УДК 393.3

В. Ф. Чекурін

МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ТОМОГРАФІЇ ТЕНЗОРНИХ ПОЛІВ У ТВЕРДИХ ТІЛАХ ІЗ ЗАЛИШКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Розглядаються математичні моделі та варіаційний підхід до розв'язування обернених задач томографічної реконструкції тензорних полів напружень і деформацій у твердих тілах із залишковими напруженнями. При формулюванні обернених задач використовуються три складові – математична модель напруженого стану тіл із несумісними деформаціями, експериментальні дані, отримані шляхом зондування об'єктів зовнішніми фізичними полями, та математична модель взаємодії зондувального випромінювання з тілом. Підхід поєднує теоретико-експериментальний і томографічний методи неруйнівного визначення полів напружень і деформацій на основі даних вимірювання деяких інтегральних параметрів цих полів.

1. Стан проблеми. Задачу встановлення напружено-деформованого стану твердих тіл доводиться розв'язувати кожен раз, коли виникає потреба визначення їх несучої здатності, деформативності, міцності, стійкості, інших експлуатаційних характеристик. Такі проблеми виникають у найрізноманітніших галузях фундаментальних і прикладних наук, а також у технічних застосуваннях – від машинобудування й будівництва до мікроелектроніки й комп'ютерних технологій. Для підвищення достовірності апріорних оцінок характеристик технічних об'єктів, точності прогнозування їх поведінки за різних умов експлуатації і визначення залишкового ресурсу вимагається все більше інформації про актуальний стан, зокрема – про розподіли компонент тензорів напружень і деформацій як на поверхні, так і в об'ємі тіл.

Традиційний шлях визначення розподілів напружень і деформацій, який використовується у механіці деформівного твердого тіла, – це аналітичне, а частіше чисельне розв'язування прямих задач, сформульованих у рамках відповідних теоретичних моделей. Щоб застосувати цей теоретико-розрахунковий підхід до тіл із залишковими напруженнями, необхідні математичні моделі, які враховують виникнення й еволюцію цих напружень.

Залишкові напруження в реальних об'єктах виникають під час виготовлення матеріалів і виробів, монтажу окремих складових частин в єдине ціле, а також при їх експлуатації. Механічні, теплові, електрофізичні, дифузійні та інші фізичні процеси, які супроводжують виготовлення та експлуатацію виробів, можуть викликати пластичні деформації, фізичну, структурну та фазову неоднорідності, появу дефектів (дислокацій, дисклінацій, розривів суцільності тощо), що й спричиняє залишкові напруження. Тому, щоб отримати замкнену математичну модель для опису напружено-деформованого стану таких об'єктів, до рівнянь механіки слід долучити співвідношення, які описують усі згадані фізичні процеси, врахувавши їх взаємодію з механічними процесами. В результаті отримуємо модель механіки взаємозв'язаних процесів.

Цей напрям механіки деформівного твердого тіла є продуктивним, він інтенсивно розвивається численними науковими школами як в Україні, так і за її межами. Важливі результати тут отримано Я. С. Підстригачем [10] і представниками наукової школи, яку він започаткував. Проте реалізація такого підходу до деяких реальних об'єктів, при виготовленні яких застосовуються технологічні процеси плавлення, кристалізації, зварювання, механічного формування, променеві, термічні та дифузійні обробки тощо, наштовхується на серйозні труднощі.

По-перше, фізичні процеси, які виникають у твердих тілах при високоінтенсивних силовому, струмовому, електромагнітному навантаженнях, неоднорідному нагріві, яким піддаються такі об'єкти під час виготовлення та експлуатації, далеко не завжди вивчені до кінця, тому в багатьох випадках навіть встановлення адекватної математичної моделі стає проблематичним.

По-друге, для числової реалізації прямих задач необхідно задати як функції координат і часу зовнішні механічні навантаження, теплові потоки, струми та інші параметри фізичних полів, з використанням яких здійснюються технологічні процеси чи обробки. Зрозуміло, що реалізація цього завдання для таких складних технологічних процесів є окремою науково-технічною проблемою, вирішення якої у кожному конкретному випадку вимагає значних інтелектуальних і матеріальних затрат.

По-третє, щоб за таким підходом визначити залишкові напруження у тілі, необхідно розв'язати складну нестаціонарну нелінійну задачу механіки взаєзв'язаних процесів, визначаючи попутно просторові розподіли температури, різнорідних фаз, домішок і дефектів, параметрів електромагнітного поля тощо. Оскільки математичний апарат та універсальні методи числової реалізації таких задач, як правило, ще остаточно не розроблено, то кожен раз необхідно здійснювати верифікацію отриманих результатів. З цією метою часто доводиться проводити доволі серйозні експериментальні дослідження для встановлення адекватності запропонованих математичних моделей і методів й оцінки точності розроблених на їх основі алгоритмів розрахунку. Внаслідок цього у таких випадках теоретико-розрахунковий підхід втрачає свою привабливість як засіб, за допомогою якого можна визначати напруження і деформації технічних об'єктів у короткі терміни і без значних матеріальних затрат, які необхідні для підготовки та проведення експериментальних досліджень, обробки й аналізу їх результатів.

У зв'язку з цим стає зрозумілим прагнення частини фахівців, які займаються прикладними дослідженнями та їх впровадженням в інженерну практику, створити методи для визначення напруженого стану елементів конструкцій і приладів, що базуються на фізичних вимірюваннях, які можна інтерпретувати, не залучаючи складні теоретичні моделі, гіпотези та математичні методи.

Однак напруження у твердому тілі є параметром, що не піддається безпосередньому вимірюванню. Тому здебільшого вдаються до експериментального визначення фізичних величин, які пов'язані з напруженнями відомими співвідношеннями, наприклад, деформацій. Цей підхід можна реалізувати, застосовуючи, різноманітні методи тензометрії – механічної, електричної, оптичної тощо, які дозволяють вимірювати деформації на поверхні твердих тіл. При цьому пряме визначення неоднорідного напружено-деформованого стану є можливим лише за умов, коли є відомим характер розподілу деформацій за товщинною координатою, наприклад, у тонкостінних елементах.

Методи механічної й електричної тензометрії, фотопружних покрить та інші методи, які базуються на реєстрації змін стану спеціальних датчиків (вимірювальних перетворювачів), дозволяють визначати деформації об'єкта стосовно його стану на момент встановлення на ньому цих вимірювальних перетворювачів, які надалі деформуються разом з цим об'єктом.

Однак для тіл із залишковими напруження цей метод у більшості практичних випадків неможливо реалізувати, не порушуючи цілісності об'єкта дослідження. Для таких тіл застосовують руйнівні або часткового руйнівні методи, які реалізують шляхом розділення тіла на окремі частини, видалення поверхневих шарів матеріалу, утворення наскрізних або глухих отворів, заглибин різної форми тощо. Інформативним параметром при цьому є деформації об'єкта, які виникають внаслідок вивільнення частини пружної енергії при утворенні нової поверхні. Проте відновлення вихідного напруженого стану тіла на основі даних таких вимірювань вимагає, у свою чергу, застосування тих чи інших теоретичних моделей, формулювання відповідних задач математичної фізики та розробки математичних методів для їх розв'язування.

У деякому наближенні задачу визначення залишкових напружень на основі даних вимірювань, отриманих руйнівним методом, можна сформулювати так: в області $\mathcal{V}$ тіла задано тензорне поле $\varepsilon^0_{ij}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$, $i, j = 1, 2, 3$ (поле вільних деформацій), яке визначає деформацію матеріальної точки з координатою $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$, що виникає при уявному розділенні тіла на незв'язані фізично малі елементи; необхідно визначити поле залишкових напружень $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$. При цьому приходять до задач, аналогічних задачам визначення температурних напружень, які в математичному плані часто бувають значно простішими від відповідних задач теорії взаємозв'язаних процесів.

Неруйнівні методи визначення напружено-деформованого стану твердих тіл реалізують шляхом зондування тіла зовнішнім фізичним полем, яке, проникаючи в товщу об'єкта, змінює свої характеристики внаслідок взаємодії з полем напружень (чи деформацій). Реєструючи зміни характеристик зондувального поля, зумовлені взаємодією із об'єктом, у деяких простих випадках вдається визначити безпосередньо з результатів вимірювання частину компонент шуканого тензорного поля або деякі комбінації цих компонент. Так, просвічуючи об'єкти, що перебувають у плоскому напруженому стані, поляризованим світлом і аналізуючи інтерференційні картини смуг та ізоклін, які при цьому виникають, можна визначити в кожній точці двовимірної області різницю головних значень і орієнтацію головних осей поля деформацій [2]. Використовуючи методи оптичної поляриметрії і спеціальні схеми просвічування, можна визначити осьові напруження в тонких циліндричних оболонках [1].

Для відновлення напружено-деформованого стану у цих випадках застосовують теоретико-експериментальний підхід, суть якого полягає у тому, що результати, отримані шляхом фізичних вимірювань, використовують разом із відповідною математичною моделлю, яка описує напружено-деформований стан. Такий підхід реалізовано, зокрема, стосовно визначення залишкових напружень у тонких циліндричних оболонках як за осесиметричних [9], так і неосесиметричних [12, 18] умов.

Останнім часом у науковій літературі спостерігається значний інтерес до томографічної реконструкції тензорних полів − напружень, деформацій, фізико-механічних характеристик тощо [6]. Ці дослідження значною мірою стимулюються успіхами томографії скалярних параметрів [3]. Методи променевої томографії скалярних полів реалізують шляхом сканування тіла зовнішнім випромінюванням (наприклад, рентгенівським), що проникає в тіло у вигляді паралельного пучка (променя). Зміну параметрів зондувального поля внаслідок його взаємодії з тілом за механізмами поглинання чи розсіювання виражають через інтеграл від шуканого скаляра вздовж променя. Вимірюючи параметри зондувального променя перед входом у тіло і після виходу з нього, визначають значення променевого інтеграла для кожного напрямку зондування. Скануючи тіло в достатньо представницькій множині напрямків і використовуючи теорему Радона про обернення променевого перетворення [3], наближено відновлюють шукане скалярне поле.

У випадку тензорних полів відновленню підлягають просторові розподіли декількох скалярних компонент. Тому у цьому випадку однієї множини променевих інтегралів, очевидно, недостатньо й відомі методи томографії скалярного поля не вдається безпосередньо застосувати для тензорних полів. Щоб розробити метод томографічної реконструкції тензорних полів, що базується на оберненні променевого перетворення, потрібно створити таку теоретичну базу [20]:

− обґрунтувати мінімальну кількість даних, необхідних для відновлення усіх компонент тензора напружень у тілі;

− звести математичну модель взаємодії зондувального випромінювання із шуканим тензорним полем до системи променевих інтегралів від його компонент;

– створити математичний апарат для відновлення просторового розподілу всіх компонент тензорного поля за системою променевих інтегралів, заданих на множині напрямків зондування.

Нижче розглянемо метод неруйнівного визначення напружено-деформованого стану твердих тіл із залишковими напруженнями, у який поєднано теоретико-експериментальний і томографічний підходи. Метод базується на трьох складових:

– результати фізичних вимірювань змін інформативних параметрів зовнішнього зондувального поля, зумовлених його взаємодією з деформованим тілом,

– математична модель взаємодії зондувального випромінювання з деформованим твердим тілом, яка пов'язує вимірювальні інформативні параметри з функціоналами від компонент тензорного поля, яке підлягає відновленню,

– математична модель напружено-деформованого стану об'єкта.

2. Геометрична модель залишкових напружень. Залишкові напруження у твердих тілах здебільшого пов'язані зі структурною мікронеоднорідністю матеріалу, набутою об'єктом у процесі його виготовлення та експлуатації. Макроскопічним проявом залишкових напружень, як зазначалось, є деформування тіла після його розділення на окремі частини, які потім неможливо скласти в суцільне тіло, не деформуючи ці частини. Тобто деформації, які виникають при розділенні такого тіла, є несумісними.

Цей факт можна використати для побудови математичної моделі залишкових напружень. У працях Кренера [7] при побудові континуальної теорії дислокацій у твердих тілах застосовується уявлення про неевклідовість внутрішньої метрики тіл зі структурними неоднорідностями. Питання застосування геометричних підходів до побудови математичних моделей механіки деформівного твердого тіла входили до кола наукових інтересів Я. С. Підстригача. Зокрема, у кінці 80-х років ним був організований спеціальний проблемний науковий семінар, на якому жваво обговорювали ці питання. Учасниками цього семінару були представники Львова й інших наукових центрів. Пощастило брати участь у роботі семінару й автору цієї статті.

Розглянемо ізотропне макроскопічно однорідне тверде тіло $\mathcal{B}$, яке за відсутності зовнішнього силового навантаження та інших фізичних впливів при незмінній температурі T перебуває у стані термодинамічної й механічної рівноваги. Цей стан називатимемо актуальним станом тіла.

У континуальному наближенні розглядатимемо тіло $\mathcal{B}$ як зв'язний многовид матеріальних точок $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$, вкладений у тривимірний евклідовий простір $\mathbb{E}^3$. Геометричним образом матеріальної точки $\mathcal{X}$ є точка тривимірного евклідового простору – місце, яке займає в $\mathbb{E}^3$ ця матеріальна точка. Множина місць усіх матеріальних точок тіла $\mathcal{B}$ утворює зв'язну область простору $\mathcal{V} \subset \mathbb{E}^3$, яку називатимемо конфігурацією тіла у цьому стані. Введемо систему координат $\mathcal{K} = \{x^i\}$, $i = 1, 2, 3$, яка визначає координати матеріальних точок у просторі. Оскільки актуальна конфігурація $\mathcal{V}$ є евклідовою, то систему $\mathcal{K}$ можна ввести, виразивши радіус-вектори $\mathbf{r}$ місць, які займають в актуальній конфігурації матеріальні точки $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$, через координати x^i цієї матеріальної точки: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)$. Відображення $\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)$ вибиратимемо взаємно однозначним і достатньо гладким. Зокрема, можна розглядати глобальну декартову систему координат, для якої $\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3) = x^i \mathbf{e}_i$, де $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – ортонормований векторний базис*.

* Тут і надалі використовується правило підсумовування за парою однакових індексів.

У тілі $\mathcal{B}$ в його актуальному стані існують внутрішні напруження. Тензор напружень Коші у введеній системі координат визначається компонентами σ^{ij}, $i,j \in \{1,2,3\}$. Наявність напружень приводить до того, що сусідні матеріальні частинки $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2 \in \mathcal{B}$, що розділені елементарною площинкою $\mathbf{n}dS$, взаємодіють між собою з силою $\sigma^{ij}n_j\,dS$, де dS − площа елементарної площинки, $\mathbf{n} = \{n_j\}$ − її нормаль. Поле напружень $\sigma^{ij}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$, неоднорідне, оскільки на поверхні $\partial\mathcal{V}$, що обмежує область $\mathcal{V}$, яку займає тіло $\mathcal{B}$, виконується умова

$$\sigma^{ij}\nu_j\Big|_{\partial\mathcal{V}} = 0\,, \tag{1}$$

де $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_j\}$ − зовнішня нормаль до $\partial\mathcal{V}$, а в області $\mathcal{V}$ компоненти тензора напружень Коші σ^{ij} задовольняють рівняння рівноваги

$$\nabla_j\sigma^{ij} = 0\,. \tag{2}$$

Тут ∇_j − оператор коваріантного диференціювання за лаґранжевими координатами x^j в актуальній конфігурації.

Тіло із залишковими напруженнями має деяку потенціальну (пружну) енергію Π, зумовлену силовою взаємодією різних його частин. За своїм фізичним змістом пружна енергія Π − невід'ємно означений функціонал від поля напружень $\sigma^{ij}(\mathbf{r})$ в області $\mathcal{V}$. Поділ такого тіла на окремі частини, що не взаємодіють, спричинить вивільнення деякої кількості цієї енергії. При цьому, внаслідок прагнення системи забезпечити виконання умов (1) на новоутвореній поверхні та рівнянь (2) в об'ємі цих частин, відбудеться перерозподіл поля напружень у кожній із частин. Часткове зняття напружень за незмінної температури T при утворенні нової вільної поверхні призведе до деформації частин тіла, так що в евклідовій метриці неможливо було б скласти із окремих частин суцільне тіло, не деформуючи ці частини. Можна, звичайно, побудувати метрику, в якій частини тіла будуть щільно прилягати одна до одної, однак сам метричний тензор буде при цьому залежним від координат і розривним на поверхні поділу. Продовжуючи уявно процес поділу тіла $\mathcal{B}$ і зберігаючи температуру T, прийдемо до стану, в якому залишкові напруження σ^{ij} повністю щезають, а потенціальна енергія системи матеріальних точок $\mathcal{X}$, що складають тіло, перетвориться у нуль. Зрозуміло, що і в цьому стані не можна скласти із окремих частин суцільне тіло, не змінюючи термодинамічного стану. Тобто множина матеріальних точок $\mathcal{X}$, з яких складається тіло $\mathcal{B}$, не утворює в цьому стані суцільного тіла. Однак можна припустити, що існує метрика (неевклідова), в якій конфігурація тіла $\mathcal{B}$, тобто множина місць $\mathcal{V}_0$, що займають матеріальні точки $\mathcal{X}$ тіла в цьому стані, утворює зв'язаний, достатньо гладкий многовид. Метрику цієї конфігурації назвемо внутрішньою метрикою тіла із залишковими напруженнями. Побудуємо рівняння, які визначають залишкові напруження в тілі, виходячи із його внутрішньої метрики.

Уведемо компоненти деформації $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$, які визначають перехід тіла із відлікової $\mathcal{V}_0$ в актуальну $\mathcal{V}$ конфігурацію:

$$\varepsilon_{ij} = (g_{ij} - g^0_{ij})\,/\,2\,. \tag{3}$$

Тут g_{ij} і g^0_{ij} − елементи базисних матриць введеної матеріальної системи координат у конфігураціях $\mathcal{V}$ і $\mathcal{V}_0$ відповідно, які є компонентами метричних тензорів $\mathbf{g}$ і $\mathbf{g}_0$ конфігурацій $\mathcal{V}$ і $\mathcal{V}_0$ стосовно локальних базисів матеріальної системи координат у цих конфігураціях. Оскільки метрика актуальної конфігурації є евклідовою, її метричний тензор є одиничним тензором другого рангу, а тензор кривини тотожно дорівнює нулеві. Натомість метрика $\mathbf{g}_0$ є неевклідовою, що приводить до співвідношення [2]

$$\mathcal{R}(\mathbf{g}_0) = \mathcal{R}_0 . \tag{4}$$

Тут $\mathcal{R}(\mathbf{g}_0)$ – тензор кривини Рімана – Крістоффеля для метричного тензора $\mathbf{g}_0$; $\mathcal{R}_0$ – тензор четвертого рангу, компоненти R^0_{ijkl} якого не дорівнюють тотожно нулеві в області $\mathcal{V}_0$. Компоненти R_{ijkl} тензора кривини $\mathcal{R}$ виражаються за допомогою нелінійного диференціального оператора другого порядку через компоненти відповідного метричного тензора [4]. Тому надалі вважатимемо, що компоненти g^0_{ij} внутрішнього метричного тензора $\mathbf{g}_0$ тіла із залишковими напруженнями є принаймні двічі диференційовними функціями лаґранжевих координат x^i.

Тензор кривини $\mathcal{R}$ має лише шість незалежних компонент, замість нього можна використати тензор кривини Річі $\mathbf{R}$ – симетричний тензор другого рангу, компоненти R_{kl} якого виражаються через компоненти тензора Рімана – Крістоффеля $\mathcal{R}$ таким чином [4]:

$$R_{kl} = R^i_{.kli} . \tag{5}$$

При цьому з формули (4) випливає, що

$$\mathbf{R}(\mathbf{g}_0) = 2\mathbf{R}_0 . \tag{6}$$

Тут $\mathbf{R}_0$ – деякий симетричний тензор другого рангу, компоненти R^0_{ij} якого не дорівнюють тотожно нулеві в області $\mathcal{V}_0$ і виражаються через компоненти R^0_{ijkl} тензора $\mathcal{R}_0$ співвідношенням

$$R^0_{ij} = \frac{1}{2} g_0^{kl} R^0_{kijl} , \tag{7}$$

де g_0^{kl} – контраваріантні компоненти метричного тензора відлікової конфігурації, які визначаються як елементи матриці, оберненої до матриці коваріантних компонент g^0_{ij}.

Використовуючи співвідношення (3)–(7) і формули, які виражають компоненти тензорів кривини відлікової і актуальної конфігурацій через компоненти метричних тензорів цих конфігурацій [4], отримаємо нелінійні диференціальні рівняння, що пов'язують компоненти деформації ε_{ij} з кривиною відлікової конфігурації. У випадку, коли лаґранжева система координат актуальної конфігурації є декартовою, ці рівняння мають вигляд

$$g_0^{kl}\left(\frac{\partial^2\varepsilon_{lk}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2\varepsilon_{ji}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2\varepsilon_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2\varepsilon_{li}}{\partial x^k \partial x^j} + \Gamma^m_{.ji}\Gamma_{mlk} - \Gamma^m_{.jk}\Gamma_{mli}\right) = -R^0_{ij} . \tag{8}$$

Тут використано позначення

$$\Gamma_{ikl} = -\left(\frac{\partial\varepsilon_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial\varepsilon_{lk}}{\partial x^i} - \frac{\partial\varepsilon_{ik}}{\partial x^l}\right), \quad \Gamma^i_{.kl} = g_0^{ij}\Gamma_{jkl}, \quad \| g_0^{ij} \| = \| \delta_{kl} - 2\varepsilon_{kl} \|^{-1} ,$$

де символом $\| \ldots \|$ позначено матриці відповідних компонент.

Для малих деформацій ε_{ij}, лінеаризуючи (8), отримуємо

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{kk}}{\partial x^i\partial x^j} + \frac{\partial^2\varepsilon_{ji}}{\partial x^k\partial x^k} - \frac{\partial^2\varepsilon_{jk}}{\partial x^i\partial x^k} - \frac{\partial^2\varepsilon_{ki}}{\partial x^k\partial x^j} = -R^0_{ij}. \tag{9}$$

При відсутності зовнішніх полів і фіксованій температурі T тензор напружень σ^{ij} однозначно визначається через компоненти деформації ε_{ij} фізичними співвідношеннями

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ij}(\varepsilon_{kl}), \tag{10}$$

які виражають властивість пружності твердого тіла. У лінійному наближенні ці рівняння мають вигляд

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl}\varepsilon_{kl}, \qquad C^{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta^{ij}\delta^{kl} + G(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}), \tag{11}$$

де C^{ijkl} – тензор модулів пружності ізотропного тіла; G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона.

Формули (1), (2), (8), (10) утворюють систему співвідношень нелінійної математичної моделі для визначення напружено-деформованого стану тіла із залишковими напруженнями. Якщо компоненти тензора кривини R^0_{ij} задано як функції координат, то визначення залишкових напружень зводиться до інтегрування рівнянь (2), (8) з урахуванням співвідношень (10) та умови (1).

Використовуючи рівняння рівноваги (2) разом із лінеаризованими співвідношеннями (9), (11), отримуємо лінійну неоднорідну систему рівнянь стосовно декартових компонент σ^{ij} тензора залишкових напружень

$$\Delta\sigma^{ij} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\delta_{kl}\sigma^{kl}}{\partial x^i\partial x^j} = 2G\left(R^0_{ij} - \delta^{ij}\frac{1}{1-\nu}\delta^{kl}R^0_{kl}\right), \tag{12}$$

праві частини яких виражаються через кривину простору відлікової конфігурації. У цьому наближенні знаходження залишкових напружень полягає у розв'язуванні крайової задачі (12), (1) при заданих функціях $R^0_{ij} = R^0_{ij}(x^1, x^2, x^3)$.

Коли відлікова конфігурація $\mathcal{V}_0$ є евклідовою, то $R^0_{ij} \equiv 0$ і система (12) стає однорідною, тому залишкові напруження у тілі в цьому випадку тотожно дорівнюють нулеві, оскільки граничні умови (1) однорідні.

Диференціальний оператор у лівій частині рівняння (9) є оператором несумісності Ink від компонент тензора деформацій [4]. Отже, і праву частину можна розглядати як тензор несумісності від деякого симетричного тензора другого рангу:

$$\mathbf{R}_0 = \mathrm{Ink}\,\boldsymbol{\varepsilon}_0. \tag{13}$$

Із рівнянь (9), (13) випливає, що існує сумісний тензор деформації

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon^0_{ij}. \tag{14}$$

Співвідношення (14) приймається за вихідний постулат у моделі залишкових напружень, яка базується на концепції вільних деформацій (дисторсій) [8, 9]. У цій моделі e_{ij} називають повними, а ε_{ij} та ε^0_{ij} – пружними та вільними деформаціями відповідно.

Повні деформації e_{ij} визначають актуальний деформований стан тіла стосовно деякої його ненапруженої конфігурації $\mathcal{V}'$, яка, на відміну від

$\mathcal{V}^0$, є евклідовою. Тому існує вектор переміщень $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ із $\mathcal{V}'$ у $\mathcal{V}$ такий, що

$$e_{ij} = (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)/2. \tag{15}$$

Використовуючи рівняння рівноваги (2), а також співвідношення (11), (14), (15), можна записати лінійну систему рівнянь математичної моделі залишкових напружень стосовно компонент вектора переміщень u_i. Праві частини рівнянь цієї системи виражатимуться через компоненти тензора вільних деформацій.

3. Обернені задачі томографії тензорного поля і варіаційний метод їх розв'язування. Перейдемо до формулювання обернених задач томографії залишкових напружень. Методи неруйнівного визначення параметрів напружено-деформованого стану твердого тіла реалізують, зондуючи тіло зовнішнім фізичним полем. Зондувальне поле, проникаючи у тіло, змінює свої характеристики. Реєструючи ці зміни, визначають значення деякого інформативного параметра J, яке залежить від розподілу напружень і/або деформацій в області $v \subset \mathcal{V}$ проникнення зондувального поля в тіло. Виходячи із фізичних уявлень щодо взаємодії зондувального випромінювання з деформованим твердим тілом, вимірювальний параметр J можна пов'язати в математичній моделі з розподілом напружень чи деформацій в області v. Для задач томографії зручно подавати цю модель у вигляді функціонала, який визначає вимірювальний інформативний параметр J:

$$J = \Phi(\sigma^{ij}, v) = \int_v L(\sigma^{ij}(\mathbf{r}))\, d\mathbf{r}. \tag{16}$$

Тут $L(\cdot)$ – диференціальний чи інтегро-диференціальний оператор (у частковому випадку – функція). Зрозуміло, що конкретний вигляд оператора $L(\cdot)$ залежатиме від природи зондувального поля, вибору інформативного параметра J цього поля, обраного способу вимірювання, геометрії вимірювальної системи, прийнятого наближення тощо. Зведення математичної моделі взаємодії зондувального випромінювання з деформованим твердим тілом до інтегрального вигляду (16) здебільшого є нетривіальною задачею відповідних фізичних методів неруйнівного відбору даних про напружено-деформований стан. Скануючи тіло зондувальним полем, отримують множину значень вимірювального параметра J для деякої множини областей зондування $\mathcal{D} = \{v\}$, що можна записати у вигляді відношень $v \to J$. Оскільки при фізичних вимірюваннях неминучі похибки, то, визначаючи за незмінних умов вимірювання інформативний параметр J для однієї і тієї ж області v декілька разів незалежно, щораз отримуватимемо різні значення $J^{\langle\lambda\rangle}$. Дисперсія виміряних значень інформативного параметра залежить від точності апаратури й випадкових чинників. Встановити, котре з виміряних значень є найточнішим, апріорі неможливо, тому доцільно брати до уваги при формулюванні обернених задач усі виміряні значення $J^{\langle\lambda\rangle}$. З огляду на це результати неруйнівного відбору даних про напружений стан об'єкта можна подати у вигляді декількох реалізацій $J^{\langle\lambda\rangle}(v)$ випадкової функції $J(v)$, визначеної на множині областей зондування $\mathcal{D}$:

$$J = J^{\langle\lambda\rangle}(v), \qquad v \in \mathcal{D}, \qquad \lambda \in 1, \ldots, N_v. \tag{17}$$

Тут λ – індекс, який вказує на реалізацію випадкової функції $J(v)$; N_v – кількість незалежних вимірювань параметра J при зондуванні тіла в області $v \subset \mathcal{V}$.

Розглянемо функціонал (16) та експериментальні дані (17) разом із рівнянням (12) та умовами (1), які визначають математичну модель напруженого стану тіла. Обернену задачу томографії тензора напружень у тілі $\mathcal{B}$ сформулюємо так: *знайти в області* $\mathcal{V}$ *тіла розподіл напружень* $\sigma^{ij}(\mathbf{r})$, *який є розв'язком крайової задачі* (12), (1) *і узгоджується у певному смислі з експериментальними результатами, поданими у вигляді залежностей* (17), *і математичною моделлю* (16), *що описує взаємодію зондувального випромінювання із полем напружень у деформованому тілі*.

У цій задачі маємо справу з функціями різної математичної природи: напруження σ^{ij} є детермінованими функціями координат, які задовольняють в області $\mathcal{V}$ певні умови гладкості, натомість експериментальні залежності $J^{\langle\lambda\rangle}(\mathscr{v})$ є реалізаціями деяких випадкових функцій. Тому необхідно ввести критерій для коректного узгодження детермінованого розв'язку задачі з експериментальними даними.

Якщо компоненти тензора кривини $R_{ij}^0(\mathbf{r})$ відомі в області $\mathcal{V}$, то при певних обмеженнях на ці функції і на геометрію поверхні $\partial\mathcal{V}$ розв'язок прямої крайової задачі (12), (1) існує і є єдиним. Будемо шукати розв'язок оберненої задачі у класі функцій $R_{ij}^0(\mathbf{r})$, для яких розв'язок прямої задачі (12), (1) існує і є єдиним. Таким чином, розв'язування сформульованої оберненої задачі зводиться до знаходження такого розподілу компонент тензора кривини $R_{ij}^0(\mathbf{r})$, для якого розв'язок прямої задачі (12), (1) найкраще узгоджується із експериментальними даними (17) і математичною моделлю взаємодії зондувального випромінювання із деформованим тілом (16).

Розв'язок прямої задачі (12), (1) подамо у вигляді суми двох складових: часткового розв'язку неоднорідного рівняння

$$\sigma_0^{ij}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} G^{ijkl}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \cdot R_{kl}^0(\mathbf{r}')\, dV(\mathbf{r}'), \tag{18}$$

де $G^{ijkl}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ – фундаментальний розв'язок рівняння (12), і розв'язку $\tilde{\sigma}^{ij}$ відповідного рівнянню (12) однорідного рівняння, що задовольняє граничну умову

$$F(\mathscr{v}) = \left\{ \frac{1}{V(\mathscr{v})N_{\mathscr{v}}} \sum_{\lambda=1}^{N_{\mathscr{v}}} \left[\Phi(\tilde{\sigma}^{ij} + \sigma_0^{ij}, \mathscr{v}) - J^{\langle\lambda\rangle}(\mathscr{v})\right]^2 \right\}^{1/2}. \tag{19}$$

Розв'язок $\tilde{\sigma}^{ij}$ запишемо у вигляді

$$\tilde{\sigma}^{ij}(\mathbf{r}) = \int_{\partial\mathcal{V}} G_k^{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}') g^k(\mathbf{r}')\, dS(\mathbf{r}'), \quad g^k(\mathbf{r}) = -\,\sigma_0^{kl}(\mathbf{r}) n_l(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial\mathcal{V}, \tag{20}$$

де $G_k^{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ – функція Гріна відповідної однорідної крайової задачі.

Припустимо, що $R_{ij}^0(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathcal{V}$, – один із допустимих розподілів компонент тензора кривини в області тіла, який забезпечує єдиний розв'язок прямої задачі, і нехай $\sigma^{ij}(\mathbf{r}) = \sigma_0^{ij} + \tilde{\sigma}^{ij}$ – розв'язок прямої задачі (12), (1) для цього розподілу. Тоді, обчислюючи за формулою (16) значення функціонала $\Phi(\sigma^{ij}, \mathscr{v})$, можемо обчислити для будь-якої області $\mathscr{v}$ його середньоквадратичне відхилення від виміряних на цій області значень інформативного параметра $J^{\langle\lambda\rangle}(\mathscr{v})$:

$$F(\mathscr{v}) = \left\{ \frac{1}{V(\mathscr{v})N_{\mathscr{v}}} \sum_{\lambda=1}^{N_{\mathscr{v}}} \left[\Phi(\tilde{\sigma}^{ij} + \sigma_0^{ij}, \mathscr{v}) - J^{\langle\lambda\rangle}(\mathscr{v})\right]^2 \right\}^{1/2}. \tag{21}$$

Тут $V(\mathscr{v})$ – об'єм області $\mathscr{v}$.

Функціонал

$$F_{\mathcal{D}} = \left\{ \int\limits_{\mathcal{D}(\boldsymbol{v})} \frac{1}{V(\boldsymbol{v})N_{\boldsymbol{v}}} \sum_{\lambda=1}^{N_{\boldsymbol{v}}} \left[\Phi(\tilde{\sigma}^{ij} + \sigma_0^{ij}, \boldsymbol{v}) - J^{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{v}) \right]^2 d\boldsymbol{v} \right\}^{1/2}$$

приймемо за міру відхилення тензорного поля $\sigma^{ij}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$, від істинного розподілу напружень у тілі, записаного через експериментальні дані у вигляді (17). Із формул (18), (20) випливає, що $F_{\mathcal{D}}$ є функціоналом від $R_{ij}^0(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$. Нехай $R_{ij}^0(\mathbf{r})$ − функція, що забезпечує мінімум функціонала $F_{\mathcal{D}}$. Тоді, обчисливши за формулами (18), (20) функції $\sigma_0^{ij}(\mathbf{r})$ і $\tilde{\sigma}^{ij}(\mathbf{r})$, знайдемо розподіл напружень $\sigma^{ij}(\mathbf{r}) \equiv \sigma_0^{ij}(\mathbf{r}) + \tilde{\sigma}^{ij}(\mathbf{r})$, який задовольняє співвідношення (12), (1) математичної моделі напруженого стану та узгоджується в смислі найменших квадратів з результатами (17) експериментального визначення параметрів напруженого стану тіла і математичною моделлю (16) взаємодії зондувального випромінювання з тілом, тобто знайдена в такий спосіб функція $\sigma^{ij}(\mathbf{r})$ є розв'язком сформульованої оберненої задачі.

4. Математична модель для поляризаційно-оптичної томографії тензорного поля. У методі фотопружності зондувальним випромінюванням є монохроматичне поляризоване світло. Проходячи через середовище, світло змінює свій стан поляризації відповідно до розподілу компонент тензора діелектричної проникності. Отже, цей метод чутливий до всіх зовнішніх впливів, які змінюють внутрішню симетрію тіла, зокрема, − до деформації.

З'ясуємо множину поляризаційно-оптичних параметрів J тіла $\mathcal{B}$, матеріал якого за відсутності деформації і залишкових напружень вважатимемо оптично однорідним та ізотропним. Оптичні неоднорідність та анізотропія тіла, які індуковані деформацією, є слабкими, тому (в деякому наближенні) можна вважати, що світло поширюється у тілі прямолінійно. При цьому областю проникнення зондувального випромінювання $\boldsymbol{v}$ є відрізок траєкторії світлового променя $\mathfrak{s}$ від точки його входу в об'єкт до точки його виходу. Стан поляризації плоскої монохроматичної електромагнітної хвилі, що розповсюджується у напрямку $\mathfrak{s}$, визначається [1, 2] комплексним вектором $\mathbf{E} = \{E_1^{\mathfrak{s}}, E_2^{\mathfrak{s}}\}$. Тут $E_1^{\mathfrak{s}}, E_2^{\mathfrak{s}}$ − компоненти комплексної амплітуди вектора напруженості електричного поля у декартовому базисі такому, що вісь x_3 напрямлена вздовж $\mathfrak{s}$, а осі x_1, x_2 утворюють площину, паралельну до фронту хвилі. Нехай $\mathbf{E}_{\mathfrak{s}}^0$ та $\mathbf{E}_{\mathfrak{s}}^h$ − вектори, що визначають стани поляризації на вході та виході з об'єкта на напрямку $\mathfrak{s}$. Тоді дія об'єкта на поляризацію світла визначається відображенням $\mathbf{E}_{\mathfrak{s}}^0 \to \mathbf{E}_{\mathfrak{s}}^h$. Таке відображення комплексних векторів задається деякою унітарною матрицею $\mathbf{J}_{\mathfrak{s}}$ [1]

$$\mathbf{E}_{\mathfrak{s}}^h = \mathbf{J}_{\mathfrak{s}} \cdot \mathbf{E}_{\mathfrak{s}}^0. \tag{22}$$

Використаємо це співвідношення, щоб визначити матриці $\mathbf{J}_{\mathfrak{s}}$ для тих напрямків $\mathfrak{s}$, для яких шляхом вимірювань встановлено поляризацію світла на вході в тіло та виході із нього. Матриця $\mathbf{J}_{\mathfrak{s}}$ залежить від розподілу компонент шуканого тензорного поля на промені $\mathfrak{s}$. Тому, визначаючи $\mathbf{J}_{\mathfrak{s}}$, отримуємо деяку інформацію про шукане тензорне поле.

Розглянемо унітарну матрицю

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\mathfrak{s}} = \mathbf{J}_{\mathfrak{s}} \exp(-i\,\theta_{\mathfrak{s}}), \tag{23}$$

де $\theta_{\mathfrak{s}} = (\varphi_{1\mathfrak{s}} + \varphi_{2\mathfrak{s}})/2$, $\varphi_{1\mathfrak{s}} = \operatorname{Arg}(\lambda_{1\mathfrak{s}})$, $\varphi_{2\mathfrak{s}} = \operatorname{Arg}(\lambda_{2\mathfrak{s}})$, де $\lambda_{1\mathfrak{s}}, \lambda_{2\mathfrak{s}}$ − власні значення матриці $\mathbf{J}_{\mathfrak{s}}$.

Матриця $\tilde{\mathbf{J}}_{\mathscr{s}}$ має властивість: $\det(\tilde{\mathbf{J}}_{\mathscr{s}}) = 1$, її власними значеннями є $\exp(i\varphi_{\mathscr{s}})$ і $\exp(-i\varphi_{\mathscr{s}})$, де $\varphi_{\mathscr{s}} = (\varphi_{1\mathscr{s}} - \varphi_{2\mathscr{s}})/2$. Логарифм цієї матриці, тобто матриця $i\,\mathbf{L}_{\mathscr{s}} = \ln(\tilde{\mathbf{J}}_{\mathscr{s}})$ така, що $\tilde{\mathbf{J}}_{\mathscr{v}} = \exp(i\,\mathbf{L}_{\mathscr{s}})$, є чисто уявною матрицею і визначається як [11]

$$\mathbf{L}_{\mathscr{s}} = \frac{\tilde{\mathbf{J}}_{\mathscr{s}} - \cos(\varphi_{\mathscr{s}})\,\mathbf{I}}{\sin(\varphi_{\mathscr{s}})}(\varphi_{\mathscr{s}} + 2\pi k_{1\mathscr{s}}). \tag{24}$$

Тут $\mathbf{I}$ – одинична (2×2)-матриця, $k_{1\mathscr{s}} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Таким чином, за вимірювані поляризаційно-оптичні параметри тензорного поля можна використовувати матрицю $\mathbf{J}_{\mathscr{s}}$ або похідну від неї матрицю $\tilde{\mathbf{J}}_{\mathscr{s}}$ чи її логарифм $\mathbf{L}_{\mathscr{s}}$ разом із дійсним параметром $\theta_{\mathscr{s}}$.

Встановимо тепер функціонали (16) для цього способу відбору даних про напружений стан об'єкта.

Деформація змінює внутрішню симетрію тіла, тому діелектричний тензор стає залежним від деформації. Еволюція стану поляризації світла вздовж напрямку його поширення $\mathscr{s} \in \mathcal{D}$ у такому тілі встановлюється рівняннями макроскопічної електродинаміки. У наближенні плоскої монохроматичної хвилі стан поляризації визначається лінійною системою двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку стосовно комплексних амплітуд $E_1^{\mathscr{s}}$, $E_2^{\mathscr{s}}$. У теорії інтегральної фотопружності [1, 2], враховуючи слабку оптичну неоднорідність та анізотропію, вихідну систему зводять до системи рівнянь другого порядку

$$\frac{d\mathbf{B}_{\mathscr{s}}}{dt_{\mathscr{s}}} = -\frac{i\omega}{4c\sqrt{\text{æ}}}\mathbf{K}_{\mathscr{s}}\cdot\mathbf{B}_{\mathscr{s}}, \qquad \mathbf{K}_{\mathscr{s}} = \begin{Vmatrix} \text{æ}_{11}^{\mathscr{s}} - \text{æ}_{22}^{\mathscr{s}} & 2\text{æ}_{12}^{\mathscr{s}} \\ 2\text{æ}_{21}^{\mathscr{s}} & \text{æ}_{22}^{\mathscr{s}} - \text{æ}_{11}^{\mathscr{s}} \end{Vmatrix}. \tag{25}$$

Тут $t_{\mathscr{s}}$ – скалярний параметр, який визначає радіус-вектор $\mathbf{r}$ точки на напрямку $\mathscr{s}$; $\mathbf{r} = \{m^{\mathscr{s}}t_{\mathscr{s}}, n^{\mathscr{s}}t_{\mathscr{s}}, \ell^{\mathscr{s}}t_{\mathscr{s}}\}$, де $m^{\mathscr{s}}$, $n^{\mathscr{s}}$, $\ell^{\mathscr{s}}$ – напрямні косинуси цього напрямку в глобальній декартовій системі координат; $t_{\mathscr{s}}^0$, $t_{\mathscr{s}}^h$ – значення цього параметра, що відповідають точкам входу та виходу променя; $\text{æ}_{ij}^{\mathscr{s}}$ – компоненти тензора $\boldsymbol{\text{æ}}$ діелектричної проникності в декартовій системі координат, пов'язаній із напрямком $\mathscr{s}$; æ – діелектрична проникність середовища в ненапруженому стані. Комплексний вектор $\mathbf{B}_{\mathscr{s}}$ визначає той самий стан поляризації, що й вектор $\mathbf{E}_{\mathscr{s}}$, оскільки ці два вектори пов'язані співвідношенням

$$\mathbf{E}_{\mathscr{s}} = \mathbf{B}_{\mathscr{s}}\exp(i\,\theta_{\mathscr{s}}), \qquad \theta_{\mathscr{s}} = \frac{\omega}{2c\sqrt{\text{æ}}}\int(\text{æ}_{11}^{\mathscr{s}} + \text{æ}_{22}^{\mathscr{s}})\,dt_{\mathscr{s}}, \tag{26}$$

де ω – кругова частота електромагнітної хвилі; c – швидкість світла.

Для середовищ, ізотропних у вихідному недеформованому стані, залежність між компонентами тензорів діелектричної проникності та повної деформації e_{ij} у лінійному наближенні матиме вигляд

$$\text{æ}_{ij} = \text{æ}(\delta_{ij} - p_{ijkl}e_{kl}). \tag{27}$$

Тут p_{ijkl} – тензор безрозмірних коефіцієнтів фотопружності, які враховують зміну діелектричних властивостей тіла при деформації. Для ізотропного тіла всі компоненти p_{ijkl} виражаються через дві безрозмірні матеріальні константи p і p_1:

$$p_{ijkl} = p_1\delta_{ij}\delta_{kl} + p(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \tag{28}$$

Згідно з формулами (11), (27), (28) зв'язок між компонентами тензорів діелектричної проникності та напружень у лінійному наближенні має вигляд

$$\text{æ}_{ij} = \text{æ}\,(\delta_{ij} - P_{ijkl}\sigma_{kl} - p_{ijkl}\varepsilon^0_{kl}), \tag{29}$$

де $P_{ijkl} = p_{ijkl}S_{mnkl} = P_1\delta_{ij}\delta_{kl} + P(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$; S_{ijkl} − компоненти тензора пружної податливості тіла; P, P_1 − п'єзооптичні константи.

З урахуванням формул (29) перепишемо рівняння (25) у вигляді

$$\frac{d\mathbf{B}_{\mathscr{s}}}{dt_{\mathscr{s}}} = -\frac{i\omega}{2c\sqrt{\text{æ}}}\mathbf{S}_{\mathscr{s}} \cdot \mathbf{B}_{\mathscr{s}}, \tag{30}$$

де

$$\mathbf{S}_{\mathscr{s}} = \begin{Vmatrix} P(\sigma^{\mathscr{s}}_{11} - \sigma^{\mathscr{s}}_{22}) + p(\varepsilon^{0\mathscr{s}}_{11} - \varepsilon^{0\mathscr{s}}_{22}) & P\sigma^{\mathscr{s}}_{12} + p\varepsilon^{0\mathscr{s}}_{12} \\ P\sigma^{\mathscr{s}}_{21} + p\varepsilon^{0\mathscr{s}}_{21} & -P(\sigma^{\mathscr{s}}_{11} - \sigma^{\mathscr{s}}_{22}) - p(\varepsilon^{0\mathscr{s}}_{11} - \varepsilon^{0\mathscr{s}}_{22}) \end{Vmatrix}. \tag{31}$$

Рівняння (31) встановлюють функціональний зв'язок між станами поляризації світла вздовж лінії його поширення в середовищі, з одного боку, та розподілом компонент тензора напружень на цій лінії, з іншого боку. Зокрема, зв'язок між вхідним $\mathbf{E}^0_{\mathscr{s}}$ і вихідним $\mathbf{E}^h_{\mathscr{s}}$ станами поляризації світла на напрямку $\mathscr{s}$ виразиться згідно з формулами (26)−(31) співвідношенням

$$\mathbf{E}^h_{\mathscr{s}} = \exp\left(i\frac{\omega}{2c\sqrt{\text{æ}}}\int\limits_{t^0_{\mathscr{s}}}^{t^h_{\mathscr{s}}} (\mathbf{S}_{\mathscr{s}} - 2\theta\mathbf{I})\,dt_{\mathscr{s}} \right) \cdot \mathbf{E}^0_{\mathscr{s}}. \tag{32}$$

Зіставляючи формули (22) і (32), отримаємо співвідношення, яке пов'язує розподіл напружень вздовж напрямку $\mathscr{s}$ із матрицею $\mathbf{J}_{\mathscr{s}}$, яка визначає зміну поляризації світла на цьому напрямі:

$$\mathbf{J}_{\mathscr{s}}(\sigma^{ij}, \mathscr{s}) = \exp\left(i\frac{\omega}{2c\sqrt{\text{æ}}}\int\limits_{t^0_{\mathscr{s}}}^{t^h_{\mathscr{s}}} (\mathbf{S}_{\mathscr{s}} - 2\theta\mathbf{I})\,dt_{\mathscr{s}} \right). \tag{33}$$

Для матриці $\tilde{\mathbf{J}}_{\mathscr{s}}$ і її логарифма $\mathbf{L}_{\mathscr{s}}$ маємо відповідно

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\mathscr{s}}(\sigma^{ij}, \mathscr{s}) = \exp\left(i\frac{\omega}{2c\sqrt{\text{æ}}}\int\limits_{t^0_{\mathscr{s}}}^{t^h_{\mathscr{s}}} \mathbf{S}_{\mathscr{s}}\,dt_{\mathscr{s}} \right),$$

$$\mathbf{L}(\sigma^{ij}, \mathscr{s}) = \frac{\omega}{2c\sqrt{\text{æ}}}\int\limits_{t^0_{\mathscr{s}}}^{t^h_{\mathscr{s}}} \mathbf{S}_{\mathscr{s}}\,dt_{\mathscr{s}} + 2\pi k_{1\mathscr{s}}\mathbf{I}. \tag{34}$$

Абсолютний приріст фази $\theta_{\mathscr{s}}$ хвилі на напрямі $\mathscr{s}$ виражається при цьому через розподіл напружень таким чином:

$$\theta_{\mathscr{s}}(\sigma^{ij}, \mathscr{s}) = \frac{\omega\sqrt{\text{æ}}}{c}\int\limits_{t^0_{\mathscr{s}}}^{t^h_{\mathscr{s}}} \left[P(\sigma^{\mathscr{s}}_{11} + \sigma^{\mathscr{s}}_{22}) + P\sigma^{\mathscr{s}}_{33} + p_1(\varepsilon^{0\mathscr{s}}_{11} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{0\mathscr{s}}_{22}) + p\varepsilon^{0\mathscr{s}}_{33} \right] dt_{\mathscr{s}} + 2\pi k_{2\mathscr{s}}. \tag{35}$$

У формулах (34), (35) $k_{1\mathscr{s}}, k_{2\mathscr{s}} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Співвідношення (33)−(35) встановлюють взаємозв'язок між інтегралами від компонент тензора напружень уздовж напрямку поширення світлового променя та вимірюваними інформативними параметрами.

5. Обернена задача визначення гартувальних напружень у листовому склі. Розглянемо гартований прямокутний лист $0 \le x \le a$, $-1 \le y \le 1$, $-b \le z \le b$, товщина $2h$ якого є набагато меншою ніж розміри ah і $2bh$ у двох інших напрямках (тобто $a \gg 1$, $b \gg 1$). Тут x, y, z − прямокутні декартові координати, віднесені до півтовщини h. При гартуванні таких виробів звичайно намагаються забезпечити однорідні технологічні умови по всій поверхні листа. Тому, розглядаючи випадок однорідного та ізотропного в площині листа гартування, вважатимемо, що тензор R^0_{ij} є функцією лише товщинної координати y, тобто $R^0_{ij} = R^0_{ij}(y)$. При цьому, виходячи із міркувань симетрії і беручи до уваги (13), знаходимо, що лише дві компоненти R^0_{xx} і R^0_{zz} тензора $\mathbf{R}_0$ є відмінними від нуля, причому $R^0_{xx} = R^0_{zz} \equiv R_0(y)$.

У нормальних до поверхні листа перетинах $z = \mathrm{const}$, віддалених від країв $z = -b$, $z = b$ на відстані, що перевищують декілька товщин, реалізуються умови плоскої деформації, за яких система рівнянь (12) набуває вигляду

$$
\begin{aligned}
&\Delta\sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = -2G\frac{1+\nu}{1-\nu}R_0(y),\\
&\Delta\sigma_{yy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{4G}{1-\nu}R_0(y),\\
&\Delta\sigma_{zz} = -2G\frac{1+\nu}{1-\nu}R_0(y),\\
&\Delta\sigma_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = 0.
\end{aligned} \tag{36}
$$

Тут Δ − двовимірний оператор Лапласа в декартових координатах x, y.

За частковий розв'язок системи (36) виберемо

$$
\begin{aligned}
&\sigma^0_{xx} = \sigma^0_{zz} \equiv \sigma(y), \qquad \sigma^0_{yy} = \sigma^0_{xy} = 0,\\
&\sigma(y) \equiv 2G\frac{1+\nu}{1-\nu}\left(-\varepsilon_0(y) + \frac{3}{2}y\int_{-1}^{1} y\varepsilon_0(y)\,dy + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\varepsilon_0(y)\,dy\right),\\
&\varepsilon_0(y) \equiv \int_0^y dy\int_0^y R_0(y)\,dy.
\end{aligned} \tag{37}
$$

Розв'язок (37) задовольняє однорідні умови на сторонах $y = \pm 1$, тому для забезпечення умов ненавантаженості на контурі смуги загальний розв'язок однорідної системи

$$
\begin{aligned}
&\Delta\tilde{\sigma}_{xx} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\tilde{\sigma}_{xx} + \tilde{\sigma}_{yy}) = 0, \qquad \Delta\tilde{\sigma}_{yy} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\tilde{\sigma}_{xx} + \tilde{\sigma}_{yy}) = 0,\\
&\Delta\tilde{\sigma}_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\tilde{\sigma}_{xx} + \tilde{\sigma}_{yy}) = 0
\end{aligned} \tag{38}
$$

слід підпорядкувати умовам

$$
\tilde{\sigma}_{xx}\Big|_{x=0,a} = -\sigma(y), \quad \tilde{\sigma}_{xy}\Big|_{x=0} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{yy}\Big|_{y=\pm1} = \tilde{\sigma}_{xy}\Big|_{y=\pm1} = 0. \tag{39}
$$

Отже, в цій моделі для визначення залишкових напружень необхідно встановити невідому функцію $\sigma(y)$, що входить у граничні умови для крайової задачі (38), (39). При цьому можна обмежитись просвічуванням лінійно-поляризованим світлом у напрямках осі y на різних віддалях x від краю смуги $x = 0$. Напрям поляризації світла при цьому лежить у площині $y = 0$. На виході із тіла світло стає еліптично поляризованим. Якщо скеровувати напрям поляризації світла на вході в об'єкт уздовж бісектриси прямого кута між осями x і z, то зручно прийняти за інформативний параметр різницю фаз δ еліптично поляризованого світла, оскільки цей параметр, як випливає із формул (24), (34) і симетрії задачі, пов'язаний із розподілом напружень уздовж променя простим інтегральним співвідношенням

$$\delta = hP \int_{-1}^{1} (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})\, dy \, . \tag{40}$$

Це співвідношення є математичною моделлю взаємодії зондувального випромінювання з тілом.

Для експериментального визначення параметра δ можна застосувати відомі способи вимірювання еліптичності світла, наприклад, метод компенсатора Санармона [1, 2]. Вимірюючи значення різниці фаз δ при просвічуванні на різних віддалях x від краю смуги, отримаємо експериментальні залежності $\delta(x)$.

У статті [13] реалізовано варіаційний метод розв'язуванні цієї оберненої задачі, який базується на поданні загального розв'язку прямої крайової задачі у вигляді розвинення за системою однорідних розв'язків Папковича. Коефіцієнти цього розвинення знаходили із умови мінімуму функціонала типу F_{Φ}. Проведено широкий комплекс числових досліджень цієї задачі. На основі отриманих теоретичних результатів запропоновано неруйнівний спосіб визначення гартувальних напружень на поверхні листових скловиробів [5], який пройшов експериментальну апробацію.

6. Висновки. Запропоновано варіаційний підхід до розв'язування обернених задач томографічної реконструкції полів напружень і деформацій у твердих тілах із залишковими напруженнями [14, 16]. Підхід поєднує теоретико-експериментальний і томографічний методи неруйнівного визначення тензорних полів і базується на трьох складових – математичній моделі напруженого стану тіл із залишковими напруженнями, експериментальних даних, отриманих шляхом зондування об'єктів зовнішніми фізичними полями, та математичній моделі взаємодії зондувального випромінювання з тілом. За розв'язок оберненої задачі приймається такий розподіл напружень, який задовольняє співвідношення математичних моделей напруженого стану та взаємодії зондувального випромінювання з тілом і забезпечує мінімум функціонала, який є мірою середньо квадратичного відхилення параметрів розрахованого поля напружень від їх значень, визначених експериментально. Для успішної реалізації розглянутого підходу необхідно, щоб об'єм експериментальних даних був достатньо представницьким. Умови існування і єдиності мінімуму функціонала F_{Φ}, очевидно, залежать від його вигляду, а, отже, – від природи зондувального поля, вибраної множини інформативних параметрів, способу сканування тіла, геометрії тіла, параметрів вимірювальної системи тощо. Встановлення цих умов є математичною проблемою, яку необхідно вирішувати окремо для кожного способу відбору даних про напружений стан.

Для випадку зондування тіла поляризованим світлом встановлено множину інформативних параметрів, які легко визначати з використанням відомих методів оптичної поляриметрії, а також інтегральні співвідношення, які пов'язують ці параметри з розподілами компонент напружень уздовж траєкторії світлового променя. Аналогічні співвідношення отримано також для випадку зондування твердих тіл імпульсами ультразвуку [19–22].

З використанням методів чисельного експерименту проведено дослідження ефективності запропонованого підходу при розв'язуванні двовимірних обернених задач томографії напружень у твердих тілах [13, 14]. Зокрема, використовуючи методи статистичного моделювання, досліджено вплив похибок вимірювання на точність розв'язків обернених задач [13].

1. *Абен Х. К.* Интегральная фотоупругость. – Таллинн: Валгус, 1975. – 218 с.
2. *Александров А. Я., Ахметзянов М. Х.* Поляризационно-оптические методы механики деформируемого твердого тела. – М: Наука, 1973. – 576 с.
3. *Бейтс Р. Х. Т., Гарден К. Л., Петерс Т. М.* Реконструктивная вычислительная томография: Современные достижения и перспективы развития // ТИИЭР, 1983. – **71**, № 3. – С. 84–104.
4. *Векуа И. Н.* Основы тензорного анализа и теории инвариантов. – М: Наука, 1978. – 296 с.
5. *Деклараційний* патент України. Неруйнівний спосіб визначення гартувальних напружень на поверхні листових скловиробів / В. Ф. Чекурін, А. М. Марголін, В. В. Дяків – Опубл. 15. 01. 2003, Бюл. № 1.
6. *Кошовий В. В., Кривін Є. В., Романишин І. М.* Ультразвукова обчислювальна томографія в задачах неруйнівного контролю і технічної діагностики // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1997. – **33** , №5. – С. 31–42.
7. *Кренер Э.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. – М: Мир, 1965. – 104 с.
8. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
9. *Осадчук В. А.* Діагностування залишкових технологічних напружень в елементах конструкцій розрахунково-експериментальним методом // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 1. – С. 88–104.
10. *Підстригач Я. С.* Вибрані праці. – К.: Наук. думка, 1995. – 464 с.
11. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – М: Наука, 1969. – Т. 3, ч. 2. – 672 с.
12. *Чекурін В. Ф.* Обернена задача неруйнівного оптичного контролю залишкових напружень у циліндричних оболонках // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 2. – С. 151–157.
13. *Чекурин В. Ф.* Обратная задача неразрушающего контроля уровня закалки листового стекла // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 3. – С. 86–97.
14. *Чекурин В. Ф.* Вариационный метод решения прямых и обратных задач теории упругости для полубесконечной полосы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 2. – С. 58–70.
15. *Чекурін В. Ф.* Варіаційний гранично елементний метод розв'язування обернених задач інтегральної фотопружності // Доп. НАН України. – 1998. – № 8. – С. 82–87.
16. *Чекурін В. Ф.* Варіаційний метод розв'язування задач томографії напруженого стану твердих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – **35**, № 5. – С. 23–32.
17. *Чекурин В. Ф.* Об одном подходе к решению задач томографии напряженного состояния упругих тел с несовместными деформациями // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 6. – С. 38–48.
18. *Чекурін В. Ф.* Обернена задача неруйнівного оптичного контролю залишкових напружень у кусково-однорідних циліндричних оболонках // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – **36**, № 2. – С. 93–102.
19. *Чекурін В. Ф., Кравчишин О. З.* Задача поширення збурення у пружно деформованому континуумі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 129–134.
20. *Чекурін В. Ф., Кравчишин О. З.* До теорії акустичної томографії напружень у твердих тілах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **37**, № 2. – С. 97–104.
21. *Chekurin V. F., Kravchyshyn O. Z.* A mathematical model for small elastic disturbances propagation in strained solid continuum // Direct and inverse problem of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED–2001): Proc. 6th Int. Seminar/Workshop, Lviv, Sept. 18–20, 2001. – Lviv, 2001. – P. 170–174.
22. *Chekurin V. F., Kravchyshyn O. Z.* Ray acousto-elasticity integrals for 2D strain field // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED–2002): Proc. 7th Int. Seminar/Workshop, Tbilisi, Oct. 10–13, 2002. – Lviv–Tbilisi, 2002. – P. 150–153.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ТОМОГРАФИИ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ С ОСТАТОЧНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Рассматриваются математические модели и вариационный подход к решению обратных задач томографической реконструкции тензорных полей напряжений и деформаций в твердых телах с остаточными напряжениями. При формулировании обратных задач используются три составляющие — математическая модель напряженного состояния тел с несовместными деформациями, экспериментальные данные, полученные путем зондирования объекта внешними физическими полями, и математическая модель взаимодействия зондирующего излучения с телом. Подход объединяет теоретико-экспериментальный и томографический методы неразрушающего определения полей напряжений и деформаций на основе данных измерения некоторых интегральных параметров этих полей.

MATHEMATICAL PROBLEMS OF TENSOR FIELDS TOMOGRAPHY IN SOLIDS WITH RESIDUAL STRESSES

Mathematical models and variational approach to solving the inverse problems of tomographical reconstruction of stress and strain tensor fields in solids with residual stresses are considered. To formulate the inverse problems, three components are used – the mathematical model of stressed-strained state for solids with non-compatible strains, the experimental data obtained by sounding the object with physical fields, and the mathematical model of interaction between sounding irradiation and the object. Such approach integrates both the theoretical-experimental and tomographical methods of nondestructive determination of stress and strain fields on the base of measured integral parameters of these fields.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
18.07.03