УДК 517.526

В. Р. Гладун

ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ТА СТІЙКОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ ІЗ ВІД'ЄМНИМИ ЧАСТИННИМИ ЧИСЕЛЬНИКАМИ

Встановлено множини збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів із від'ємними частинними чисельниками і знаменниками, що дорівнюють одиниці. Досліджено множини збіжності та стійкості підпослідовностей їх підхідних дробів $\{f^{(3s)}\}$, $\{f^{(3s+1)}\}$, $\{f^{(3s+2)}\}$.

Розв'язки багатьох задач обчислювальної математики можна подати у вигляді гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД). Оскільки елементи цих дробів обчислюються наближено, виникає питання дослідження стійкості до збурень скінченних ГЛД. Це питання розглядалося у роботах В. П. Терських [9], П. І. Боднарчука [5], В. Я. Скоробогатька [8], М. О. Недашковського [7], Д. І. Боднара [3], Т. М. Антонової [2]. Стійкість ГЛД тісно пов'язана з їх збіжністю. Як правило, вдалось дослідити стійкість ГЛД, швидкість збіжності яких має порядок геометричної прогресії [2]. Інтерпретуючи стійкість ГЛД як їх неперервну залежність від елементів, приходимо до означення стійкості нескінченних ГЛД [4]. У випадку, коли елементи ГЛД є дійсними числами, збіжність і стійкість досліджувалась в області $\left\{ x \in \mathbb{R} : x > -\frac{1}{4} \right\}$ [3, 8]. Актуальною є задача дослідження збіжності та стійкості ГЛД і їхніх підпослідовностей з від'ємними частинними чисельниками та знаменниками, що дорівнюють одиниці. Вперше властивості таких ГЛД розглянуто в роботі Т. М. Антонової [1]. Подальше дослідження цих питань є предметом цієї роботи.

Розглянемо гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) з дійсними елементами і змінним числом гілок розгалуження

$$\left(1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{a_{i(k)}}{1} \right)^{-1}, \tag{1}$$

де $N_{i(k)} \in \mathbb{N}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0,1,2,\ldots$, $i(0) = i_0$, $i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k$ − мультиіндекс, $I_0 = \{0\}$, $I_k = \{ i(k) : 1 \le i_p \le N_{i(p-1)},\ p = \overline{1,k} \}$, $k = 1,2,\ldots$.

Скінченні дроби $f^{(s)} = \left(1 + \underset{k=1}{\overset{s}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{a_{i(k)}}{1} \right)^{-1}$, $s = 1,2,\ldots$, називають s-ми підхідними дробами ГЛД (1). Величини, які визначаються рекурентними співвідношеннями $Q_{i(s)}^{(s)} = 1$, $Q_{i(p)}^{(s)} = 1 + \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} \frac{a_{i(p+1)}}{Q_{i(p+1)}^{(s)}}$, $i(p) \in I_p$, $p = \overline{0, s-1}$, називають залишками s-го підхідного дробу. Введемо позначення

$$g_{i(k)}^{(s)} := \frac{a_{i(k)}}{Q_{i(k-1)}^{(s)} Q_{i(k)}^{(s)}}, \quad i(k) \in I_k, \quad k = \overline{1, s}.$$

Нехай $\tilde{a}_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, − збурені значення елементів $a_{i(k)}$. Тоді ГЛД

$$\left(1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{\tilde{a}_{i(k)}}{1} \right)^{-1} \tag{2}$$

вважатимемо збуреним до ГЛД (1) [3, 6, 8].

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2003. – 46, № 4. – С. 16-26.

Нехай сукупність множин $\{E_{i(k)}\}$, $E_{i(k)} \subset \mathbb{R}^{N_{i(k)}}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0,1,2,\dots$, є послідовністю множин елементів ГЛД (1), (2), тобто

$$\mathbf{a}_0 = (a_1, a_2, \dots, a_{N_0}) \in E_0, \qquad \mathbf{a}_{i(k)} = (a_{i(k)1}, a_{i(k)2}, \dots, a_{i(k)N_{i(k)}}) \in E_{i(k)},$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_0 = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_{N_0}) \in E_0, \qquad \tilde{\mathbf{a}}_{i(k)} = (\tilde{a}_{i(k)1}, \tilde{a}_{i(k)2}, \dots, \tilde{a}_{i(k)N_{i(k)}}) \in E_{i(k)}.$$

Означення. Сукупність множин елементів $\{E_{i(k)}\}$, $E_{i(k)} \subset \mathbb{R}^{N_{i(k)}}$, $i(k) \in \in I_k$, $k = 0,1,2,\dots$, назвемо послідовністю *множин відносної стійкості* підпослідовності $\{f^{(s_\ell)}\}$ підхідних дробів ГЛД (1), якщо

1°) $\{E_{i(k)}\}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0,1,2,\dots$, є множинами збіжності підпослідовностей $\{f^{(s_\ell)}\}$, $\{\tilde{f}^{(s_\ell)}\}$, тобто з умов $\mathbf{a}_{i(k)}$, $\tilde{\mathbf{a}}_{i(k)} \in E_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0,1,2,\dots$, випливає існування скінченних границь $\lim\limits_{l\to\infty} f^{(s_\ell)}$, $\lim\limits_{l\to\infty} \tilde{f}^{(s_\ell)}$;

2°) для кожного ε, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, існує таке δ, $\delta \in \mathbb{R}_+$, що при всіх таких $\mathbf{a}_{i(k)}$, $\tilde{\mathbf{a}}_{i(k)} \in E_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0,1,2,\dots$, що $\left|\dfrac{\tilde{a}_{i(k)j} - a_{i(k)j}}{a_{i(k)j}}\right| < \delta$, $j = \overline{1, N_{i(k)}}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0,1,2,\dots$, виконуються нерівності $\left|\dfrac{\tilde{f}^{(s_\ell)} - f^{(s_\ell)}}{f^{(s_\ell)}}\right| < \varepsilon$, $\ell = 1,2,\dots$.

Якщо $\{s_\ell\} = \mathbb{N}$, послідовність множин $\{E_{i(k)}\}$ назвемо послідовністю множин стійкості ГЛД (1).

Нехай $\alpha_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k = 1,2,\dots$, $\varepsilon_{i(p)}^{(s)}$, $i(p) \in I_p$, $p = \overline{0,s}$, $s = 1,2,\dots$, – відносні похибки відповідно величин $a_{i(k)}$, $Q_{i(p)}^{(s)}$, тобто

$$\tilde{a}_{i(k)} = (1 + \alpha_{i(k)})\, a_{i(k)}, \qquad \tilde{Q}_{i(p)}^{(s)} = \left(1 + \varepsilon_{i(p)}^{(s)}\right) Q_{i(p)}^{(s)},$$

і $\tilde{\alpha}_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k = 1,2,\dots$, $\tilde{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}$, $i(p) \in I_p$, $p = \overline{0,s}$, $s = 1,2,\dots$, визначаються зі співвідношень

$$a_{i(k)} = (1 + \tilde{\alpha}_{i(k)})\, \tilde{a}_{i(k)}, \qquad Q_{i(p)}^{(s)} = \left(1 + \tilde{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}\right) \tilde{Q}_{i(p)}^{(s)}.$$

Для похибок $\varepsilon_{i(p)}^{(s)}$, $\tilde{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}$ справджуються такі рекурентні формули:

$$\varepsilon_{i(p)}^{(s)} = \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} g_{i(p+1)}^{(s)} \left((1 + \alpha_{i(p+1)}) \left(1 + \tilde{\varepsilon}_{i(p+1)}^{(s)}\right) - 1 \right), \tag{3$'$}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)} = \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} \tilde{g}_{i(p+1)}^{(s)} \left((1 + \tilde{\alpha}_{i(p+1)}) \left(1 + \varepsilon_{i(p+1)}^{(s)}\right) - 1 \right), \tag{3$''$}$$

$i(p) \in I_p$, $p = \overline{0, s-1}$, де $\varepsilon_{i(s)}^{(s)} = \tilde{\varepsilon}_{i(s)}^{(s)} = 0$. Послідовно вкладаючи співвідношення (3′), (3″), отримаємо формулу для відносної похибки s-го підхідного дробу ГЛД (1):

$$\varepsilon^{(s)} = \sum_{l=1}^{s} \sum_{i_1=1}^{N_0} q_{i(1)}^{(s)} \sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}} q_{i(2)}^{(s)} \cdots \sum_{i_{\ell-1}=1}^{N_{i(\ell-2)}} q_{i(\ell-1)}^{(s)} \sum_{i_\ell=1}^{N_{i(\ell-1)}} q_{i(\ell)}^{(s)} \gamma_{i(\ell)}, \tag{4}$$

де

$$q_{i(k)}^{(s)} = \begin{cases} g_{i(k)}^{(s)}, & k \text{ – парне}, \\ \tilde{g}_{i(k)}^{(s)}, & k \text{ – непарне}, \end{cases} \qquad \gamma_{i(\ell)} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{i(\ell)}}{1+\varepsilon_{i(\ell)}^{(s)}}, & \ell \text{ – парне}, \\[2ex] \dfrac{\tilde{\alpha}_{i(\ell)}}{1+\tilde{\varepsilon}_{i(\ell)}^{(s)}}, & \ell \text{ – непарне}. \end{cases}$$

Для різниці між двома підхідними дробами ГЛД (1) справджується формула [2]

$$f^{(r)} - f^{(s)} = (-1)^{s+1} \sum_{i_1=1}^{N_0} \sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}} \ldots \sum_{i_{s+1}=1}^{N_{i(s)}} \frac{\prod\limits_{k=1}^{s+1} a_{i(k)}}{\prod\limits_{k=1}^{s} Q_{i(k)}^{(s)} \prod\limits_{k=1}^{s+1} Q_{i(k)}^{(r)}}, \qquad r > s. \tag{5}$$

Нехай $\rho_{i(k)}^{(2)}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0,1,2,\ldots,$ – додатні дійсні числа, причому $\rho_{i(3k+1)}^{(2)} \le 1$, $\rho_{i(3k+2)}^{(2)} > 1$ при всіх можливих значеннях мультиіндексів. Задамо послідовність множин $\{E_{i(k)}\}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0,1,2,\ldots$:

$$E_{i(3k)} = \left\{ \mathbf{x}_{i(3k)} \in \mathbb{R}_-^{N_{i(3k)}} : \sum_{i_{3k+1}=1}^{N_{i(3k)}} \frac{|x_{i(3k+1)}|}{\rho_{i(3k+1)}^{(2)}} \ge 1 + \rho_{i(3k)}^{(2)} \right\}, \tag{6$'$}$$

$$E_{i(3k+1)} = \left\{ \mathbf{x}_{i(3k+1)} \in \mathbb{R}_-^{N_{i(3k+1)}} : \sum_{i_{3k+2}=1}^{N_{i(3k+1)}} \frac{|x_{i(3k+2)}|}{\rho_{i(3k+2)}^{(2)}} \ge 1 - \rho_{i(3k+1)}^{(2)}, \right.$$
$$\left. \sum_{i_{3k+2}=1}^{N_{i(3k+1)}} |x_{i(3k+2)}| < 1 \right\}, \tag{6$''$}$$

$$E_{i(3k+2)} = \left\{ \mathbf{x}_{i(3k+2)} \in \mathbb{R}_-^{N_{i(3k+2)}} : \sum_{i_{3(k+1)}=1}^{N_{i(3k+2)}} \frac{|x_{i(3(k+1))}|}{\rho_{i(3(k+1))}^{(2)}} \le \rho_{i(3k+2)}^{(2)} - 1 \right\}. \tag{6$'''$}$$

Теорема 1. *Сукупність множин* $\{E_{i(k)}\}$, *де*

$$E_0 = \left\{ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_-^{N_0} : \sum_{i_1=1}^{N_0} |x_{i(1)}| > 1 \right\},$$

а $E_{i(k)}$, $k \ge 1$, *задаються згідно з* (6$'$)–(6$'''$), *є послідовністю множин збіжності підпослідовності* $\{f^{(3s+2)}\}$ *підхідних дробів ГЛД* (1), *причому*

$$0 > f^{(2)} > f^{(5)} > \ldots > f^{(2s+2)} > \ldots > \left(1 + \sum_{i_1=1}^{N_0} a_{i(1)}\right)^{-1}.$$

Д о в е д е н н я. Покажемо методом математичної індукції, що при виконанні умов $\mathbf{a}_{i(k)} \in E_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0,1,2,\ldots,$ для залишків $Q_{i(k)}^{(3s+2)}$, $k = \overline{0, 3s+2}$, справджуються оцінки

$$Q_{i(3p)}^{(3s+2)} < -\rho_{i(3p)}^{(2)}, \qquad i(3p) \in I_{3p}, \qquad p = \overline{0,s}, \tag{7$'$}$$

$$0 < Q_{i(3p+1)}^{(3s+2)} < \rho_{i(3p+1)}^{(2)}, \quad i(3p+1) \in I_{3p+1}, \quad p = \overline{0,s}, \tag{7$''$}$$

$$1 < Q_{i(3p+2)}^{(3s+2)} < \rho_{i(3p+2)}^{(2)}, \quad i(3p+2) \in I_{3p+2}, \quad p = \overline{0,s-1}, \quad Q_{i(3s+2)}^{(3s+2)} = 1. \tag{7$'''$}$$

При $p = s$ чи $p = s-1$ нерівності (7$'$)–(7$'''$) перевіряються безпосередньо. Припустивши, що ці оцінки справджуються при деякому $p = k+1$, для $p = k$ матимемо

$$1 < Q_{i(3k+2)}^{(3s+2)} = 1 + \sum_{i_{3(k+1)}=1}^{N_{i(3k+2)}} \frac{|a_{i(3(k+1))}|}{|Q_{i(3(k+1))}^{(3s+2)}|} < 1 + \sum_{i_{3(k+1)}=1}^{N_{i(3k+2)}} \frac{|a_{i(3(k+1))}|}{\rho_{i(3(k+1))}^{(2)}} \le \rho_{i(3k+2)}^{(2)},$$

$$0 < Q_{i(3k+1)}^{(3s+2)} = 1 - \sum_{i_{3k+2}=1}^{N_{i(3k+1)}} \frac{|a_{i(3k+2)}|}{Q_{i(3k+2)}^{(3s+2)}} < 1 - \sum_{i_{3k+2}=1}^{N_{i(3k+1)}} \frac{|a_{i(3k+2)}|}{\rho_{i(3k+2)}^{(2)}} \le \rho_{i(3k+1)}^{(2)},$$

$$Q_{i(3k)}^{(3s+2)} = 1 - \sum_{i_{3k+1}=1}^{N_{i(3k)}} \frac{|a_{i(3k+1)}|}{Q_{i(3k+1)}^{(3s+2)}} < 1 - \sum_{i_{3k+1}=1}^{N_{i(3k)}} \frac{|a_{i(3k+1)}|}{\rho_{i(3k+1)}^{(2)}} \le -\rho_{i(3k)}^{(2)}.$$

Розглянемо різницю між двома сусідніми елементами послідовності $\{f^{(3s+2)}\}$. Із формули (5) і з того, що $E_{i(k)} \subset \mathbb{R}_-^{N_{i(k)}}$, випливає

$$f^{(3s+5)} - f^{(3s+2)} = \sum_{i_1=1}^{N_0} \sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}} \cdots \sum_{i_{3(s+1)}=1}^{N_{i(3s+2)}} \frac{\prod_{k=1}^{3(s+1)} |a_{i(k)}|}{Q_{i(3(s+1))}^{(3s+5)} \prod_{k=0}^{3s+2} Q_{i(k)}^{(3s+2)} Q_{i(k)}^{(3s+5)}}.$$

Оскільки $Q_{i(k)}^{(3s+2)} Q_{i(k)}^{(3s+5)} > 0$, $i(k) \in I_k$, $k = \overline{0, 3s+2}$, $Q_{i(3(s+1))}^{(3s+5)} < 0$, $i(3(s+1)) \in$ $\in I_{3(s+1)}$, то послідовність $\{f^{(3s+2)}\}$ монотонно спадає. Обмеженість знизу цієї послідовності випливає з того, що

$$f^{(1)} - f^{(3s+2)} = \frac{1}{Q_0^{(1)} Q_0^{(3s+2)}} \sum_{i_1=1}^{N_0} |a_{i(1)}| \left(1 - \frac{1}{Q_{i(1)}^{(3s+2)}}\right) < 0.$$

Теорему доведено. ◊

Теорема 2 (*Властивість вилки*). *Нехай сукупність множин* $\{E_{i(k)}\}$, *що визначаються згідно з* (6′)–(6‴), *де* $\rho_{i(3k+1)}^{(2)} = 1$, *є послідовністю множин елементів ГЛД* (1). *Тоді для підпослідовностей підхідних дробів* $\{f^{(3s+1)}\}$, $\{f^{(3s+2)}\}$ *справджується властивість вилки*

$$f^{(3m+1)} < f^{(3m+4)} < f^{(3n+5)} < f^{(3n+2)} \tag{8}$$

для довільних $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

Д о в е д е н н я. Правильність співвідношення $f^{(3n+5)} < f^{(3n+2)}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, випливає з теореми 1. Як і в попередній теоремі, неважко показати, що при виконанні умов $\mathbf{a}_{i(k)} \in E_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, для залишків $(3s+1)$-го підхідного дробу ГЛД (1) справджуються нерівності

$$0 < Q_{i(3p+1)}^{(3s+1)} < 1, \qquad i(3p+1) \in I_{3p+1}, \quad p = \overline{0, s-1}, \quad Q_{i(3s+1)}^{(3s+1)} = 1, \tag{9′}$$

$$Q_{i(3p)}^{(3s+1)} < -\rho_{i(3p)}^{(2)}, \qquad i(3p) \in I_{3p}, \quad p = \overline{0, s-1}, \quad Q_{i(3s)}^{(3s+1)} \le -\rho_{i(3s)}^{(2)}, \tag{9″}$$

$$1 < Q_{i(3p-1)}^{(3s+2)} < \rho_{i(3p-1)}^{(2)}, \quad i(3p-1) \in I_{3p-1}, \quad p = \overline{1, s-1},$$

$$1 < Q_{i(3s-1)}^{(3s+1)} \le \rho_{i(3s-1)}^{(2)}. \tag{9‴}$$

Покладаючи у формулі (5) $r = 3m+4$, $s = 3m+1$ і враховуючи нерівності $Q_{i(k)}^{(3m+1)} Q_{i(k)}^{(3m+4)} > 0$, $i(k) \in I_k$, $k = \overline{0, 3m+1}$, $Q_{i(3m+2)}^{(3m+4)} > 0$, $i(3m+2) \in I_{3m+2}$, одержуємо $f^{(3m+4)} - f^{(3m+1)} > 0$. Розглядаючи різницю

$$f^{(3n+2)} - f^{(3m+1)} =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{N_0} \sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}} \dots \sum_{i_{3m+2}=1}^{N_{i(3m+1)}} \frac{\prod_{k=1}^{3m+2} | a_{i(k)} |}{Q^{(3n+2)}_{i(3m+2)} \prod_{k=0}^{3m+1} Q^{(3m+1)}_{i(k)} Q^{(3n+2)}_{i(k)}}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+ , \quad (10)$$

і враховуючи те, що $Q^{(3m+1)}_{i(k)} Q^{(3n+2)}_{i(k)} > 0$, $i(k) \in I_k$, $k = \overline{0, 3m+1}$, і $Q^{(3n+2)}_{i(3m+2)} > 0$, $i(3m+2) \in I_{3m+2}$, маємо $f^{(3n+2)} - f^{(3m+1)} > 0$, що доводить правильність нерівностей (8). Теорему доведено. ◊

Наслідок. Із властивості вилки випливає існування скінченних границь

$$\lim_{s\to\infty} f^{(3s+1)} = F_1, \quad \lim_{s\to\infty} f^{(3s+2)} = F_2 ,$$

причому $F_1 < f^{(2)}$, $F_2 > f^{(1)}$. Тому послідовність множин $\{E_{i(k)}\}$, $i(k) \in I_k$, $k = 1, 2, \dots$, елементи яких задовольняють умови (6′)–(6‴), де $\rho^{(2)}_{i(3k+1)} = 1$, є послідовністю множин збіжності підпослідовностей підхідних дробів $\{f^{(3s+1)}\}$, $\{f^{(3s+2)}\}$.

Встановимо умови, коли $F_1 = F_2$. Нехай множини $E_{i(3k+1)}$, $i(3k+1) \in I_{3k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, визначаються так:

$$E_{i(3k+1)} = \left\{ \mathbf{x}_{i(3k+1)} \in \mathbb{R}_-^{N_{i(3k+1)}} : \sum_{i_{3k+2}=1}^{N_{i(3k+1)}} \frac{| x_{i(3k+2)} |}{\rho^{(2)}_{i(3k+2)}} \ge 1 - \rho^{(2)}_{i(3k+1)}, \right.$$

$$\left. \sum_{i_{3k+2}=1}^{N_{i(3k+1)}} | x_{i(3k+2)} | \le 1 - \rho^{(1)}_{i(3k+1)} \right\}, \quad 0 < \rho^{(1)}_{i(3k+1)} < 1 . \quad (11)$$

Теорема 3. *Сукупність множин* $\{E_{i(k)}\}$, *що визначаються згідно з* (6′), (6‴), (11), *де* $\rho^{(2)}_{i(3k+1)} = 1$, *є послідовністю множин збіжності підпослідовності підхідних дробів* $\{f^{(s_\ell)}\}$, $\{s_\ell\} = \mathbb{N} \setminus \{3k,\ k = 1, 2, \dots\}$, *ГЛД* (1), *якщо*

$$\prod_{k=0}^{\infty} \nu_k = 0 , \quad (12)$$

де $\{\nu_k\}$ *– послідовність додатних сталих, які визначаються так*:

$$\nu_{3k} = \max_{i(3k)\in I_{3k}} \left\{ \frac{1 + \rho^{(2)}_{i(3k)}}{\rho^{(2)}_{i(3k)}} \right\}, \quad (13')$$

$$\nu_{3k+1} = \max_{i(3k+1)\in I_{3k+1}} \left\{ \frac{1 - \rho^{(1)}_{i(3k+1)}}{\rho^{(1)}_{i(3k+1)}} \right\}, \quad (13'')$$

$$\nu_{3k+2} = \max_{i(3k+2)\in I_{3k+2}} \left\{ \frac{\rho^{(2)}_{i(3k+2)} - 1}{\rho^{(2)}_{i(3k+2)}} \right\}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots . \quad (13''')$$

Д о в е д е н н я. Із властивості вилки випливає, що послідовність $\{f^{(s_\ell)}\}$, $\{s_\ell\} = \mathbb{N} \setminus \{3k,\ k = 1, 2, \dots\}$, збігається тоді й лише тоді, коли $\lim_{s\to\infty} \left[f^{(3s+2)} - f^{(3s+1)} \right] = 0$. Покладемо у формулі (10) $m = n = s$ і зробимо таке перегрупування у виразах, що стоять під знаками сум:

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{3s+2}|\,a_{i(k)}\,|}{Q_{i(3s+2)}^{(3s+2)}\prod\limits_{k=0}^{3s+1}Q_{i(k)}^{(3s+1)}Q_{i(k)}^{(3s+2)}}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{r}\left|\,g_{i(2k)}^{(3s+2)}\,\right|\prod\limits_{k=1}^{r}\left|\,g_{i(2k-1)}^{(3s+1)}\,\right|}{\left|\,Q_0^{(3s+2)}\,\right|},\quad \text{якщо}\quad 3s+2=2r\,,$$

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{3s+2}|\,a_{i(k)}\,|}{Q_{i(3s+2)}^{(3s+2)}\prod\limits_{k=0}^{3s+1}Q_{i(k)}^{(3s+1)}Q_{i(k)}^{(3s+2)}}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{r}\left|\,g_{i(2k-1)}^{(3s+2)}\,\right|\prod\limits_{k=1}^{r-1}\left|\,g_{i(2k)}^{(3s+1)}\,\right|}{\left|\,Q_0^{(3s+1)}\,\right|},\quad \text{якщо}\quad 3s+2=2r-1\,.$$

Використовуючи те, що $\mathbf{a}_{i(3k+1)}\in E_{i(3k+1)}$, $i(3k+1)\in I_{3k+1}$, $k=0,1,2,\ldots$, і нерівності (7‴), (9‴), встановимо оцінку для залишків $Q_{i(3p+1)}^{(3s+j)}$, $j=1,2$:

$$Q_{i(3p+1)}^{(3s+j)}=1-\sum_{i_{3p+2}=1}^{N_{i(3p+1)}}\frac{|\,a_{i(3p+2)}\,|}{Q_{i(3p+2)}^{(3s+j)}}>1-\sum_{i_{3p+2}=1}^{N_{i(3p+1)}}|\,a_{i(3p+2)}\,|\ge\rho_{i(3p+1)}^{(1)}>0\,.$$

Тоді оцінки (9′), (7″) матимуть вигляд

$$\rho_{i(3p+1)}^{(1)}<Q_{i(3p+1)}^{(3s+j)}<1,\qquad j=1,2\,. \tag{14}$$

На основі нерівностей (7′), (7‴), (14) оцінимо зверху величини $\sum\limits_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\left|\,g_{i(k)}^{(3s+2)}\,\right|$, $i(k-1)\in I_{k-1}$, $k=\overline{1,3s+2}$. Тоді матимемо

для $k=3p+2$:

$$\sum_{i_{3p+2}=1}^{N_{i(3p+1)}}\left|\,g_{i(3p+2)}^{(3s+2)}\,\right|=\frac{\sum\limits_{i_{3p+2}=1}^{N_{i(3p+1)}}\frac{|\,a_{i(3p+2)}\,|}{Q_{i(3p+2)}^{(2s+2)}}}{1-\sum\limits_{i_{3p+2}=1}^{N_{i(3p+1)}}\frac{|\,a_{i(3p+2)}\,|}{Q_{i(3p+2)}^{(2s+2)}}}<\frac{\sum\limits_{i_{3p+2}=1}^{N_{i(3p+1)}}|\,a_{i(3p+2)}\,|}{1-\sum\limits_{i_{3p+2}=1}^{N_{i(3p+1)}}|\,a_{i(3p+2)}\,|}\le\frac{1-\rho_{i(3p+1)}^{(1)}}{\rho_{i(3p+1)}^{(1)}}\,,$$

$$i(3p+1)\in I_{3p+1},\ \ p=\overline{0,s}\,;$$

для $k=3p+1$:

$$\sum_{i_{3p+1}=1}^{N_{i(3p)}}\left|\,g_{i(3p+1)}^{(3s+2)}\,\right|=\frac{\sum\limits_{i_{3p+1}=1}^{N_{i(3p)}}\frac{|\,a_{i(3p+1)}\,|}{Q_{i(3p+1)}^{(2s+2)}}}{\sum\limits_{i_{3p+1}=1}^{N_{i(3p)}}\frac{|\,a_{i(3p+1)}\,|}{Q_{i(3p+1)}^{(2s+2)}}-1}<\frac{\sum\limits_{i_{3p+1}=1}^{N_{i(3p)}}\frac{|\,a_{i(3p+1)}\,|}{\rho_{i(3p+1)}^{(2)}}}{\sum\limits_{i_{3p+1}=1}^{N_{i(3p)}}\frac{|\,a_{i(3p+1)}\,|}{\rho_{i(3p+1)}^{(2)}}-1}\le\frac{1+\rho_{i(3p)}^{(2)}}{\rho_{i(3p)}^{(2)}}\,,$$

$$i(3p)\in I_{3p},\ \ p=\overline{0,s}\,;$$

для $k=3p$:

$$\sum_{i_{3p}=1}^{N_{i(3p-1)}}\left|\,g_{i(3p)}^{(3s+2)}\,\right|=\frac{\sum\limits_{i_{3p}=1}^{N_{i(3p-1)}}\frac{|\,a_{i(3p)}\,|}{\left|\,Q_{i(3p)}^{(2s+2)}\,\right|}}{1+\sum\limits_{i_{3p}=1}^{N_{i(3p-1)}}\frac{|\,a_{i(3p)}\,|}{\left|\,Q_{i(3p)}^{(2s+2)}\,\right|}}<\frac{\sum\limits_{i_{3p}=1}^{N_{i(3p-1)}}\frac{|\,a_{i(3p)}\,|}{\rho_{i(3p)}^{(2)}}}{1+\sum\limits_{i_{3p}=1}^{N_{i(3p-1)}}\frac{|\,a_{i(3p)}\,|}{\rho_{i(3p)}^{(2)}}}\le\frac{\rho_{i(3p-1)}^{(2)}-1}{\rho_{i(3p-1)}^{(2)}}\,,$$

$$i(3p-1)\in I_{3p-1},\ \ p=\overline{0,s}\,.$$

Використовуючи умови (9″), (9‴), (14) і позначення (13′)−(13‴), легко показати правильність оцінок $\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \left| g_{i(k)}^{(3s+1)} \right| < \nu_{k-1}$, звідки отримуємо, що $f^{(3s+2)} - f^{(3s+1)} < \dfrac{1}{\rho_0^{(2)}} \prod_{k=0}^{3s+1} \nu_k$. Теорему доведено. ◊

Теорема 4.

(***i***) *Сукупність множин* $\{E_{i(k)}\}$, *що визначаються згідно* з (6′), (6‴), *де* $\rho_{i(3k+1)}^{(2)} = 1,\ 0 < \rho_{i(3k)}^{(2)} \le 1$, *і*

$$E_{i(3k+1)} = \left\{ \mathbf{x}_{i(3k+1)} \in \mathbb{R}_{-}^{N_{i(3k+1)}} :\ \sum_{i_{3k+2}=1}^{N_{i(3k+1)}} \frac{|\, x_{i(3k+2)} \,|}{2 - \rho_{i(3k+2)}^{(2)}} < 1 \right\}, \tag{15}$$

$i(3k+1) \in I_{3k+1},\ k = 0,1,2,\ldots$, *де* $1 < \rho_{i(3k+2)}^{(2)} < 2$, *є послідовністю множин збіжності підпослідовностей підхідних дробів* $\{f^{(3s)}\}$, $\{f^{(3s+1)}\}$, $\{f^{(3s+2)}\}$ *ГЛД* (1).

(***ii***) *Сукупність множин* $\{E_{i(k)}\}$, *що визначаються згідно з* (6′), (6‴), *де* $\rho_{i(3k+1)}^{(2)} = 1,\ 0 < \rho_{i(3k)}^{(2)} \le 1$, *і*

$$E_{i(3k+1)} = \left\{ \mathbf{x}_{i(3k+1)} \in \mathbb{R}_{-}^{N_{i(3k+1)}} :\ \sum_{i_{3k+2}=1}^{N_{i(3k+1)}} \frac{|\, x_{i(3k+2)} \,|}{2 - \rho_{i(3k+2)}^{(2)}} < 1 - \rho_{i(3k+1)}^{(1)} \right\}, \tag{16}$$

$i(3k+1) \in I_{3k+1},\ k = 0,1,2,\ldots$, *де* $1 < \rho_{i(3k+2)}^{(2)} < 2,\ 0 < \rho_{i(3k+1)}^{(1)} < 1$, *є послідовністю множин збіжності ГЛД* (1), *якщо виконується умова* (12), *де* $\{\nu_k\}$ – *послідовність додатних сталих, які визначаються співвідношеннями* (13′)−(13‴).

Д о в е д е н н я. Оскільки $1 < \rho_{i(3k+2)}^{(2)} < 2$, збіжність підпослідовностей $\{f^{(3s+1)}\}$, $\{f^{(3s+2)}\}$ випливає з властивості вилки (8). Доведемо, що сукупність множин $\{E_{i(k)}\}$ є також послідовністю множин збіжності підпослідовності $\{f^{(3s)}\}$, тобто при виконанні умов $\mathbf{a}_{i(k)} \in E_{i(k)},\ i(k) \in I_k,\ k = 0,1,2,\ldots$, існує скінченна границя $\lim_{s\to\infty} f^{(3s)} = F_0$. З того, що $\mathbf{a}_{i(k)} \in E_{i(k)}$, де $E_{i(3k+1)}$ визначаються згідно з (15), методом математичної індукції можна показати правильність таких оцінок для величин $Q_{i(k)}^{(3s)},\ k = \overline{0,3s}$:

$$Q_{i(3p)}^{(3s)} < -\rho_{i(3p)}^{(2)}, \qquad i(3p) \in I_{3p}, \quad p = \overline{0, s-1}, \qquad Q_{i(3s)}^{(3s)} = 1, \tag{17′}$$

$$1 < Q_{i(3p-1)}^{(3s)} < \rho_{i(3p-1)}^{(2)}, \quad i(3p-1) \in I_{3p-1},\ p = \overline{1, s-1}, \quad 0 < Q_{i(3s-1)}^{(3s)} < 1, \tag{17″}$$

$$0 < Q_{i(3p-2)}^{(3s)} < 1, \qquad i(3p-2) \in I_{3p-2}, \qquad p = \overline{1, s}. \tag{17‴}$$

Розглянувши різницю між підхідними дробами $f^{(3(s+1))}$ та $f^{(3s+2)}$, $f^{(3(s+1))}$ та $f^{(3s-1)}$ і врахувавши оцінки (7′)−(7‴), (17′)−(17‴), отримуємо такі нерівності:

$$f^{(3s+2)} < f^{(3(s+1))} < f^{(3s-1)}, \qquad s = 1,2,\ldots,$$

з яких випливає, що існує скінченна границя $\lim\limits_{s\to\infty} f^{(3s)} = F_0$. Якщо множини $E_{i(3k+1)}$ визначаються згідно з (16), легко показати правильність оцінок (14) для величин $Q_{i(3p+1)}^{(3s+j)}$, $j = 0,1,2$, при допустимих значеннях мультиіндексів. Виконання умови (12) забезпечує рівність границь F_1, F_2 до яких відповідно збігаються підпослідовності $\{ f^{(3s+1)}\}$, $\{ f^{(3s+2)}\}$, тобто $F_1 = F_2 = F$, окрім того, $F_0 = F$. Теорему доведено. ◊

Теорема 5. *Нехай модулі відносних похибок елементів ГЛД* (1) *є рівномірно обмеженими зверху*:

$$| \alpha_{i(k)} | \le \alpha < 1, \qquad i(k) \in I_k, \qquad k = 1,2,\dots .$$

Тоді

(***i***) *сукупність множин* $\{ E_{i(k)}\}$, *що визначаються згідно* з (6′), (6‴), (11), *є послідовністю множин стійкості підпослідовності підхідних дробів* $\{ f^{(3s+2)}\}$ *ГЛД* (1), *якщо збігається ряд*

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} c_{\ell+1}\,, \tag{18}$$

де $$c_\ell = \begin{cases} \Pi_\ell, & \ell = 3p+2, \quad p \ge 0, \\ (1-\nu_{\ell-2})^{-1}\Pi_\ell, & \ell = 3p+1, \quad p \ge 1, \\ (1-\nu_{\ell-1})^{-1}\Pi_\ell, & \ell = 3p, \quad p \ge 1, \end{cases} \qquad \Pi_\ell = \prod_{k=0}^{\ell-1} \nu_k\,,$$

а ν_k *визначаються співвідношеннями* (13′)–(13‴);

(***ii***) *сукупність множин* $\{ E_{i(k)}\}$, *що визначаються згідно з* (6′), (6‴), (11), *де* $\rho_{i(3k+1)}^{(2)} = 1$, *є послідовністю множин стійкості підпослідовності підхідних дробів* $\{ f^{(s_\ell)}\}$, $\{s_\ell\} = \mathbb{N} \setminus \{3k,\ k = 1,2,\dots\}$, *ГЛД* (1), *якщо збігається ряд* (18);

(***iii)*** *сукупність множин* $\{ E_{i(k)}\}$, *що визначаються згідно з* (6′), (6‴), (16), *де* $\rho_{i(3k+1)}^{(2)} = 1$, *є послідовністю множин стійкості ГЛД* (1), *якщо збігається ряд*

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} c'_{\ell+1}\,, \tag{19}$$

де $$c_\ell = \begin{cases} \Pi_\ell, & \ell = 3p+2, \quad p \ge 0, \\ (1-2\nu_{\ell-2})^{-1}\Pi_\ell, & \ell = 3p+1, \quad p \ge 1, \\ (1-2\nu_{\ell-1})^{-1}\Pi_\ell, & \ell = 3p, \quad p \ge 1. \end{cases}$$

Для відносної похибки підхідного дробу $f^{(n)}$ *справджується оцінка*

$$| \varepsilon^{(n)} | < \max\{ \breve\alpha_{i(k)},\ i(k) \in I_k,\ k = \overline{1,n}\} \left(\frac{1}{\rho_0^{(2)}} \sum_{i_1=1}^{N_0} \frac{| a_{i(1)} |}{\rho_{i(1)}^{(1)}} + C_n \right), \tag{20}$$

де

$$C_n = \begin{cases} \sum\limits_{\ell=1}^{n-1} c_{\ell+1}, & n \ne 3s, \\ \sum\limits_{\ell=1}^{n-1} c'_{\ell+1}, & n = 3s, \end{cases} \qquad \breve\alpha_{i(k)} = \begin{cases} | \alpha_{i(k)} |, & k = 6p+j, \quad j = 0,1,2, \quad p \ge 0, \\ | \tilde\alpha_{i(k)} |, & k = 6p+3+j, \quad j = 0,1,2, \quad p \ge 0. \end{cases}$$

Д о в е д е н н я. Виконання умови ***1°***) означення стійкості підпослідовності $\{ f^{(3s+2)} \}$ випливає з теореми 1. Враховуючи те, що $\mathbf{a}_{i(k)}$, $\tilde{\mathbf{a}}_{i(k)} \in E_{i(k)}$, де $E_{i(k)}$ визначаються згідно з (6′), (6‴), (11), правильними є такі оцінки: $\sum\limits_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \left| q_{i(k)}^{(3s+2)} \right| < \nu_{k-1}$, $i(k-1) \in I_{k-1}$, $k = \overline{1,\ell}$, $\ell = \overline{1,3s+2}$. Знайдемо оцінки зверху для величин $\sum\limits_{i_\ell=1}^{N_{i(\ell-1)}} \left| q_{i(\ell)}^{(3s+2)} \gamma_{i(\ell)}^{(3s+2)} \right|$, $i(\ell-1) \in I_{\ell-1}$, $\ell = \overline{2,3s+2}$. Нехай $\ell = 3p + j$, $j = 0,1,2$. Припустимо, що p − парне, тоді для допустимих значень мультиіндексів маємо

для $j = 2$:

$$\sum_{i_{3p+2}=1}^{N_{i(3p+1)}} \left| q_{i(3p+2)}^{(3s+2)} \gamma_{i(3p+2)}^{(3s+2)} \right| = \sum_{i_{3p+2}=1}^{N_{i(3p+1)}} \left| \frac{a_{i(3p+2)}}{Q_{i(3p+1)}^{(3s+2)} \tilde{Q}_{i(3p+2)}^{(3s+2)}} \alpha_{i(3p+2)} \right| <$$

$$< \max_{i(3p+2) \in I_{3p+2}} \{ | \alpha_{i(3p+2)} | \} \frac{\sum\limits_{i_{3p+2}=1}^{N_{i(3p+1)}} | a_{i(3p+2)} |}{1 - \sum\limits_{i_{3p+2}=1}^{N_{i(3p+1)}} | a_{i(3p+2)} |} \le$$

$$\le \max_{i(3p+2) \in I_{3p+2}} \{ | \alpha_{i(3p+2)} | \} \frac{1 - \rho_{i(3p+1)}^{(1)}}{\rho_{i(3p+1)}^{(1)}} ;$$

для $j = 1$:

$$\sum_{i_{3p+1}=1}^{N_{i(3p)}} \left| q_{i(3p+1)}^{(3s+2)} \gamma_{i(3p+1)}^{(3s+2)} \right| = \sum_{i_{3p+1}=1}^{N_{i(3p)}} \left| \frac{a_{i(3p+1)}}{\tilde{Q}_{i(3p)}^{(3s+2)} Q_{i(3p+1)}^{(3s+2)}} \alpha_{i(3p+1)} \right| =$$

$$= \frac{1}{1 + \varepsilon_{i(3p)}^{(3s+2)}} \sum_{i_{3p+1}=1}^{N_{i(3p)}} \left| g_{i(3p+1)}^{(3s+2)} \alpha_{i(3p+1)} \right| <$$

$$< \frac{1}{1 + \varepsilon_{i(3p)}^{(3s+2)}} \max_{i(3p+1) \in I_{3p+1}} \{ | \alpha_{i(3p+1)} | \} \frac{1 + \rho_{i(3p)}^{(2)}}{\rho_{i(3p)}^{(2)}} ;$$

для $j = 0$:

$$\sum_{i_{3p}=1}^{N_{i(3p-1)}} \left| q_{i(3p)}^{(3s+2)} \gamma_{i(3p)}^{(3s+2)} \right| = \sum_{i_{3p}=1}^{N_{i(3p-1)}} \left| \frac{a_{i(3p)}}{Q_{i(3p-1)}^{(3s+2)} \tilde{Q}_{i(3p)}^{(3s+2)}} \alpha_{i(3p)} \right| <$$

$$< \max_{i(3p) \in I_{3p}} \{ | \alpha_{i(3p)} | \} \sum_{i_{3p}=1}^{N_{i(3p-1)}} \frac{| a_{i(3p)} |}{\rho_{i(3p)}^{(2)}} \le$$

$$\le \max_{i(3p) \in I_{3p}} \{ | \alpha_{i(3p)} | \} (\rho_{i(3p-1)}^{(2)} - 1) .$$

Таким самим способом отримуємо оцінки для величин $\sum\limits_{i_{3p+j}=1}^{N_{i(3p+j-1)}} \left| q_{i(3p+j)}^{(3s+2)} \gamma_{i(3p+j)}^{(3s+2)} \right|$ при непарному p. Враховуючи формулу (4) та отримані оцінки, матимемо

$$\sum_{i_1=1}^{N_0} \left| \gamma_{i(1)}^{(3s+2)}\, q_{i(1)}^{(3s+2)} \right| \le \max_{i(1)\in I_1} \left\{ \breve{\alpha}_{i(1)} \right\} \frac{1}{\rho_0^{(2)}} \sum_{i_1=1}^{N_0} \frac{\left| a_{i(1)} \right|}{\rho_{i(1)}^{(1)}} ,$$

$$\sum_{i_1=1}^{N_0} \sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}} \ldots \sum_{i_l=1}^{N_{i(\ell-1)}} \left| \gamma_{i(\ell)}^{(3s+2)} \right| \prod_{k=1}^{\ell} \left| q_{i(\ell)}^{(3s+2)} \right| < \max_{i(\ell)\in I_\ell} \left\{ \breve{\alpha}_{i(\ell)} \right\} c_\ell , \quad 2 \le \ell \le 3s+2 ,$$

що доводить оцінку (20) для абсолютної величини відносної похибки $\varepsilon^{(3s+2)}$. З отриманої оцінки випливає, що збіжність ряду (18) забезпечує виконання умови *2°*) означення стійкості підпослідовності $\left\{ f^{(3s+2)} \right\}$.

Зі збіжності ряду (18) випливає збіжність ряду $\sum\limits_{\ell=1}^{\infty} \Pi_{\ell+1}$, що забезпечує виконання умови (12) теореми 3, звідси отримуємо виконання умови *1°*) означення стійкості підпослідовності $\left\{ f^{(s_\ell)} \right\}, \ \left\{ s_\ell \right\} = \mathbb{N} \setminus \left\{ 3k, \ k = 1, 2, \ldots \right\}$. Враховуючи, що $\mathbf{a}_{i(k)}, \ \tilde{\mathbf{a}}_{i(k)} \in E_{i(k)}$, де $E_{i(k)}$ визначаються згідно з (6′), (6‴), (11), і $\rho_{i(3k+1)}^{(2)} = 1$, то отримані вище оцінки будуть правильними і для величин $\sum\limits_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \left| q_{i(k)}^{(3s+1)} \right|, \ \ i(k-1) \in I_{k-1}, \ \ k = \overline{1,\ell}, \ \ \ell = \overline{1, 3s+1}, \ \ \sum\limits_{i_\ell=1}^{N_{i(\ell-1)}} \left| q_{i(\ell)}^{(3s+1)}\, \gamma_{i(\ell)}^{(3s+1)} \right|$, $i(\ell-1) \in I_{\ell-1}, \ \ell = \overline{2, 3s+1}$. Тому збіжність ряду (18) забезпечує виконання умови *2°*) означення стійкості підпослідовності $\left\{ f^{(s_\ell)} \right\}, \ \left\{ s_\ell \right\} = \mathbb{N} \setminus \left\{ 3k, \ k = 1, 2, \ldots \right\}$.

Зі збіжності ряду (19) випливає збіжність ряду (18), тому сукупність множин $\left\{ E_{i(k)} \right\}$, що визначаються згідно з (6′), (6‴), (16), є послідовністю множин стійкості підпослідовності $\left\{ f^{(s_\ell)} \right\}, \ \ \left\{ s_\ell \right\} = \mathbb{N} \setminus \left\{ 3k, \ \ k = 1, 2, \ldots \right\}$.

Для величин $\sum\limits_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \left| q_{i(k)}^{(3s)} \right|, \ \ i(k-1) \in I_{k-1}, \ \ k = \overline{1,\ell}, \ \ \ell = \overline{1, 3s}$, справджуються такі оцінки:

$$\sum_{i_{3p}=1}^{N_{i(3p-1)}} \left| q_{i(3p)}^{(3s)} \right| < \frac{\rho_{i(3p-1)}^{(2)} - 1}{\rho_{i(3p-1)}^{(2)}} \le \nu_{3p-1}, \qquad i(3p-1) \in I_{3p-1}, \ \ p = \overline{1, s-1},$$

$$\sum_{i_{3s}=1}^{N_{i(3s-1)}} \left| q_{i(3s)}^{(3s)} \right| < \frac{\rho_{i(3s-1)}^{(2)} - 1}{2 - \rho_{i(3s-1)}^{(2)}} \le \frac{\nu_{3s-1}}{1 - 2\nu_{3s-1}}, \qquad i(3s-1) \in I_{3s-1},$$

$$\sum_{i_{3p-1}=1}^{N_{i(3p-2)}} \left| q_{i(3p-1)}^{(3s)} \right| < \frac{1 - \rho_{i(3p-2)}^{(1)}}{\rho_{i(3p-2)}^{(1)}} \le \nu_{3p-2}, \qquad i(3p-2) \in I_{3p-2}, \ \ p = \overline{1, s},$$

$$\sum_{i_{3p-2}=1}^{N_{i(3(p-1))}} \left| q_{i(3p-2)}^{(3s)} \right| < \frac{1 + \rho_{i(3(p-1))}^{(2)}}{\rho_{i(3(p-1))}^{(2)}} \le \nu_{3(p-1)}, \qquad i(3(p-1)) \in I_{3(p-1)}, \ \ p = \overline{1, s}.$$

Для величин $\sum\limits_{i_\ell=1}^{N_{i(\ell-1)}} \left| q_{i(\ell)}^{(3s)}\, \gamma_{i(\ell)}^{(3s)} \right|$ справджуються нерівності

$$\sum_{i_\ell=1}^{N_{i(\ell-1)}} \left| q_{i(\ell)}^{(3s)} \gamma_{i(\ell)}^{(3s)} \right| < \max_{i(\ell)\in I_\ell} \{ \breve{\alpha}_{i(\ell)} \} \frac{\nu_{\ell-1}}{\nu'_{\ell-1}} (1 + \breve{\varepsilon}_{i(\ell-1)})^{-1} ,$$

де $$\nu'_{\ell-1} = \begin{cases} 1, & \ell \ne 3p, \\ 1 - 2\nu_{\ell-1}, & \ell = 3p, \end{cases}$$

$$\breve{\varepsilon}_{i(\ell-1)} = \begin{cases} 0, & \ell \ne 3p+1, \\ \tilde{\varepsilon}_{i(\ell-1)} & \ell = 3p+1, \quad \text{якщо } \ell \text{ – парне}, \\ \varepsilon_{i(\ell-1)} & \qquad\qquad\ \ \text{якщо } \ell \text{ – непарне}, \end{cases} \qquad \ell = \overline{2, 3s} .$$

Використовуючи отримані оцінки, як і в попередніх випадках, приходимо до висновку, що збіжність ряду (19) забезпечує виконання умови ***2°***) означення стійкості ГЛД (1). Теорему доведено. ◊

1. *Антонова Т. М.* Деякі властивості гіллястих ланцюгових дробів з недодатними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 1. – С. 11–15.
2. *Антонова Т. М.* Достатні ознаки збіжності і стійкості інтегральних ланцюгових дробів: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів: Львів. держ. ун-т ім. І. Франка. – 1996. – 18 с.
3. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
4. *Боднар Д. І., Гладун В. Р.* Достатні умови стійкості гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 1. – С. 22–27.
5. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. – К.: Наук. думка, 1974. – 272 с.
6. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
7. *Недашковский Н. А.* О сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей некоторых типов // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1984. – Вып. 20. – С. 27–31.
8. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
9. *Терских В. П.* Метод цепных дробей в применении к исследованию колебаний механических систем: В 2 т. – Л.: Судпромгиз, 1955. – Т. 1. – 376 с.; Т. 2. – 332 с.

ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧАСТНЫМИ ЧИСЛИТЕЛЯМИ

Установлены множества сходимости и устойчивости ветвящихся цепных дробей с отрицательными частными числителями и знаменателями, равными единице. Исследованы множества сходимости и устойчивости подпоследовательностей их подходящих дробей $\{f^{(3s)}\}$, $\{f^{(3s+1)}\}$, $\{f^{(3s+2)}\}$.

CONDITIONS OF CONVERGENCE AND STABILITY OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS WITH NEGATIVE PARTIAL NUMERATORS

The sets of convergence and stability of branched continued fractions with negative partial numerators and denominators equal to one are established, the sets of convergence and stability of their approximants $\{f^{(3s)}\}$, $\{f^{(3s+1)}\}$, $\{f^{(3s+2)}\}$ *are examined.*

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
02.12.02