УДК 517.2: 539.3

Г. Я. Попов

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОЛУЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ К ПОСТРОЕНИЮ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Излагается способ выведения интегральных преобразований, основанный на решении регулярных задач Штурма – Лиувилля с последующим использованием теоремы разложения Стеклова. Получен ряд новых интегральных преобразований, которые применяются для построения точных решений некоторых краевых задач математической физики. Много места уделяется асимптотическому решению трансцендентных уравнений, из которых определяются собственные числа задачи Штурма – Лиувилля, входящие в ядра полученных интегральных преобразований. Это потребовало получения новых асимптотических разложений для больших значений параметров гипергеометрической функции Гаусса.

1. Начнем с решения краевой задачи Штурма – Лиувилля

$$L_s y(x,\lambda) - \lambda[r(x)]^{-1} y(x,\lambda) = 0, \qquad a_0 < x < a_1,$$

$$l_i y(x,\lambda) \equiv \alpha_{i0} y(a_i,\lambda) + \alpha_{i1} y'(a_i,\lambda) = 0, \qquad i = 0,1, \tag{1}$$

где L_s – самосопряженный оператор Штурма – Лиувилля, определяемый формулой

$$L_s y(x) \equiv -[p(x)y'(x)]' + q(x)y(x). \tag{2}$$

Будем считать $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $r^{-1}(x)$ непрерывными функциями на отрезке $[a_0, a_1]$, а $r^{-1}(x) > 0$ там же.

Кроме того, в системе (1) λ – параметр, $a_i < \infty$ и отличные от нуля, а α_{i0} – вещественные числа, $i = 0,1$.

Для определения решения краевой задачи (1) исходим из фундаментальной системы решений $\varphi_0(x,\lambda)$ и $\chi_0(x,\lambda)$ дифференциального уравнения из (1).

Чтобы, кроме дифференциального уравнения краевой задачи (1), удовлетворить и одному из краевых условий в (1), выберем решение (1) в виде

$$y(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda)\, l_1\chi_0(x,\lambda) - \chi_0(x,\lambda)\, l_1\varphi_0(x,\lambda) \tag{3}$$

либо в виде

$$y(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda)\, l_0\chi_0 - \chi_0(x,\lambda)\, l_0\varphi_0. \tag{4}$$

Если выбрать решение в виде (3), то второе граничное условие в (1) будет тождественно удовлетворено, а если использовать (4), то тождественно будет удовлетворено первое уравнение. В обоих случаях, чтобы оба граничных условия (1) были удовлетворены, достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$l_0\varphi_0(x,\lambda)\, l_1\chi_0(x,\lambda) - l_0\chi_0(x,\lambda)\, l_1\varphi_0(x,\lambda) = 0. \tag{5}$$

Корни $\lambda = \lambda_j$, $j = 0,1,2,\ldots$, этого трансцендентного уравнения и будут являться собственными числами краевой задачи Штурма – Лиувилля (1).

Для окончательного решения последнего нужно показать, что уравнение (5) имеет счетное число вещественных не кратных нулей и собственные функции, отвечающие разным собственным числам, ортогональны, т. е.

$$\int_{a_0}^{a_1} \frac{y(x,\lambda_j)y(x,\lambda_k)}{r(x)}dx = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ \| y(x,\lambda_j) \|^2, & j = k. \end{cases} \tag{6}$$

Отсутствие кратных корней уравнения (5) следует из того, что каждому собственному λ_j числу отвечает не более одной собственной функции $y(x,\lambda_j)$. Это показано в работе [12]. Для доказательства счетности корней уравнения (5) следует свести краевую задачу к равносильному ей интегральному уравнению [12]. С этой целью построим функцию Грина $G(x,\xi)$ самосопряженной краевой задачи

$$L_s y(x) = f(x), \qquad a_0 < x < a_1,$$

$$l_i y(x) = 0, \qquad i = 0,1. \tag{7}$$

Используя фундаментальную систему решений $y_j(x)$ дифференциального уравнения $L_s y_j(x) = 0$, $j = 0,1$, находим базисную систему решений [7] $\psi_j(x)$ краевой задачи (7), т. е. функции, обладающие свойством

$$L_s \psi_j(x) = 0, \qquad a_0 < x < a_1,$$

$$l_i \psi_j(x) = \delta_{ij}, \qquad i,j = 0,1. \tag{8}$$

Тогда функцию Грина определяем по формуле

$$G(x,\xi) = G(\xi,x) = \begin{cases} c_0\psi_0(\xi)\psi_1(x), & x < \xi, \\ c_0\psi_0(x)\psi_1(\xi), & x < \xi, \end{cases}$$

где $c_0^{-1} = p(x)W(\psi_0,\psi_1)$. Эта величина постоянна, поскольку вронскиан любых двух линейно независимых решений $y_j(x)$, $j = 0,1$, дифференциального уравнения из (8) обладает свойством $p(x)W(y_0,y_1) = \mathrm{const}$, что проверяется непосредственно.

Располагая функцией Грина краевой задачи (7), сводим [12] задачу Штурма – Лиувилля (1) к интегральному уравнению

$$\varphi(x) - \lambda \int_{a_0}^{a_1} \mathcal{K}(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi = 0, \qquad a_0 \leq x \leq a_1, \tag{9}$$

с симметричным и непрерывным ядром $\mathcal{K}(x,\xi) = \dfrac{G(x,\xi)}{\sqrt{r(x)r(\xi)}}$, при этом $y(x,\lambda) = \sqrt{r(x)}\,\varphi(x)$. В [12] показана равносильность краевой задачи (1) и интегрального уравнения (9). Отсюда и следует счетность и вещественность корней уравнения (5), т. е. собственных чисел краевой задачи Штурма – Лиувилля (1) и интегрального уравнения (9), а также ортогональность (6) собственных функций. Если теперь воспользоваться теоремой разложения Стеклова [12], то всякую функцию $f(x)$, удовлетворяющую граничному условию $l_i f(x) = 0$, $i = 0,1$, и имеющую непрерывную вторую производную на отрезке $[a_0,a_1]$, можно разложить в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям $y(x,\lambda_j)$ задачи Штурма – Лиувилля:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j y(x,\lambda_j). \tag{10}$$

Воспользовавшись ортогональностью (6), найдем коэффициенты разложения c_j. Таким образом, вместо (10) будем иметь

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y(x,\lambda_j)}{\left\| y(x,\lambda_j) \right\|^2} \int_{a_0}^{a_1} \frac{y(x,\lambda_j)}{r(x)} f(x)\,dx. \tag{11}$$

Если теперь принять во внимание уточнение теоремы разложения Стеклова, сделанное в [12], то полученный результат можем сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Если определена трансформанта функции* $f(x)$, *задаваемая формулой*

$$f_i = \int_{a_0}^{a_1} \frac{y(x,\lambda_j) f(x)}{r(x)}\,dx,$$

то для нахождения оригинала, т.е. самой функции $f(x)$, *следует воспользоваться рядом*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\alpha} \frac{y(x,\lambda_j)}{\left\| y(x,\lambda_j) \right\|^2} \cdot f_j,$$

который равномерно сходится, коль скоро функция $f(x)$ *непрерывна на* $[a_0, a_1]$, *имеет производную с конечным числом разрывов на* $[a_0, a_1]$ *и удовлетворяет граничным условиям* $l_i\, f(x) = 0,\ i = 0,1$.

Предложенный метод получения интегральных преобразований уже применялся в работе [8] для частных случаев.

В работе [9] для получения новых интегральных преобразований применен метод Титчмарша [14]. Изложенным ниже методом выведем более общие интегральные преобразования, чем полученные в [9].

2. В работе [9] для функций $f(\theta)$, заданных на отрезке $[\omega_0, \omega_1]$, где $\omega_0 \le 0,\ \omega_1 < \pi$, было выведено новое интегральное преобразование, ядром которого являлась линейная комбинация сферических функций, верхние индексы которых были целыми положительными числами. Как увидим ниже, некоторые краевые задачи математической физики можно решать точно с помощью интегральных преобразований с ядрами, содержащими сферические функции с верхними индексами, которые являются положительными, но не целыми числами. Дадим обобщение результатов работы [9] на этот случай. Для этого рассмотрим частный случай краевой задачи (1):

$$L_s y_m(\theta,\nu) - \nu(\nu+1)\sin\theta\, y_m(\theta,\nu) = 0, \qquad \omega_0 < \theta < \omega_1 < \pi, \qquad m = 0,1,$$

$$l_i^m y_m(\theta,\nu) = 0, \qquad i = 0,1, \tag{12}$$

где ν – параметр, дифференциальный оператор Штурма L_s имеет вид

$$L_s y(\theta) = -\left[\sin\theta\, y^{\bullet}(\theta)\right]^{\bullet} + \mu^2 \operatorname{cosec}\theta\, y(\theta),$$

а граничные функционалы в (12) определяются формулами

$$l_i^0 y(\theta) = y(\omega_i), \qquad l_i^1 y(\theta) = h_i y(\omega_i) + y^{\bullet}(\omega_i), \qquad i = 0,1, \tag{13}$$

причем h_i – вещественные числа, μ – положительное (не целое) число. Точкой помечена производная по θ. Фундаментальной системой решений дифференциального уравнения из (12) будут [1] сферические функции

$P_\nu^\mu(\cos\theta)$ и $Q_\nu^\mu(\cos\theta)$, поэтому согласно изложенному в **п. 1** решением краевых задач (12) будут функции

$$y_m(\theta,\nu) = P_\nu^\mu(\cos\theta) l_1^m Q_\nu^\mu(\cos\theta) - Q_\nu^\mu(\cos\theta) l_1^m P_\nu^\mu(\cos\theta), \quad m = 0,1, \qquad (14)$$

а собственные числа $\nu = \nu_j$, $j = 0,1,\ldots$, будут определяться из трансцендентных уравнений

$$\Omega_{\nu,\mu}^m \equiv l_0^m P_\nu^\mu(\cos\theta) l_1^m Q_\nu^\mu(\cos\theta) - l_0^m Q_\nu^\mu(\cos\theta) l_1^m P_\nu^\mu(\cos\theta) = 0, \quad m = 0,1. \qquad (15)$$

При этом разложение (11) запишется в виде

$$f(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y_m(\theta,\nu_j)}{\| y_m(\theta,\nu_j)\|^2} \int_{\omega_0}^{\omega_1} y_m(\theta,\nu_j)\sin\theta\, f(\theta)\, d\theta, \qquad k = 0,1. \qquad (16)$$

Прежде, чем сформулировать аналог теоремы из **п. 1** для рассматриваемого частного случая, займемся вычислением

$$\| y_m(\theta,\nu_j)\|^2 = \int_{\omega_0}^{\omega_1} y_m^2(\theta,\nu_j)\sin\theta\, d\theta = \sigma_{\mu j}^m, \quad m = 0,1, \quad j = 0,1,2,\ldots.$$

Согласно (14) имеем

$$\sigma_{\mu j}^m = b^2 J_\nu^{(1)} + a^2 J_\nu^{(2)} - 2ab J_\nu^{(0)}, \qquad (17)$$

$$a = l_1^m P_\nu^\mu(\cos\theta) \equiv l_1^m P_\nu^\mu, \qquad b = l_1^m Q_\nu^\mu(\cos\theta) \equiv l_1^m Q_\nu^\mu,$$

$$\begin{Bmatrix} J_\nu^{(1)} \\ J_\nu^{(2)} \end{Bmatrix} = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \begin{Bmatrix} P_\nu^\mu(\cos\theta) \\ Q_\nu^\mu(\cos\theta) \end{Bmatrix}^2 \sin\theta\, d\theta, \qquad J_\nu^{(0)} = \int_{\omega_0}^{\omega_1} P_\nu^\mu(\cos\theta) Q_\nu^\mu(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta.$$

Здесь и далее под ν имеем в виду собственные числа ν_j. Для вычисления интегралов, как и в [8], используем метод Ломмеля [3], основанный на оперировании с двумя дифференциальными уравнениями Лежандра

$$L_s U(\theta) = \nu(\nu+1)\sin\theta\, U(\theta), \qquad L_s V(\theta) = \gamma(\gamma+1)\sin\theta\, V(\theta), \qquad (18)$$

решениями которых соответственно являются функции $U(\theta) = P_\nu^\mu(\cos\theta)$, $Q_\nu^\mu(\cos\theta)$ и $V(\theta) = P_\gamma^\mu(\cos\theta)$, $Q_\gamma^\mu(\cos\theta)$, и позволяющий получить формулу

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \sin\theta\, U(\theta)V(\theta)\, d\theta = \frac{\left[U(\theta)\dot V(\theta)\sin\theta - V(\theta)\dot U(\theta)\sin\theta\right]_{\omega_0}^{\omega_1}}{\nu(\nu+1) - \gamma(\gamma+1)}.$$

Опираясь на эту формулу и выполняя операции аналогичные, проделанным в [8], находим

$$\begin{Bmatrix} J_\nu^{(1)} \\ J_\nu^{(2)} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2\nu+1}\left[\sin\theta \begin{Bmatrix} P_\nu^\mu(\cos\theta)\dfrac{d}{d\nu}\dot P_\nu^\mu(\cos\theta) \\ Q_\nu^\mu(\cos\theta)\dfrac{d}{d\nu}\dot Q_\nu^\mu(\cos\theta) \end{Bmatrix} - \right.$$

$$\left. - \sin\theta \begin{Bmatrix} \dot P_\nu^\mu(\cos\theta)\dfrac{d}{d\nu}P_\nu^\mu(\cos\theta) \\ \dot Q_\nu^\mu(\cos\theta)\dfrac{d}{d\nu}Q_\nu^\mu(\cos\theta) \end{Bmatrix} \right]_{\omega_0}^{\omega_1} - (2\nu+1)J_\nu^{(0)} =$$

$$= \left[\sin\theta\, P_\nu^\mu(\cos\theta)\frac{d}{d\nu}\dot Q_\nu^\mu(\cos\theta) - \sin\theta\, \dot P_\nu^\mu(\cos\theta)\frac{d}{d\nu}Q_\nu^\mu(\cos\theta)\right]_{\omega_0}^{\omega_1} =$$

$$= \left[\sin\theta \, Q_\nu^\mu(\cos\theta) \frac{d}{d\nu} \dot{P}_\nu^\mu(\cos\theta) - \sin\theta \, Q_\nu^\mu(\cos\theta) \frac{d}{d\nu} \dot{P}_\nu^\mu(\cos\theta) \right]_{\omega_0}^{\omega_1},$$

$$\dot{P}_\nu^\mu(\cos\theta) = \frac{d}{d\theta} P_\nu^\mu(\cos\theta).$$

Подставив полученные выражения в (17) (причем при подстановке $2J_\nu^{(0)}$ следует использовать сумму двух последних выражений), получим

$$\sigma_{\mu j}^m = \| y_k(\theta, \nu_j) \|^2 = -\left[\frac{\Gamma_{\mu\nu} l_1^m Q_\nu^\mu}{(2\nu+1) l_0^m Q_\nu^\mu} \frac{d}{d\nu} \Omega_{\nu,\mu}^m \right]_{\nu=\nu_j}, \qquad m = 0,1, \tag{19}$$

где

$$\Gamma_{\mu\nu} = 2^{2\mu} \cdot \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\mu+\nu)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\mu+\nu)\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\nu-\mu)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\nu-\mu)\right)}.$$

Принимая во внимание (19) и соотношение (16), устанавливаем новое интегральное преобразование

$$f_j^m = \int_{\omega_0}^{\omega_1} y_m(\theta, \nu_j) \sin\theta \, f(\theta) \, d\theta, \qquad m = 0,1, \qquad j = 0,1,2,\ldots, \tag{20}$$

с формулой обращения

$$f(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y_m(\theta, \nu_j)}{\sigma_{\mu j}^m} \cdot f_j^m, \qquad m = 0,1. \tag{21}$$

При этом для равномерной сходимости записанного ряда на функцию $f(\theta)$ следует наложить те же ограничения, что и в теореме.

3. При получении сформулированного результата с целью оставаться в рамках регулярности краевой задачи Штурма – Лиувилля сделано ограничение $\omega_0 \neq 0$. Во многих задачах требуется интегральное преобразование (20) при $\omega_0 = 0$. В работе [9] такое преобразование для целых положительных значений верхних индексов сферических функций, т. е. когда $\mu = m$, где m – целое число, получено предельным переходом $\omega_0 \to 0$. При этом использована формула 3.6.1 (2) из [1] для $P_\nu^m(\cos\theta)$, полученная там методом, в котором существенно используется то, что m – целое положительное число. Чтобы совершить в формулах (20) и (21) предельный переход $\omega_0 \to 0$, необходимо иметь аналогичную формулу для $P_\nu^\mu(\cos\theta)$ при μ не целом. Такая формула получена и имеет вид (для $0 < \theta < \pi$)

$$P_\nu^\mu(\cos\theta) = \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)\sin^\mu\theta}{2^\mu \Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\mu+1)} F\left(1+\mu+\nu, \mu-\nu; 1+\mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{22}$$

Чтобы убедиться в ее справедливости, достаточно проверить, что $U(\theta)$, выбранная в виде (22), удовлетворяет дифференциальному уравнению Лежандра (18). Из представления (22) следует, что

$$P_\nu^\mu(\cos\theta)\Big|_{\theta=0} = 0, \qquad \mu > 0,$$

$$l_0^m P_\nu^\mu(\cos\theta)\Big|_{\omega_0=0} = 0, \qquad \mu > 1. \tag{23}$$

Учитывая это, совершим предельный переход $\omega_0 \to 0$ $(\omega_1 = \omega)$ в формулах (20) и (21), причем этот переход лучше сделать в формуле (16), из которой они получены. Указанный предельный переход предварительно совершим в трансцендентном уравнении (15), из которого определяются собственные числа ν_j. В силу (23) трансцендентное уравнение (15) перейдет в уравнение

$$l_1^m P_\nu^\mu(\cos\theta) \equiv l_1^m P_\nu^\mu = 0, \qquad m = 0,1, \qquad \omega_1 = \omega, \tag{24}$$

и собственные функции (14) будут определяться формулами

$$y_m(\theta,\nu) = P_\nu^\mu(\cos\theta)\, l_1^m Q_\nu^\mu. \tag{25}$$

При предельном переходе $\omega_0 \to 0$ в выражении для $\dfrac{\partial \Omega_{\nu,\mu}^m}{\partial\nu}$ главный вклад будет вносить слагаемое $-\, l_0^m Q_\nu^\mu \dfrac{\partial}{\partial\nu}(l_1^m P_\nu^\mu)$, т. к. $Q_\nu^\mu(\cos\theta)\big|_{\theta\to 0} \to \infty$.

Если все это учесть в формуле (16), то при $\omega_0 \to 0$ формулы (20) и (21) переходят в следующие:

$$f_j^m = \int_0^\omega P_\nu^\mu(\cos\theta)\sin\theta f(\theta)\, d\theta, \qquad m = 0,1, \tag{26}$$

$$f(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{(2\nu+1) l_1^m Q_\nu^\mu P_\nu^\mu(\cos\theta)}{\Gamma_{\mu\nu}\dfrac{d}{d\nu}(l_1^m P_\nu^\mu)}\right]_{\nu=\nu_j} \cdot f_j^m, \qquad m = 0,1, \tag{27}$$

т. е. в качестве собственных функций можно брать

$$y_m(\theta,\nu) = P_\nu^\mu(\cos\theta), \qquad m = 0,1.$$

Важно отметить, что трансцендентное уравнение (24) при $m = 0$, $\omega_1 = \omega = \pi/2$ имеет решение в явном виде. Действительно, в этом случае оно принимает вид

$$P_\nu^\mu\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = P_\nu^\mu(0) = 0. \tag{28}$$

Если учесть (22), а также формулу 3.8 (50) из [1], то уравнение (28) запишется в виде

$$P_\nu^\mu(0) = 2^{1-\mu}\Gamma(\nu+\mu)\Gamma^{-1}\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\left[\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)\right]^{-1} = 0. \tag{29}$$

Учитывая полюсы Γ-функции, устанавливаем две серии корней уравнения (29):

$$\nu_j = \mu + 2j + 1, \qquad \nu_j^1 = \mu - j - 1, \qquad j = 0,1,2,\ldots, \tag{30}$$

причем вторую серию отбрасываем, поскольку на основе (25) и (22) собственные функции $y_0(\theta,\nu_j^1) = 0$, $j = 0,1,2,\ldots$. Следовательно, собственные функции $y_0(\theta,\nu_j)$ согласно (25) будут определяться формулой

$$y_0(\theta,\nu_j) = P_{\mu+2j+1}^\mu(\cos\theta) = \frac{(2\sin\theta)^\mu}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\lambda) C_{2j+1}^\lambda(\cos\theta), \quad \lambda = \mu + \frac{1}{2}. \tag{31}$$

(Здесь $C_n^\lambda(z)$ – многочлены Гегенбауэра). Чтобы убедиться в справедливости второго равенства, следует учесть (22), (30), а также формулу 10.9 (20) из [2]. Чтобы записать интегральное преобразование (26), (27) для рассматриваемого случая, нужно вычислить

$$l_1^0 Q_\nu^\mu \Big|_{\theta=\pi/2} = Q_\nu^\mu(0), \qquad \frac{d}{d\nu} P_\nu^\mu(0) \qquad \text{при} \qquad \nu = \mu + 2j + 1 . \tag{32}$$

Пользуясь формулой 3.4 (21) из [1], получаем

$$Q^\mu_{\mu+2j+1}(0) = -\, 2^{\mu+1} \cos\mu\pi \sqrt{\pi}\, \Gamma(\mu + j + 1)\, \Gamma^{-1}\left(\frac{3}{2} + j\right). \tag{33}$$

Чтобы получить значение для второго из выражений (32), следует выполнить дифференцирование (29) по ν и положить затем $\nu = \mu + 2j + 1$. В результате находим

$$\left.\frac{dP_\nu^\mu(0)}{d\nu}\right|_{\nu=\mu+2j+1} = \frac{\Gamma(2\mu + 2j + 1)}{2^\mu\, \Gamma\left(\mu + j + \frac{1}{2}\right)} . \tag{34}$$

При получении (34) использовано равенство

$$\psi(-\,2j-1)\,\Gamma^{-1}(-\,2j-1) = \Gamma(2j+2), \qquad j = 0,1,2,\ldots,$$

вытекающее из формулы I (1.24) из [7]. Если учесть равенства (31), (33) и (34), то формулы (26) и (27) будут порождать такое интегральное преобразование для функций, заданных на отрезке $[0, \pi/2]$:

$$f_j = \int_0^{\pi/2} \sin^\mu\theta\, C^\lambda_{2j+1}(\cos\theta) \sin\theta f(\theta)\, d\theta, \qquad \lambda = \mu + \frac{1}{2},$$

$$f(\theta) = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{\lambda-1}\Gamma^2(\lambda)(\lambda+1+2j)}{\pi(\lambda+j)\Gamma(2\lambda+2j)} \sin^\mu\theta\, C^\lambda_{2j+1}(\cos\theta)\cdot f_j .$$

При нахождении $y_1(\theta, \nu_j)$, т. е. решение задачи (12) при $m = 1$ и $0 < \theta < \omega$, следует учесть, что собственные числа ν_j − это корни уравнения (24) при $m = 1$. Явных формул для корней этого уравнения не удалось найти. Однако это удается сделать для частного случая, когда в граничных функционалах (13) положить $h_i = 0,\ i = 0,1$, и $\omega = \pi/2$. В этом случае собственная функция будет определяться формулой

$$y_*(\theta, \nu_j) = P^\mu_{\nu_j}(\cos\theta), \qquad j = 0,1,2,\ldots, \qquad 0 < \theta < \pi/2, \tag{35}$$

и согласно (13) и (24) собственные числа ν_j находим из уравнения

$$\dot{P}^\mu_\nu\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = \dot{P}^\mu_\nu(0) = \frac{d}{d\theta} P^\mu_\nu(\cos\theta)\Big|_{\theta=\pi/2} = 0 .$$

Выполнив дифференцирование выражения (22) по θ и положив $\theta = \pi/2$, получаем

$$\dot{P}^\mu_\nu(0) =$$
$$= \sqrt{\pi}\, 2^{1-\mu}\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma^{-1}\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\Gamma(\nu-\mu+1)\right]^{-1} = 0 . \tag{36}$$

Учитывая полюсы гамма-функции Эйлера, выявляем две серии корней трансцендентного уравнения (36):

$$\nu_j = \mu + 2j, \qquad \nu_j^1 = \mu - j - 1, \qquad j = 0,1,2,\ldots .$$

При этом значения из второй серии не могут быть собственными числами, так как отвечающие им собственные функции (35) в силу (22) будут равны нулю. Таким образом, собственные функции (35) будут определяться формулой

$$y_*(\theta,\nu_j) = P^{\mu}_{\mu+2j}(\cos\theta) = \frac{2^{\mu}\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}} C^{\lambda}_{2j}(\cos\theta), \qquad \lambda = \mu + \frac{1}{2}.$$

В справедливости второго равенства можно убедиться, если учесть (22), а также формулу 10.9 (21) из [2].

Чтобы выявить, какой вид приобретут формулы (26) и (27) для разбираемого частного случая, следует определить

$$l_1^1 Q^{\mu}_{\nu} = \dot{Q}^{\mu}_{\nu}(0), \qquad \frac{dl_1^1}{d\nu} P^{\mu}_{\nu} = \frac{d}{d\nu} P^{\mu}_{\nu}(0) \quad \text{при} \quad \nu = \mu + 2j, \quad j = 0,1,2,\ldots.$$

Воспользовавшись формулой 3.4 (22) из [1], находим

$$\dot{Q}^{\mu}_{\mu+2j}(0) = -\sqrt{\pi}\, 2^{\mu}(-1)^j \cos\mu\pi\, \Gamma(\mu+1+j)\, \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}+j\right).$$

Далее, после дифференцирования (36) по ν и фиксации $\nu = \mu + 2j$ получим

$$\frac{d}{d\nu} \dot{P}^{\mu}_{\nu}(0)\Big|_{\nu=\mu+2j} = -\frac{\Gamma(2\mu+2j+1)}{2^{\mu}\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+j\right)}.$$

Учитывая все это, из (26) и (27) выводим такое интегральное преобразование для функций $f(\theta)$, заданных на отрезке $0 \le \theta \le \pi/2$:

$$f_j = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{\mu}\theta\, C^{\lambda}_{2j}(\cos\theta) \sin\theta\, f(\theta)\, d\theta, \qquad \lambda = \mu + \frac{1}{2},$$

$$f(\theta) = \frac{\sqrt{\pi}\, 2^{2\lambda}\, \Gamma(\lambda)}{\Gamma(1-\lambda)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j+\lambda)(-1)^j j!}{\Gamma(2j+2\lambda)} \sin^{\mu}\theta\, C^{\lambda}_{2j}(\cos\theta)\, f_j. \tag{37}$$

4. Дальше нам понадобится еще одно интегральное преобразование, вытекающее из решения задачи Штурма − Лиувилля (1), когда $r(x) = 1$, $x = r$, параметр λ заменен на λ^2, а в операторе (2) $p(x) = p(r) = r^2$, $q(x) = q(r) = -1/4$. В результате получаем краевые задачи

$$\left[r^2 v_m'(r,\lambda)\right]' + \left(\frac{1}{4} + \lambda^2\right) v_m(r,\lambda) = 0, \qquad a_0 < r < a_1, \qquad m = 0,1,$$

$$l_j^m v_m(r,\lambda) = 0, \quad i = 0,1, \quad l_i^0 v(r) = v(a_i), \quad l_i^1 v(r) = h_i v(a_i) + v'(a_i). \tag{38}$$

Это частный случай ($k = 0$) краевых задач, решенных в [8]. Поскольку из полученных там решений определить решения задач (38) путем предельного перехода $k \to 0$ затруднительно, будем решать краевые задачи (38) с использованием схемы **п.** 1. Непосредственно проверкой можно убедиться, что фундаментальной системой решений дифференциального уравнения из (38) будут функции

$$\begin{Bmatrix} \varphi_0(r,\lambda) \\ \chi_0(r,\lambda) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{Bmatrix} A_{\lambda}(r) \\ B_{\lambda}(r) \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} A_{\lambda}(r) \\ B_{\lambda}(r) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin(\lambda \ln r) \\ \cos(\lambda \ln r) \end{Bmatrix}. \tag{39}$$

Собственные функции краевых задач (38) согласно (4) будут определяться формулой

$$v_m(r,\lambda) = \varphi_0(r,\lambda)\, l_0^m \chi_0 - \chi_0(r,\lambda)\, l_0^m \varphi_0, \qquad m = 0,1. \tag{40}$$

Применение граничных функционалов l_i^m к функциям (39) эквивалентно применению к функциям $A_{\lambda}(r)$ и $B_{\lambda}(r)$ таких функционалов:

$$\tilde{l}_i^0 v(r) = v(a_i), \qquad i = 0,1, \qquad \tilde{l}_i^1 v(r) = a_i^{-1} \text{æ}_i v(a_i) + v'(a_i)\,, \tag{41}$$

где

$$\text{æ}_i = a_i h_i - 1/2, \qquad i = 0,1\,, \tag{42}$$

поэтому вместо (40) можем записать

$$v_m(r,\lambda) = r^{-1/2}\left[A_\lambda(r)\,\tilde{l}_0^m B_\lambda - B_\lambda(r)\,\tilde{l}_0^m A_\lambda\right]. \tag{43}$$

Далее, используя (41) и (39), находим, что

$$\begin{Bmatrix} \tilde{l}_i^1 A_\lambda \\ \tilde{l}_i^1 B_\lambda \end{Bmatrix} = \frac{1}{a_i}\begin{Bmatrix} \text{æ}_i A_\lambda(a_i) + \lambda B_\lambda(a_i) \\ \text{æ}_i B_\lambda(a_i) - \lambda A_\lambda(a_i) \end{Bmatrix}, \tag{44}$$

и собственные функции (43) записываем в виде

$$\begin{Bmatrix} v_0(r,\lambda) \\ a_0 v_1(r,\lambda) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{r}}\begin{Bmatrix} \sin(\lambda \ln(r/a_0)) \\ \text{æ}_0 \sin(\lambda \ln(r/a_0)) - \lambda\cos(\lambda\ln(r/a_0)) \end{Bmatrix}. \tag{45}$$

Квадраты норм этих собственных функций будут определяться формулами

$$\| v_0(r,\lambda)\|^2 = \int_{a_0}^{a_1} \frac{\sin^2(\lambda\ln(r/a_0))}{r}\,dr = \frac{\gamma}{2}, \qquad \gamma = \ln\frac{a_1}{a_0}\,, \tag{46}$$

$$4a_0^2 \| v_1(r,\lambda)\|^2 = 2(\text{æ}_0^2 + \lambda^2)\,\gamma + \lambda^{-1}(\lambda^2 - \text{æ}_0^2)\sin 2\lambda\gamma - \text{æ}_0 \sin^2\lambda\gamma\,. \tag{47}$$

Во всех приведенных формулах (40)–(47) вместо λ следует подставить собственные числа λ_k, $k = 0,1,2,\ldots$.

Собственные числа λ_k для задачи Штурма – Лиувилля (38) при $m = 0$ согласно (5) с учетом (38), (39) будут являться корнями трансцендентного уравнения

$$A_\lambda(a_1)B_\lambda(a_0) - B_\lambda(a_1)A_\lambda(a_0) = 0\,,$$

для которого с учетом второго из равенств (39) корни λ_k находим в явном виде:

$$\lambda_k = \gamma^{-1} k\pi, \qquad k = 0,1,2,\ldots. \tag{48}$$

Трансцендентное уравнение для собственных чисел λ_k краевой задачи Штурма – Лиувилля (38) при $m = 1$ в общем случае удалось привести к известному [6] трансцендентному уравнению

$$\operatorname{tg}\lambda\gamma = \lambda(\text{æ}_1 - \text{æ}_0)\left[\lambda^2 + \text{æ}_0\text{æ}_1\right]^{-1}. \tag{49}$$

Асимптотическое решение этого уравнения при больших значениях k, как легко убедиться из (49), определяется формулой (48).

Согласно **п.** 1 построенные решения краевых задач (38) определяют интегральное преобразование для функций $f(r)$, заданных на отрезке $[a_0, a_1]$:

$$f_k^m = \int_{a_0}^{a_1} v_m(r,\lambda_k) f(r)\,dr, \qquad f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_m(r,\lambda_k)}{\| v_m(r,\lambda_k)\|^2} f_k^m, \quad m = 0,1\,, \tag{50}$$

и, в частности, при $m = 0$ будем иметь

$$f_k^0 = \int_{a_0}^{a_1} \frac{\sin\left(\lambda_k \ln\dfrac{r}{a_0}\right)}{\sqrt{r}} f(r)\,dr, \qquad f(r) = \frac{2}{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\lambda_k\ln\dfrac{r}{a_0}\right)}{\sqrt{r}} f_k^0, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{\gamma}.$$

Рассмотрим еще случай, когда в (38) принять $h_0 = h_1 = 0$. Соответствующая собственная функция, которую обозначим через $v_*(r,\lambda)$, должна удовлетворять граничному условию

$$v'_*(a_i,\lambda_k) = 0, \qquad i = 0,1. \tag{51}$$

На основании (45), (51) в этом случае собственную функцию можно записать в виде

$$2\sqrt{r}\, v_*(r,\lambda_k) = \sin\left(\lambda_k \ln\frac{r}{a_0}\right) + 2\lambda_k \cos\left(\lambda_k \ln\frac{r}{a_0}\right),$$

причем собственные числа λ_k здесь находим в силу (49) в явном виде и определяем по формуле (48). В этом частном случае интегральное преобразование (50) приобретает вид

$$f_k^* = \int_{a_0}^{a_1} v_*(r,\lambda_k) f(r)\, dr, \qquad f(r) = \frac{2}{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_*(r,\lambda_k)}{\frac{1}{4}+\lambda_k^2}\cdot f_k^*, \qquad \lambda_k = \frac{\pi k}{\gamma}.$$

5. При использовании полученных в предыдущих пунктах интегральных преобразований важным моментом является проверка сходимости рядов, входящих в формулы обращения, и в случае их слабой сходимости – необходимость улучшения последней. Для этого нужно располагать асимптотическим (для больших значений j) решением трансцендентных уравнений, из которых находятся собственные числа ν_j, $j = 0,1,2,\ldots$.

Чтобы получить асимптотическое решение, например, трансцендентного уравнения (15), следует располагать асимптотическими формулами для больших значений параметра ν функций $P_\nu^\mu(\cos\theta)$, $Q_\nu^\mu(\cos\theta)$ и их производных по θ, т. е.

$$\dot{P}_\nu^\mu(\cos\theta) = \frac{d}{d\theta} P_\nu^\mu(\cos\theta) =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)(\sin\theta)^{\mu-1}}{\Gamma(\nu-\mu+1)2^\mu \sec\theta} F\left(1+\nu+\mu, \mu-\nu; 1+\mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\nu+\mu+2)(\sin\theta)^{\mu+1}}{\Gamma(\nu-\mu)\Gamma(\mu+2)2^{\mu+1}} F\left(2+\nu+\mu, 1+\mu-\nu; 2+\mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right), \tag{51}$$

$$4\dot{Q}_\nu^\mu(\cos\theta) = 2\Gamma_\nu^\mu \operatorname{tg}^\mu\frac{\theta}{2}\operatorname{cosec}\theta\, F\left(-\nu, \nu+1; \mu+1; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) -$$

$$- \cos\mu\pi\,\Gamma(\mu)\operatorname{ctg}^\mu\frac{\theta}{2}\operatorname{cosec}\theta\, F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) -$$

$$- \Gamma_\nu^\mu \nu(\nu+1)(\mu+1)^{-1}\operatorname{tg}^\mu\frac{\theta}{2}\sin\theta\, F\left(1-\nu, \nu+2; \mu+2; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) -$$

$$- \cos\mu\pi\Gamma(\mu)\nu(\nu+1)(1-\mu)^{-1}\operatorname{ctg}^\mu\frac{\theta}{2}\sin\theta\, F\left(1-\nu, \nu+2; 2-\mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right), \tag{52}$$

$$\Gamma_\nu^\mu = \Gamma(-\mu)\,\Gamma(1+\nu+\mu)\,\Gamma^{-1}(1+\nu-\mu).$$

Формула (51) получена дифференцированием (22), а формула (52) – дифференцированием формулы 3.4 (10) из [1] после замены $x = \cos\theta$.

В работе [9] для асимптотического решения аналогичных трансцендентных уравнений использованы известные асимптотические формулы 3.9.1 (1) и 3.9.2 (2) из [1] для больших значений нижних индексов функций Лежандра. Этого оказалось достаточно, т. к. при целых верхних индексах дифференцирование этих функций эквивалентно изменению верхнего индекса на целое число. В рассматриваемом случае верхний индекс μ не является целым, поэтому указанные формулы оказываются бесполезными. Таким образом, возникает необходимость получения асимптотических формул для функций (51) и (52) для больших значений ν. Метод, использованный при получении формул 3.9.1 (1) и 3.9.2 (2) из [1], оказывается неприемлемым. Предлагаем другой способ, основанный на предварительном получении асимптотической формулы для функции Гаусса

$$u(\theta) = F\left(\nu + \alpha + 1, -\nu + \alpha; 1 + \alpha + \beta; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \tag{53}$$

при больших значениях ν. Такие формулы получены в [5] для случая, когда аргумент функции Гаусса больше единицы. В нашем случае он меньше единицы, поэтому воспользоваться результатами работы [5] не представляется возможным. Здесь для получения асимптотических формул для функции Гаусса (53) используем метод Лиувилля − Стеклова, как в работе [11] при получении асимптотических формул для ортогональных многочленов. Согласно этому методу следует вывести уравнение, которому удовлетворяет функция (53). Делая замену $z = \sin^2 \frac{\theta}{2}$ в дифференциальном уравнении, которому удовлетворяет $F(\nu + \alpha + 1, \alpha - \nu, 1 + \alpha + \beta; z)$ (формула 2.1 (1) из [1]), получаем

$$u^{\bullet\bullet}(\theta) + \left[(1 + 2\alpha)\operatorname{ctg}\theta + 2\beta\operatorname{cosec}\theta\right]u^{\bullet}(\theta) + \left[\nu(\nu + 1) - \alpha(\alpha + 1)\right]u(\theta) = 0 .$$

Переходя к функции

$$y(\theta) = \left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^{\beta} (\sin\theta)^{\alpha + 1/2} F\left(\nu + \alpha + 1, \alpha - \nu; 1 + \alpha + \beta; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right), \tag{54}$$

получаем дифференциальное уравнение

$$y^{\bullet\bullet}(\theta) + \left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 y(\theta) = q(\theta)y(\theta), \qquad 0 < \theta < \pi , \tag{55}$$

$$q(\theta) = \left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{4}\right)\operatorname{cosec}^2\theta - 2\alpha .$$

Общим решением уравнения (55) будет функция (сравнить формулу (8.61.3) из [11])

$$y(\theta) = c_1 \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta + c_2 \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta +$$
$$+ \frac{1}{2\nu + 1}\int_{\pi/2}^{\theta} \sin\left[\left(\nu + \frac{1}{2}\right)(\theta - t)\right] q(t)y(t)\,dt , \tag{56}$$

где c_1, c_2 − произвольные постоянные. Можно убедиться, что интегральное слагаемое в (56) вместе со своей производной при $\theta = \frac{\pi}{2}$ обращается в нуль. Это позволяет выразить произвольные константы через $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $y^{\bullet}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, которые согласно формуле (54) примут вид

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = F\left(\nu + \alpha + 1, \alpha - \nu; 1 + \alpha + \beta; \frac{1}{2}\right),$$

$$y^{\bullet}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \beta F\left(\nu+\alpha+1, \alpha-\nu; 1+\alpha+\beta; \frac{1}{2}\right) - (\nu-\alpha)(\nu+\alpha+1)\times$$

$$\times\left[2(1+\alpha+\beta)\right]^{-1} F\left(\nu+\alpha+2, 1+\alpha-\nu; 2+\alpha+\beta; \frac{1}{2}\right). \qquad (57)$$

В результате вместо (56) будем иметь

$$y(\theta) = y\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right] -$$

$$-\frac{1}{\nu+\frac{1}{2}}\, y^{\bullet}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{2\nu+1}\int_{\pi/2}^{\theta}\sin\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\theta-t)\right]q(t)y(t)\,dt. \qquad (58)$$

Теми же соображениями, которые использованы при получении формулы (8.61.6) из [11], получаем, что главный член в асимптотическом разложении функции (54) при $\nu\to\infty$ будет содержаться в первых двух слагаемых в правой части формулы (58). Значения $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $y^{\bullet}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, задаваемые формулами (57), в случае $\beta=0$, $\alpha=\mu$ и $u(\theta)=F\left(\nu+\mu+1, \mu-\nu; 1+\mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$ вычисляются по формуле 2.8 (50) из [1]. Подставив полученное выражение в (58), записываем асимптотическое равенство

$$\sqrt{\pi}\,(\sin\theta)^{\mu+1/2}\, F\left(\nu+\mu+1, \mu-\nu; 1+\mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= \Gamma(1+\mu)\cos\left\{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}-\mu\frac{\pi}{2}\right\}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\mu-1/2}\left[1+O(\nu^{-1})\right]. \qquad (59)$$

В случае $\beta=0$, $\alpha=\mu+1$ и $u(\theta)=F\left(\nu+\mu+2, \mu+1-\nu; 2+\mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$ аналогично получаем такое асимптотическое равенство:

$$(\sin\theta)^{\mu+3/2} F\left(\nu+\mu+2, \mu+1-\nu; 2+\mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= \pi^{3/2}\Gamma(2+\mu)\cos\left\{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}-\mu\frac{\pi}{2}\right\}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\mu-3/2}\left[1+O(\nu^{-1})\right]. \qquad (60)$$

Используя равенства (59) и (60), на основании формул (22) и (51), а также асимптотической формулы 1.18 (4) из [1] получаем требуемые асимптотические равенства для $P_\nu^\mu(\cos\theta)$ и $\dot{P}_\nu^\mu(\cos\theta)$:

$$\sqrt{\pi\sin\theta}P_\nu^\mu(\cos\theta) = 2^\mu\cos\left\{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}-\mu\frac{\pi}{2}\right\}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\mu-1/2}\left[1+O(\nu^{-1})\right],$$

$$\sqrt{\pi\sin\theta}\dot{P}_\nu^\mu(\cos\theta) = 2^{\mu+1}\sin\left\{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}-\mu\frac{\pi}{2}\right\}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\mu+1/2}\left[1+O(\nu^{-1})\right]. \quad (61)$$

Для получения аналогичных формул для $Q_\nu^\mu(\cos\theta)$ и $\dot{Q}_\nu^\mu(\cos\theta)$ следует в формулах (57) и (58) рассмотреть случай $\beta=\mu$, $\alpha=0$, т. е.

$$u(\theta) = F\left(\nu+1, -\nu; 1+\mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Здесь для подсчета $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $y^{\bullet}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ согласно формулам (57) следует воспользоваться формулами 7.3.7 (8) и 7.3.7 (10) из [10]. После подстановки полученных выражений для $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $y^{\bullet}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ в (58) имеем следующее асимптотическое равенство:

$$2^{\mu}\sqrt{\pi}\,\mathrm{tg}^{\mu}\frac{\theta}{2}\sqrt{\sin\theta}\,F\left(\nu+1,-\nu;1+\mu;\sin^{2}\frac{\theta}{2}\right)=$$

$$=\Gamma(\mu+1)\cos\left\{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}-\mu\frac{\pi}{2}\right\}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{-\mu-1/2}\left[1+O(\nu^{-1})\right]. \qquad (62)$$

В случае $\beta=\mu$, $\alpha=1$, т. е. $u(\theta)=F\left(\nu+2,1-\nu;2+\mu;\sin^{2}\frac{\theta}{2}\right)$, для вычисления $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $y^{\bullet}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ согласно (57) использованы формулы 7.3.7 (10) и 7.3.7 (12) из [10]. Подставляя эти выражения в (58), получаем асимптотическое равенство

$$2^{\mu}\sqrt{\pi}\,\mathrm{tg}^{\mu}\frac{\theta}{2}(\sin\theta)^{3/2}\,F\left(\nu+2,1-\nu;2+\mu;\sin^{2}\frac{\theta}{2}\right)=$$

$$=\Gamma(\mu+2)\sin\left\{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}-\mu\frac{\pi}{2}\right\}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{-\mu-3/2}\left[1+O(\nu^{-1})\right]. \qquad (63)$$

Из формул (62) и (63) путем замены μ на $-\mu$ получаем асимптотические равенства и для $F\left(\nu+1,-\nu;1-\mu;\sin^{2}\frac{\theta}{2}\right)$, $F\left(\nu+2,1-\nu;2-\mu;\sin^{2}\frac{\theta}{2}\right)$. Полученные асимптотические равенства для функций Гаусса позволяют получить аналогично асимптотические равенства для $Q_{\nu}^{\mu}(\cos\theta)$ и $\dot{Q}_{\nu}^{\mu}(\cos\theta)$:

$$\sqrt{\sin\theta}\,Q_{\nu}^{\mu}(\cos\theta)=$$

$$=-\sqrt{\pi}\,2^{\mu-1}\sin\left\{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}-\mu\frac{\pi}{2}\right\}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\mu-1/2}\left[1+O(\nu^{-1})\right],$$

$$\sqrt{\sin\theta}\,\dot{Q}_{\nu}^{\mu}(\cos\theta)=$$

$$=-\sqrt{\pi}\,2^{\mu}\cos\left\{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}-\mu\frac{\pi}{2}\right\}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\mu+1/2}\left[1+O(\nu^{-1})\right]. \qquad (64)$$

Выведенные асимптотические представления для больших значений ν позволяют легко получить асимптотические решения трансцендентных уравнений (15) и (24). Например, уравнение (15) при $m=0$ будет иметь вид

$$\Omega_{\nu,\mu}^{0}\equiv P_{\nu}^{\mu}(\cos\omega_{0})Q_{\nu}^{\mu}(\cos\omega_{1})-P_{\nu}^{\mu}(\cos\omega_{1})Q_{\nu}^{\mu}(\cos\omega_{0})=0\,, \qquad (65)$$

а при $m=1$ с учетом (13) его можно записать в виде

$$\Omega_{\nu,\mu}^{1}\equiv h_{1}h_{0}\Omega_{\nu,\mu}^{0}+h_{0}\left[P_{\nu}^{\mu}(\cos\omega_{0})\dot{Q}_{\nu}^{\mu}(\cos\omega_{1})-\right.$$

$$\left.-\dot{P}_{\nu}^{\mu}(\cos\omega_{1})Q_{\nu}^{\mu}(\cos\omega_{0})\right]+h_{1}\left[\dot{P}_{\nu}^{\mu}(\cos\omega_{0})Q_{\nu}^{\mu}(\cos\omega_{1})-\right.$$

$$\left.-P_{\nu}^{\mu}(\cos\omega_{1})\dot{Q}_{\nu}^{\mu}(\cos\omega_{0})\right]+\dot{P}_{\nu}^{\mu}(\cos\omega_{1})\dot{Q}_{\nu}^{\mu}(\cos\omega_{1})-$$

$$-\dot{P}_{\nu}^{\mu}(\cos\omega_{1})\dot{Q}_{\nu}^{\mu}(\cos\omega_{0})=0\,. \qquad (66)$$

Из анализа асимптотических равенств (61) и (64), следует, что в трансцендентном уравнении (66) главный вклад вносят два последних слагаемых. Подставив туда асимптотические представления для производных, содержащиеся в формулах (61) и (64), получаем уравнение $\sin\left\{\left(\nu_j + \frac{1}{2}\right)(\omega_1 - \omega_0)\right\} = 0$, откуда находим асимптотическое решение трансцендентного уравнения (66):

$$\nu_j = \pi(\omega_1 - \omega_0)^{-1} j, \tag{67}$$

справедливое для больших значений j. Поступая аналогично с трансцендентным уравнением (65), приходим к выводу, что полученное асимптотическое решение (67) справедливо и для него. Таким же образом показываем, что асимптотическое решение трансцендентных уравнений (24) при $m = 0$ и $m = 1$ определяется формулой

$$\nu_j = j\pi\omega^{-1}.$$

6. Проиллюстрируем применение полученных интегральных преобразований на примере построения точного решения задачи стационарной теплопроводности для тела, заполняющего область $a_0 \le r \le a_1$, $0 \le \theta \le \omega$, $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$. Искомую температуру обозначим через $u(r,\theta,\varphi)$. Она должна удовлетворять [4] уравнению

$$(r^2 u')' + \frac{(\sin\theta u^\bullet)^\bullet}{\sin\theta} + \frac{u''}{\sin^2\theta} = 0, \quad a_0 \le r \le a_1,\ 0 \le \theta \le \omega,\ \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1, \tag{68}$$

(здесь штрихом обозначена производная по φ) и граничным условиям

$$h_i u(a_i,\theta,\varphi) + u'(a_i,\theta,\varphi) = g_i(\theta,\varphi), \qquad h_i = \lambda^{-1}\alpha_i, \quad i = 0,1, \tag{69}$$

$$u^\bullet(r,\omega,\varphi) = 0, \qquad u(r,\theta,\varphi_i) = 0, \qquad i = 0,1. \tag{70}$$

Здесь [4] λ – коэффициент теплопроводности; α_i – коэффициент теплоотдачи на сферических поверхностях; $g_i(\theta,\varphi)$ – заданные функции.

Чтобы удовлетворить второму из граничных условий (70), применим (полагая $\varphi_0 = 0$) к сформулированной краевой задаче конечное синус-преобразование Фурье [13]

$$u_n(r,\theta) = \int_0^{\varphi_1} \sin(\mu_n\varphi)\, u(r,\theta,\varphi)\, d\varphi, \qquad \mu_n = \frac{n\pi}{\varphi_1}, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{71}$$

В результате вместо (68)–(70) будем иметь

$$\left[r^2 u_n'(r,\theta)\right]' + \operatorname{cosec}\theta\left[\sin\theta\, u_n^\bullet(r,\theta)\right]^\bullet - \mu_n \operatorname{cosec}^2\theta\, u_n(r,\theta) = 0,$$

$$a_0 < r < a_1, \qquad 0 < \theta < \omega,$$

$$h_i u_n(a_i,\theta) + u_n'(a_i,\theta) = g_{in}(\theta), \qquad i = 0,1, \qquad u_n^\bullet(r,\omega) = 0.$$

К полученной краевой задаче применим интегральное преобразование (26) при $m = 1$, полагая там дополнительно в функционале (13) $h_1 = h_0 = 0$. Тогда для трансформанты

$$u_{nj}(r) = \int_0^{\omega} P_\nu^\mu(\cos\theta)\sin\theta u_n(r,\theta)\, d\theta, \tag{72}$$

где $\mu = \mu_n$, а $\nu = \nu_j$ – собственные числа, совпадающие с корнями уравнения $\dot{P}_\nu^\mu(\cos\omega) = 0$, получим одномерную краевую задачу

$$\left[r^2 u_{nj}'(r)\right]' - \nu_j(\nu_j+1)\, u_{nj}(r) = 0, \qquad a_0 < r < a_1,$$

$$h_i u_{nj}(a_i) + u_{nj}'(a_i) = g_{inj}, \qquad i = 0,1.$$

Для решения этой краевой задачи применим интегральное преобразование (50) при $m = 1$. В результате получим

$$u_{nj}(r) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_1(r,\lambda_k)}{\| v_1(r,\lambda_k)\|^2} \frac{a_0^2 v_1(a_0,\lambda_k)\, g_{0nj} - a_1^2 v_1(a_1,\lambda_k)\, g_{1nj}}{\lambda_k^2 + \frac{1}{4} + v_j(v_j+1)}.$$

После обращения полученной трансформанты по формуле (27) с последующим обращением синус-трансформанты Фурье (71) по известной [13] формуле получаем окончательный вид решения поставленной задачи:

$$u(r,\theta,\varphi) = \frac{2}{\varphi_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{(2\nu+1)\dot{Q}_\nu^\mu(\cos\omega) P_\nu^\mu(\cos\theta)}{\Gamma_{\mu\nu}\dfrac{d}{d\nu}\dot{P}_\nu^\mu(\cos\omega)}\right]_{\nu=\nu_j}^{\mu=\mu_n} \sin\mu_n\varphi\, u_{nj}(r). \qquad (73)$$

Рассмотрим частный случай решенной задачи, когда $\omega = \pi/2$, и область, занятая рассматриваемым телом, представляет собой сферическую оболочку толщиной $a_1 - a_0$ с вырезом $\varphi \in [\varphi_1, 2\pi]$. В этом случае вместо интегрального преобразования (72) следует применить преобразование (37) и решение рассматриваемой задачи вместо (73) запишется так:

$$u(r,\theta,\varphi) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\varphi_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda)(2j+\lambda)(-1)^j j!}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(2j+2\lambda)} C_{2j}^{\lambda}(\cos\theta)\sin\mu_n\varphi\, u_{nj}(r),$$

где $\lambda = 1/2 + \mu_n$.

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – Т. 1. – Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1965. – 294 с.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1965. – 295 с.
3. *Грей Э., Мэтьюз Г. Б.* Функции Бесселя и их приложение к физике и механике. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 372 с.
4. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. – М.: Высш. шк., 1979. – 181 с.
5. *Кратцер А., Франц В.* Трансцендентные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 466 с.
6. *Мартыненко Н. А., Пустыльников Л. М.* Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1986. – 303 с.
7. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 343 с.
8. *Попов Г. Я.* Новые интегральные преобразования с применением к некоторым краевым задачам математической физики // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1642–1652.
9. *Попов Г. Я.* О некоторых интегральных преобразованиях и об их применении к решению краевых задач математической физики // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 6. – С. 810–819.
10. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986. – 800 с.
11. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
12. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 5 т. – М.–Л.: Гостехтеориздат, 1951. – Т. 4. – 804 с.
13. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 667 с.
14. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка: В 2 ч. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – Ч. 1. – 278 с.

ПРО ОДИН МЕТОД ОТРИМАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ДО ПОБУДОВИ ТОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Викладається спосіб виведення інтегральних перетворень, що базується на розв'язанні регулярних задач Штурма − Ліувілля з наступним застосуванням теореми розкладання Стеклова. Отримано ряд нових інтегральних перетворень, які використано до побудови точних розв'язків деяких крайових задач математичної фізики. Багато уваги приділено асимптотичному розв'язуванню трансцендентних рівнянь, з яких визначаються власні числа задачі Штурма − Ліувілля, що входять у ядра отриманих інтегральних перетворень. Це зумовило необхідність отримання нових асимптотичних розвинень для великих значень параметрів гіпергеометричної функції Гаусса.

ON ONE METHOD FOR OBTAINING INTEGRAL TRANSFORMS USING IN CONSTRUCTION PRECISE SOLUTIONS TO MATHEMATICAL PHYSICS BOUNDARY-VALUE PROBLEMS

The method of integral transform obtaining, based on solving the regular Storm − Liouville problems with the subsequent use of Steklov expansion theorem, is stated. A number of new integral transforms is obtained. They are applied to construction of the exact solutions to some mathematical physics boundary-value problems. A lot of place is given to the asymptotic solution of transcendental equations, from which the eigenvalues of Storm − Liouville problems, included in the kernels of the obtained integral transforms, are found. It has required obtaining new asymptotic expansions for large values of Gauss hypergeometric function parameters.

Ин-т математики, экономики и механики
Одесс. нац. ун-та им. И. И. Мечникова, Одесса

Получено
28.06.03