_{2,j})(y_{1,k}^*y_{2,k}^*-y_{1,k}y_{2,k}).
\end{aligned}$$

Ці результати сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. *На* $2N$*-вимірному симплектичному підмноговиді* $M_N\subset M$ *векторні поля* d/dx *і* d/dt *у вигляді* (13), (13′) *при* $\lambda=\lambda_j$, $j=\overline{1,N}$, *є гамільтоновими стосовно канонічної симплектичної структури* (24) *з гамільтоніанами* $\bar{h}^{(x)}$ *і* $\bar{h}^{(t)}$ *відповідно.*

5. Оскільки підмноговид $\overline{M}_N$ є підмноговидом стаціонарних точок динамічної системи за деяким еволюційним параметром $\tau \in \mathbb{R}$:

$$w_\tau = -\theta\left(\operatorname{grad}\gamma_1 - \operatorname{grad}\sum_{j=1}^N c_j\lambda_j \right),$$

і координати розв'язку (u,p,v) на цьому підмноговиді мають вигляд

$$u = \frac{\sqrt{6}}{6}\sum_{j=1}^N (y_{1,j}y_{2,j} - y_{1,j}^* y_{2,j}^*),$$

$$p = -\frac{2\sqrt{6}}{3}\sum_{j=1}^N \lambda_j^2(y_{1,j}y_{2,j} - y_{1,j}^* y_{2,j}^*), \qquad v = 0,$$

то для зображення Лакса векторних полів d/dx і d/dt на $\overline{M}_N$, а, отже, і на M_N, отримаємо

$$dS/dx = [\, l, S\,], \tag{27}$$

$$dS/dt = [\, p(l), S\,]. \tag{28}$$

Рівняння (27), (28) задовольняє матриця монодромії [8] $S = \begin{Vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & -S_{11} \end{Vmatrix}$ спектральної задачі (13), градієнт сліду якої

$$\varphi(\lambda) = \operatorname{grad}\operatorname{tr} S =$$

$$= \left(-\frac{4}{3}u\lambda S_{11} + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\lambda - \frac{\sqrt{6}}{6}u^2\right)S_{12} + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\lambda - \frac{\sqrt{6}}{6}u^2\right)S_{21}, \right.$$

$$\left. \frac{\sqrt{6}}{6}S_{12} + \frac{\sqrt{6}}{6}S_{21}, \quad \frac{\sqrt{6}}{3}\lambda S_{12} - \frac{\sqrt{6}}{3}\lambda S_{21} \right)^\top$$

породжує градієнти законів збереження інверсної системи (1):

$$\varphi(\lambda) \cong \varphi_0\lambda + \varphi_1 + \sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\varphi_{i+1}\lambda^{-i}, \qquad \varphi_i = \operatorname{grad}\gamma_i, \qquad i \in \mathbb{Z}_+, \qquad |\lambda| \to \infty.$$

На підмноговиді M_N градієнти законів збереження для системи (1) набувають вигляду

$$\varphi_0 = 0,$$

$$\varphi_1 = \left(-\frac{4\sqrt{6}}{9}\sum_{j=1}^N \lambda_j(y_{1,j}y_{2,j} - y_{1,j}^* y_{2,j}^*) - \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\sum_{j=1}^N (y_{1,j}y_{2,j} - y_{1,j}^* y_{2,j}^*)\right)^3, \right.$$

$$\left. \frac{2\sqrt{6}}{18}\sum_{j=1}^N (y_{1,j}y_{2,j} - y_{1,j}^* y_{2,j}^*), \quad 0 \right)^\top,$$

$$\varphi_{i+1} = (\vartheta^{-1}\eta)\varphi_i = \left(-\frac{4\sqrt{6}}{9}\sum_{j=1}^N \lambda_j^i(y_{1,j}y_{2,j} - y_{1,j}^* y_{2,j}^*) - \right.$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{54}\sum_{j=1}^N \lambda_j^{i-1}\left(\sum_{k,l=1}^N y_{1,j}y_{2,j}y_{1,k}y_{2,k}y_{1,l}y_{2,l} - 3y_{1,j}y_{2,j}y_{1,k}y_{2,k}y_{1,l}^* y_{2,l}^* + \right.$$

$$+ 3y_{1,j}y_{2,j}y^*_{1,k}y^*_{2,k}y^*_{1,l}y^*_{2,l} - y^*_{1,j}y^*_{2,j}y^*_{1,k}y^*_{2,k}y^*_{1,l}y^*_{2,l} \Big),$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{18}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^{i-1}(y_{1,j}y_{2,j} - y^*_{1,j}y^*_{2,j}), \quad 0 \Big)^{\top}, \qquad i \ge 1.$$

Отже, для матриці монодромії $S_N := S|_{M_N}$, редукованої на підмноговид M_N, маємо

$$S_N = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\lambda - \lambda_j}\left\| \begin{matrix} \dfrac{2\lambda + 2\lambda^{-1}\lambda_j^2(y_{1,j}y_{2,j} - y^*_{1,j}y^*_{2,j})}{\sum\limits_{k=1}^{N}(y_{1,k}y_{2,k} - y^*_{1,k}y^*_{2,k})} & \dfrac{1}{3}(y_{1,j}y_{2,j} - y^*_{1,j}y^*_{2,j}) \\ \dfrac{1}{3}(y_{1,j}y_{2,j} - y^*_{1,j}y^*_{2,j}) & \dfrac{-2\lambda - 2\lambda^{-1}\lambda_j^2(y_{1,j}y_{2,j} - y^*_{1,j}y^*_{2,j})}{\sum\limits_{k=1}^{N}(y_{1,k}y_{2,k} - y^*_{1,k}y^*_{2,k})} \end{matrix} \right\| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}2\lambda^{-1}\lambda_j \left\| \begin{matrix} \dfrac{(y_{1,j}y_{2,j} - y^*_{1,j}y^*_{2,j})}{\sum\limits_{k=1}^{N}(y_{1,k}y_{2,k} - y^*_{1,k}y^*_{2,k})} & 0 \\ 0 & \dfrac{-(y_{1,j}y_{2,j} - y^*_{1,j}y^*_{2,j})}{\sum\limits_{k=1}^{N}(y_{1,k}y_{2,k} - y^*_{1,k}y^*_{2,k})} \end{matrix} \right\| +$$

$$+ 2\lambda \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\| + \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{3}\left\| \begin{matrix} 0 & y_{1,j}y_{2,j} - y^*_{1,j}y^*_{2,j} \\ y_{1,j}y_{2,j} - y^*_{1,j}y^*_{2,j} & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{29}$$

Коефіцієнти розкладу функціонала $\Phi(x;\lambda) := \frac{1}{2}\operatorname{tr} S_N^2 = S_{11}^2 + S_{12}S_{21}$ задають множину N функціонально незалежних законів збереження $\Phi_j \in \in D(M_N)$ векторних полів d/dx і d/dt на M_N:

$$\Phi(x;\lambda) = 4\lambda^2 + \sum_{j=1}^{N}\frac{\Phi_j}{\lambda - \lambda_j} + \frac{1}{9}\sum_{j,k=1}^{N}Z_jZ_k,$$

де

$$\Phi_j = \left(\sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{N}\frac{4\lambda_j^2}{\lambda_j - \lambda_k} + 8\lambda_j^2\right)\left(1 + \frac{2\lambda_j{}^2 Z_j}{\sum\limits_{j=1}^{N}Z_j} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{N}\lambda_k{}^2 Z_jZ_k}{\left(\sum\limits_{j=1}^{N}Z_j\right)^2}\right) + \frac{1}{9}\sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{N}\frac{Z_jZ_k}{\lambda_j - \lambda_k},$$

$$Z_j = y_{1,j}y_{2,j} - y^*_{1,j}y^*_{2,j}. \tag{30}$$

Закони збереження (30) є інволютивними відносно дужки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_{\omega^{(2)}}$, породженої симплектичною структурою (14), тобто

$$\{\Phi_j, \Phi_k\}_{\omega^{(2)}} = \{\Phi_k, \Phi_j\}_{\omega^{(2)}}, \qquad j,k = \overline{1,N},$$

що доводить інтегровність за Ліувіллем векторних полів d/dx і d/dt на M_N.

Вищевикладене дозволяє сформулювати

Твердження 2. *На* $2N$*-вимірному симплектичному підмноговиді* $M_N \subset M$ *векторні поля* d/dx *і* d/dt *у вигляді* (13), (13′) *при* $\lambda = \lambda_j$, $j = \overline{1, N}$, *мають відповідно зображення Лакса* (27) *і* (28) *з матрицею* S_N (29) *і є інтегровними за Ліувіллем.*

1. *Богоявленский О. И., Новиков С. П.* О связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач // Функц. анализ и его прилож. – 1976. – **10**, № 1. – С. 9–13.
2. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский А. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи – М.: Наука, 1980. – 320 с.
3. *Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. – Киев: Наук. думка, 1987. – 296 с.
4. *Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.* Алгебраические аспекты интегрируемости нелинийных динамических систем на многообразиях. – К.: Наук. думка, 1991. – 288 с.
5. *Притула М. М., Прикарпатський А. К., Микитюк І. В.* Елементи теорії диференціально-геометричних структур та динамічних систем. – К.: Учб.-метод. кабінет М-ва вищої освіти, 1988. – 87 с.
6. *Самойленко А. М., Прикарпатський Я. А.* Алгебро-аналітичні аспекти цілком інтегровних динамічних систем та їх збурень. – К.: Ін-т математики НАН України, 2002. – 237 с.
7. *Dirac P. A. M.* Generalized Hamiltonian dynamics // Canad. J. Math. – 1950. – **2**, No. 2. – P. 129–148.
8. *Magri F.* A simple model of the integrable Hamiltonian equation // J. Math. Phys.- 1978. – **19**, No. 3. – P. 1156–1162.
9. *Prykarpatsky A., Blackmore D., Strampp W., Sydorenko Yu., Samuliak R.* Some remarks on Lagrangian and Hamiltonian formalism // Condensed Matter Phys.- 1995. – No. 6. – P. 79–104.
10. *Prykarpatsky A., Hentosh O., Kopych M., Samuliak R.* Neumann – Bogoliubov – Rosochatius oscillatory dynamical systems and their integrability via dual moment maps // J. Nonlinear Math. Phys. – 1995. – **2**, No. 2.– P. 98–113.

ПОСТРОЕНИЕ СВЯЗНОСТИ КАРТАНА И АССОЦИИРОВАННЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ РЕДУКЦИЙ НА ИНТЕГРАЛЬНОМ ДЖЕТ-ПОДМНОГООБРАЗИИ ДЛЯ ИНВЕРСНОЙ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА

На основе дифференциально-геометрической теории Картана построена система уравнений параллельного переноса (связности) на присоединенном расслоении к джет-подмногообразию для инверсной модифицированной системы Кортевега – де Фриза. Исследована иерархия ассоциированных конечномерных нелокальных редукций этой системы, установлена их гамильтоновость и полная интегрируемость по Лиувиллю.

CARTAN'S CONNECTION CONSTRUCTION AND ASSOCIATED NON-LOCAL FINITE-DIMENSIONAL REDUCTIONS ON INTEGRAL JET-SUBMANIFOLD FOR INVERSE MODIFIED DYNAMIC KORTEVEG – DE VRIES SYSTEM

On the basis of differential geometric Cartan theory the system of equations of parallel transport (connection) on adjoint vector bundle over a jet-submanifold for the inverse modified Korteveg – de Vries system is constructed. The hierarchy of associated finite-dimensional non-local reductions of this system is studied, their hamiltonicity and complete integrability via Liouville is determined.

Львів. нац. ун-т, Львів

Одержано
20.07.03