УДК 519.526

Н. П. Гоєнко

ЗАСТОСУВАННЯ БАГАТОВИМІРНОГО АНАЛОГУ ТЕОРЕМИ ВОРПІЦЬКОГО ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ РОЗВИНЕНЬ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЛАУРІЧЕЛЛИ У ГІЛЛЯСТІ ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ

Розглянуто розвинення відношень гіпергеометричних функцій Лаурічелли F_D у гіллясті ланцюгові дроби типу Ньорлунда і Ґаусса. З використанням багатовимірного аналогу теореми Ворпіцького досліджено області збіжності цих розвинень у випадку довільних комплексних параметрів функції F_D.

Вперше функції Лаурічелли F_A, F_B, F_C, F_D були означені в роботі [9] через кратні степеневі ряди, зокрема,

$$F_D(a, b_1, \ldots b_N; c; z_1, \ldots, z_N) =$$

$$= \sum_{k_1,\cdots,k_N=0}^{\infty} \frac{(a)_{k_1+\ldots+k_N}(b_1)_{k_1}\ldots(b_N)_{k_N}}{(c)_{k_1+\ldots+k_N}} \frac{z_1^{k_1}\ldots z_N^{k_N}}{k_1!\ldots k_N!}, \tag{1}$$

де a, $b_1, \ldots, b_N$, c – комплексні числа, причому $c \neq 0, -1, -2, \ldots$; $z_1, \ldots, z_N$ – комплексні змінні; $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)$ – символ Похгаммера, $(\alpha)_0 = 1$. Ряд (1) збігається в області $\{\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N : |z_i| < 1,\ i = \overline{1, N}\}$.

В одновимірному випадку всі чотири функції Лаурічелли збігаються з гіпергеометричною функцією Ґаусса $F(a, b; c; z)$. Побудовано розвинення відношень гіпергеометричних функцій Ґаусса у неперервні дроби, досліджено області збіжності цих розвинень [8, 10]. Для відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли побудовано розвинення у гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД), які при $N = 1$ збігаються з відомими розвиненнями у неперервні дроби Ґаусса і Ньорлунда для відповідних відношень гіпергеометричних функцій Ґаусса [4]. При дослідженні збіжності розвинення у ГЛД типу Ньорлунда [3] було використано теорему Слєшинського – Прінґсгейма з певними обмеженнями на параметри функції: a, $b_1, \ldots b_N$, c – дійсні числа такі, що $a > 0$, $b_i > 0$, $i = \overline{1, N}$, $2c > a + \sum_{k=1}^{N} b_k + 1$. Встановлена за таких обмежень область збіжності

$$G = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \frac{1}{2} - \operatorname{Re} z_i \geq \sqrt{|z_i(1 - z_i)|}, \quad i = \overline{1, N} \right\}$$

ГЛД типу Ньорлунда є відмінною від області збіжності степеневого ряду (1).

Метою роботи є встановлення областей збіжності ГЛД типу Ньорлунда та Ґаусса без додаткових обмежень на параметри гіпергеометричної функції F_D. При цьому використовується багатовимірний аналог теореми Ворпіцького [2]. Ця теорема застосовувалась при дослідженні областей збіжності двовимірних неперервних дробів у роботах Х. Й. Кучмінської [5], W. Siemaszko [11], О. М. Сусь [4, 6], інтегральних ланцюгових дробів – у монографії М. С. Сявавка [7], гіллястих ланцюгових дробів – у роботі H. Waadeland'a [9], О. Є. Баран [1].

1. Збіжність ГЛД типу Ньорлунда. Відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли

$$\frac{F_D(a+1, \mathbf{b}+\mathbf{e}_1; c+1; \mathbf{z})}{F_D(a, \mathbf{b}; c; \mathbf{z})}$$

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2003. – 46, № 4. – С. 44-49.

розвивається у ГЛД типу Ньорлунда

$$\left(b_0(\mathbf{z}) + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \sum_{i_n=1}^{N} \frac{a_{i(n)}(\mathbf{z})}{b_{i(n)}(\mathbf{z})} \right)^{-1}, \tag{2}$$

де

$$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_N), \qquad \mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0),$$

$$b_0(\mathbf{z}) = 1 - \frac{a+1}{c} z_1 - \sum_{i=1}^{N} \frac{b_i}{c} z_i,$$

$$a_{i(n)}(\mathbf{z}) = \frac{(a+n)(b_{i_n} + p_{i(n)})}{(c+n-1)(c+n)} z_{i_n}(1 - z_{i_n}), \tag{3}$$

$$b_{i(n)}(\mathbf{z}) = 1 - \frac{a+n}{c+n} z_{i_n} - \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k + p_{i(n)k}}{c+n} z_k, \qquad p_{i(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} \delta_{i_n}^{i_k} + \delta_{i_n}^{1}, \tag{4}$$

$i(n) = i_1 i_2 \ldots i_n$ – мультиіндекс, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Зауваження 1. Елементи $p_{i(n)}$, що входять у вираз для коефіцієнтів ГЛД (2), мають властивості $0 \le p_{i(n)} \le n$, $\sum_{i_n=1}^{N} p_{i(n)} = n$.

Теорема 1. *ГЛД* (2), *коефіцієнти якого визначаються формулами* (3), (4), *де* $a, b_1, \ldots, b_N, c$ *– довільні комплексні числа, причому* $c \ne 0, -1, -2, \ldots$, *рівномірно та абсолютно збігається в області*

$$D = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_i| < R, \ i = \overline{1, N} \right\}, \tag{5}$$

$$R = \begin{cases} \dfrac{\beta + 2\alpha N - 2\sqrt{\alpha N(\alpha N + \beta + 1)}}{\beta^2 - 4\alpha N}, & \beta^2 \ne 4\alpha N, \\[2ex] \dfrac{1}{\beta^2 + 2\beta}, & \beta^2 = 4\alpha N, \end{cases} \tag{6}$$

$$\alpha = \sup \left\{ \frac{|a+n| \cdot |b_i + n|}{|c+n-1| \cdot |c+n|}, \qquad i = \overline{1, N}, \qquad n \in \mathbb{N} \right\}, \tag{7}$$

$$\beta = \sup \left\{ \left(|a| + \sum_{k=1}^{N} |b_k| + 1 + 2n \right) |c+n|^{-1}, \qquad n \in \mathbb{N} \right\}, \tag{8}$$

і справджується оцінка швидкості збіжності

$$|f(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z})| \le \frac{2}{n+1}, \tag{9}$$

де $f_n(\mathbf{z})$ *–* n*-й підхідний дріб ГЛД* (2), $f(\mathbf{z})$ *– значення цього ГЛД.*

Д о в е д е н н я. Використовуючи еквівалентні перетворення [1], зводимо ГЛД (2) до гіллястого ланцюгового дробу з частинними знаменниками, що дорівнюють одиниці:

$$c_0(\mathbf{z}) \left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \sum_{i_n=1}^{N} \frac{c_{i(n)}(\mathbf{z})}{1} \right)^{-1}, \tag{10}$$

де $c_0(\mathbf{z}) = b_0^{-1}(\mathbf{z})$, $c_{i(n)}(\mathbf{z}) = a_{i(n)}(\mathbf{z}) b_{i(n)}^{-1}(\mathbf{z}) b_{i(n-1)}^{-1}(\mathbf{z})$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = 1, 2, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$, $i(0) = 0$.

Покажемо, що для $\mathbf{z} \in D$

$$|\, c_{i(n)}(\mathbf{z}) \,| \le \frac{1}{4N}\,. \tag{11}$$

Враховуючи зауваження 1, позначення (7), (8) і припускаючи, що $|\, z_i \,| < r < \frac{1}{\beta}$, $i = \overline{1, N}$, маємо

$$|\, b_{i(n)}(\mathbf{z}) \,| \ge 1 - \left| \frac{a+n}{c+n} \right| \cdot |\, z_{i_n} \,| - \sum_{k=1}^{N} \frac{|\, b_k + p_{i(n)k} \,|}{|\, c+n \,|} \cdot |\, z_k \,| \ge$$

$$\ge 1 - \frac{|\, a \,| + \sum_{k=1}^{N} |\, b_k \,| + 2n + 1}{|\, c+n \,|} \cdot r \ge 1 - \beta r > 0\,,$$

$$|\, a_{i(n)}(\mathbf{z}) \,| \le \frac{|\, a+n \,| \cdot |\, b_{i_n} + n \,|}{|\, c+n-1 \,| \cdot |\, c+n \,|} \cdot |\, z_{i_n} \,| \cdot |\, 1 - z_{i_n} \,| \le \alpha\, r\,(1+r)\,.$$

Отже, $\left| c_{i(n)}(\mathbf{z}) \right| \le \dfrac{\alpha\, r\,(1+r)}{(1-\beta r)^2}$.

Число R, яке визначається згідно з (6), є найменшим додатним коренем рівняння $(\beta^2 - 4N\alpha)\, x^2 - (2\beta + 4N\alpha)\, x + 1 = 0$. Очевидно, що $R < \frac{1}{\beta}$. Для всіх $r \in [\, 0, R \,]$ виконується нерівність

$$\frac{\alpha\, r\,(1+r)}{(1-\beta r)^2} \le \frac{1}{4N}\,.$$

Звідси випливає, що коефіцієнти $c_{i(n)}(\mathbf{z})$ задовольняють умову (11). Отже, за багатовимірним аналогом ознаки збіжності Ворпіцького [2] ГЛД (2) рівномірно та абсолютно збігається в області D і справджується оцінка швидкості збіжності (9).

2. Збіжність розвинення відношення функцій F_D у гіллястий ланцюговий дріб типу Ґаусса. У роботі [3] для відношення функцій Лаурічелли

$$\frac{F_D(a, \mathbf{b} + \mathbf{e}_1; c+1; \mathbf{z})}{F_D(a, \mathbf{b}; c; \mathbf{z})}$$

побудовано багатовимірний аналог розвинення у неперервний дріб Ґаусса

$$\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \sum_{i_n=1}^{N} \frac{u_{i(n)}(\mathbf{z})}{v_{i(n)}(\mathbf{z})} \right)^{-1}, \tag{12}$$

коефіцієнти якого обчислюються за формулами

$$u_{i(2n)}(\mathbf{z}) = -\frac{(c-a+n)(b_{i_{2n}} + p_{i(2n)} - s_{i(2n)})}{(c+2n-1)(c+2n)} \cdot z_{i_{2n}}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots\,, \tag{13}$$

$$u_{i(2n+1)}(\mathbf{z}) =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{a+n}{(c+2n)(c+2n+1)} \left(c - \sum_{j=1}^{N} b_j + k_{i(2n+1)} - 2 \right) z_{i_{2n+1}}, & i_{2n} = i_{2n+1}, \\ -\dfrac{(a+n)(b_{i_{2n+1}} + p_{i(2n+1)} - s_{i(2n+1)})}{(c+2n)(c+2n+1)} (z_{i_{2n}} - z_{i_{2n+1}}), & i_{2n} \ne i_{2n+1}, \end{cases} \tag{14}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad i_0 = i\,,$$

$$v_{i(2n)} = 1, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$v_{i(2n+1)} = \begin{cases} 1, & i_{2n} = i_{2n+1}, \\ 1 - \dfrac{a+n}{c+2n+1} z_{i_{2n+1}}, & i_{2n} \neq i_{2n+1}, \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

$$p_{i(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} \delta_{i_n}^{i_k} + \delta_{i_n}^{1}, \quad k_{i(n+1)} = \sum_{j=1}^{[n/2]} \delta_{i_{2j}}^{i_{2j+1}}, \quad s_{i(n+1)} = \sum_{j=1}^{[n/2]} \delta_{i_{2j}}^{i_{2j+1}} \cdot \delta_{i_{2j}}^{i_{n+1}},$$

$i(n) = i_1 i_2 \ldots i_n$ – мультиіндекс, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Використовуючи багатовимірний аналог теореми Ворпіцького, встановимо ознаку збіжності функціонального ГЛД.

Твердження 1. *Нехай елементами* $d_{i(k)}(\mathbf{z})$ *ГЛД*

$$\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{d_{i(k)}(\mathbf{z})}{1} \right)^{-1} \tag{16}$$

є комплексні функції, визначені в деякій області $D_1 \subset \mathbb{C}^N$, *такі, що*

$$\sum_{i_k=1}^{N} | d_{i(k)}(\mathbf{z}) | \le t(1-t), \qquad 0 \le t \le \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Тоді ГЛД (6) *рівномірно та абсолютно збігається в області* D_1 *і справджується оцінка швидкості збіжності*

$$| \tilde{f}(\mathbf{z}) - \tilde{f}_n(\mathbf{z}) | \le \frac{(1-2t)t^n}{(1-t)^{n+1} - t^{n+1}}, \qquad 0 \le t < \frac{1}{2}, \tag{18}$$

або

$$| \tilde{f}(\mathbf{z}) - \tilde{f}_n(\mathbf{z}) | \le \frac{2}{n+1}, \qquad t = \frac{1}{2}, \tag{19}$$

де $\tilde{f}_n(\mathbf{z})$ *– апроксиманти ГЛД* (16), $\tilde{f}(\mathbf{z}) = \lim\limits_{n \to \infty} \tilde{f}_n(\mathbf{z})$.

Д о в е д е н н я проводиться аналогічно, як і в багатовимірному аналозі теореми Ворпіцького [1]. Рівномірна збіжність послідовності апроксимант $\tilde{f}_n(\mathbf{z})$ випливає з того, що мажорантою функціонального ГЛД (16) при умові (17) на коефіцієнти є числовий неперервний дріб

$$\frac{1}{1} - \frac{t(1-t)}{1} - \cdots - \frac{t(1-t)}{1} - \cdots. \tag{20}$$

Оцінки швидкості збіжності (18), (19) одержуємо граничним переходом при $m \to \infty$ з оцінок $| \tilde{f}_m(\mathbf{z}) - \tilde{f}_n(\mathbf{z}) | \le | \tilde{g}_m - \tilde{g}_n |$, де $\tilde{g}_n$ – апроксиманта неперервного дробу (20). ◊

Дослідимо область збіжності ГЛД типу Ґаусса (12), не накладаючи додаткових обмежень на параметри функції F_D.

Теорема 2. *Нехай параметри* a, b_1, …, b_N, c *гіпергеометричної функції* F_D *є комплексними сталими, причому* $c \neq 0, -1, -2, \ldots$.

Тоді гіллястий ланцюговий дріб типу Ґаусса (12), *коефіцієнти якого обчислюються за формулами* (13)–(15), *рівномірно та абсолютно збігається в області*

$$G = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_i| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{|z_j|}{1 - \eta |z_i|} \leq \frac{t(1-t)}{\zeta}, \right.$$

$$\left. \xi |z_i| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{\gamma |z_i - z_j|}{1 - \eta |z_i|} \leq t(1-t), \qquad i, j = \overline{1, N} \right\}, \tag{21}$$

де t *− додатна стала,* $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$,

$$\zeta = \sup \left\{ \frac{|c - a + n| \cdot (|b_i| + n)}{|c + 2n - 1| \cdot |c + 2n|}, \quad i = \overline{1, N}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}, \tag{22}$$

$$\eta = \sup \left\{ \left| \frac{a + n + 1}{c + 2n - 1} \right|, \qquad n \in \mathbb{N} \right\}, \tag{23}$$

$$\gamma = \sup \left\{ \frac{|a + n| \cdot |b_i + n|}{|c + 2n| \cdot |c + 2n + 1|}, \quad i = \overline{1, N}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}, \tag{24}$$

$$\xi = \sup \left\{ |a + n| \cdot \left(\left| c - \sum_{j=1}^{N} b_j \right| + n \right) (|c + 2n| \cdot |c + 2n + 1|)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}, \tag{25}$$

і справджуються оцінки швидкості збіжності в цій області

$$|g(\mathbf{z}) - g_n(\mathbf{z})| \leq \frac{(1 - 2t) t^n}{(1 - t)^{n+1} - t^{n+1}} \qquad \text{при} \qquad 0 \leq t < \frac{1}{2}, \tag{26}$$

$$|g(\mathbf{z}) - g_n(\mathbf{z})| \leq \frac{2}{n + 1} \qquad \text{при} \qquad t = \frac{1}{2}, \tag{27}$$

$g_n(\mathbf{z})$ *−* n *-на апроксиманта ГЛД* (12), $g(\mathbf{z}) = \lim_{m \to \infty} g_m(\mathbf{z})$.

Д о в е д е н н я. Гіллястий ланцюговий дріб

$$\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \sum_{i_n = 1}^{N} \frac{c^*_{i(n)}(\mathbf{z})}{1} \right)^{-1},$$

де $c^*_{i(n)}(\mathbf{z}) = u_{i(n)}(\mathbf{z}) v^{-1}_{i(n)}(\mathbf{z}) v^{-1}_{i(n-1)}(\mathbf{z})$, $n \geq 1$, $v_0 = 1$, одержується еквівалентними перетвореннями з ГЛД (12). Враховуючи формули (13)–(15) для коефіцієнтів $u_{i(n)}(\mathbf{z})$, $v_{i(n)}(\mathbf{z})$ і позначення (22)–(25), для довільних наборів мультиіндексів оцінимо $\sum_{i_n = 1}^{N} \left| c^*_{i(n)}(\mathbf{z}) \right|$ зверху:

$$\sum_{i_{2n} = 1}^{N} \left| c^*_{i(2n)}(\mathbf{z}) \right| \leq \zeta |z_{i_{2n-1}}| + \sum_{\substack{i_{2n} = 1 \\ i_{2n} \neq i_{2n-1}}}^{N} \frac{\zeta |z_{i_{2n}}|}{1 - \eta |z_{i_{2n-1}}|},$$

$$\sum_{i_{2n+1} = 1}^{N} \left| c^*_{i(2n+1)}(\mathbf{z}) \right| \leq \xi |z_{i_{2n}}| + \sum_{\substack{i_{2n+1} = 1 \\ i_{2n+1} \neq i_{2n}}}^{N} \frac{\gamma |z_{i_{2n}} - z_{i_{2n+1}}|}{1 - \eta |z_{i_{2n+1}}|}.$$

Для $\mathbf{z} \in G$ одержимо оцінку

$$\sum_{i_n = 1}^{N} \left| c^*_{i(n)}(\mathbf{z}) \right| \leq t(1 - t).$$

Із твердження 1 випливає, що ГЛД (12) рівномірно та абсолютно збігається в області G і справджуються оцінки (26), (27). ◊

1. *Баран О. Є.* Аналог ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.мех. поля. – 1996. – **39**, № 2. – С. 35–38.
2. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
3. *Боднар Д. І., Гоєнко Н. П.* Наближення гіпергеометричних функцій Лаурічелли багатовимірними узагальненнями неперервних дробів типу Nörlund'а // Теорія наближень та гармонійний аналіз: Праці Укр. мат. конгресу-2001. – К.: Ін-т математики НАН України. – 2002. – С. 34–44.
4. *Гоєнко Н. П.* Алгоритми розвинення гіпергеометричних функцій Лаурічелли у гіллясті ланцюгові дроби // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». – 2000. – № 411. – С. 67–73.
5. *Кучмінська Х. Й.* Аналог теореми Перона-Уолла для гіллястих ланцюгових дробів // Волин. матем. вісн. – 1996. – Вип. 3. – С. 72–75.
6. *Сусь О. М.* Збіжність двовимірних ланцюгових дробів з комплексними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39**, № 2. – С. 75–83.
7. *Сявавко М. С.* Інтегральні ланцюгові дроби. – К.: Наук. думка, 1994. – 205 с.
8. *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. – Massachusetts: Addison-Wesley Publ. Co., 1980. – 428 p.
9. *Lauricella G.* Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1893. – **7**. – P. 111–158.
10. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions with applications. – Amsterdam: North-Holland, 1992. – 606 p.
11. *Siemaszko W.* On some conditions for convergence of branched continued fraction // Lect. Notes Math. – 1982. – **888.** – P. 367–370.
12. *Waadeland H.* Worpitzky boundary theorem for N-branched continued fractions // Commun. Analytic Theory of Continued Fractions. – 1993. – **2**. – P. 24–29.

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО АНАЛОГА ТЕОРЕМЫ ВОРПИЦКОГО К ИССЛЕДОВАНИЮ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛАУРИЧЕЛЛЫ В ВЕТВЯЩИЕСЯ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Рассмотрены разложения отношений гипергеометрических функций Лауричеллы F_D в ветвящиеся цепные дроби типа Ньорлунда и Гаусса. Используя многомерный аналог теоремы Ворпицкого, исследованы области сходимости этих разложений в случае произвольных комплексных параметров функции F_D.

APPLICATION OF MULTIDIMENSIONAL ANALOGUE OF WORPITZKY THEOREM TO INVESTIGATION OF CONVERGENCE OF HYPERGEOMETRIC LAURICELLA FUNCTIONS EXPANSION IN BRANCHED CONTINUED FRACTIONS

Expansions of ratios of Lauricella hypergeometric functions F_D into branched continued fractions of Nörlund and Gauss type are considered. With use of multidimensional analogue of Worpitzky theorem, the expansions convergence regions are established for complex range parameters of function F_D.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
01.11.02