УДК 517.526

М. О. Недашковський

ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ МАТРИЧНИХ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ

Для гіллястих ланцюгових з матричними елементами доведено достатні ознаки збіжності, які є узагальненням критеріїв збіжності Слєшинського, Маркова та Прінґсгейма для неперервних дробів.

Останнім часом для багатьох прикладних задач одержано перспективні щодо кількості арифметичних операцій або за іншими критеріями формальні алгоритми, які подають розв'язок у вигляді гіллястого ланцюгового дробу з матричними елементами [4]. Реальне їх застосування, проте, неможливе без ретельного аналізу збіжності, обчислювальної стійкості та інших характеристик.

У монографіях [1, 5, 7] встановлено ряд ознак збіжності гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) із числовими та функціональними елементами. При встановленні ознак збіжності типу Прінґсгейма для ГЛД [2, 3] автором було розроблено певні схеми доведення збіжності ГЛД із комплексними компонентами. Інтуїтивно відчувалося, що й у випадку матричних ГЛД можуть мати місце подібні прості та ефективні ознаки збіжності. Проте скрупульозні дослідження показали, що і за формою запису, і за змістом є суттєві відмінності для ознак збіжності числових і матричних гіллястих ланцюгових дробів (МГЛД).

Нехай X − банахова алгебра квадратних матриць порядку p над полем $\mathbb{C}$. Введемо до розгляду позначення

$$D_1 = \sum_{k_1=1}^{n} b_{k_1}^{-1} a_{k_1} = \sum_{k_{(1)}=1}^{n} \frac{a_{k(1)}\,|}{|\, b_{k(1)}},$$

$$D_2 = \sum_{k_1=1}^{n} \left(b_{k_1} + \sum_{k_2=1}^{n} b_{k_1 k_2}^{-1} a_{k_1 k_2} \right)^{-1} a_{k_1} = \sum_{k_1=1}^{n} \frac{a_{k(1)}\,|}{|\, b_{k(1)}} + \sum_{k_2=1}^{n} \frac{a_{k(2)}\,|}{|\, b_{k(2)}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$D_m = \sum_{k_1=1}^{n} \frac{a_{k(1)}\,|}{|\, b_{k(1)}} + \sum_{k_2=1}^{n} \frac{a_{k(2)}\,|}{|\, b_{k(2)}} + \ldots + \sum_{k_m=1}^{n} \frac{a_{k(m)}\,|}{|\, b_{k(m)}},$$

де $k(i) = k_1 k_2 \ldots k_i$ − скорочені позначення для мультиіндексів; $a_{k(s)}$, $b_{k(s)} \in X$ − квадратні невироджені $(p \times p)$-матриці.

Означення 1. Скінченний дріб D_m, $m = 1, 2, \ldots$, називають m-м *підхідним дробом* нескінченного МГЛД

$$D = \sum_{k_1=1}^{n} \frac{a_{k(1)}\,|}{|\, b_{k(1)}} + \sum_{k_2=1}^{n} \frac{a_{k(2)}\,|}{|\, b_{k(2)}} + \ldots + \sum_{k_m=1}^{n} \frac{a_{k(m)}\,|}{|\, b_{k(m)}} + \ldots \,. \tag{1}$$

Позначимо

$$D_{k(m),m} = b_{k(m)},$$

$$D_{k(i),m} = b_{k(i)} + \sum_{k_{i+1}=1}^{n} \frac{a_{k(i+1)}\,|}{|\, b_{k(i+1)}} + \ldots + \sum_{k_m=1}^{n} \frac{a_{k(m)}\,|}{|\, b_{k(m)}}, \qquad i < m\,. \tag{2}$$

Перед тим, як розглянути ознаки збіжності для МГЛД, доведемо одне необхідне надалі твердження.

Лема 1. *Якщо для МГЛД виконується співвідношення*

$$\det(D_{k(s),m}) \neq 0, \qquad k_s = 1,2,\dots,n, \quad s = 1,2,\dots, \quad m = s, s+1,\dots, \tag{3}$$

то для всіх $k_s = 1,2,\dots,n$, $s = 1,2,\dots,m-1$, $m = s,s+1,\dots$, $\ell = 1,2,\dots$, *має місце рівність*

$$D_{k_1k_2\dots k_s,m+\ell} - D_{k_1k_2\dots k_s,m} =$$

$$=(-1)^{m-s} \sum_{k_s,k_{s+1},\dots,k_{m+1}=1}^{n} \prod_{j=s+1}^{m} D^{-1}_{k_1k_2\dots k_j,m} \prod_{j=s}^{m} D^{-1}_{k_1k_2\dots k_{m+s+1-j},m+\ell}\, a_{k_1k_2\dots k_{m+s+1-j}}\,. \tag{4}$$

Д о в е д е н н я. Покажемо вірність леми, використовуючи метод математичної індукції за s, $s = m-1, m-2,\dots,1$. Для $s = m-1$, очевидно, можемо записати

$$D_{k_1k_2\dots k_{m-1},m+\ell} - D_{k_1k_2\dots k_{m-1},m} =$$

$$= \sum_{k_m=1}^{n} D^{-1}_{k_1k_2\dots k_m,m+\ell} a_{k_1k_2\dots k_m} - \sum_{k_m=1}^{n} b^{-1}_{k_1k_2\dots k_m} a_{k_1k_2\dots k_m} =$$

$$= \sum_{k_m=1}^{n} \big[\, b^{-1}_{k_1k_2\dots k_m} b_{k_1k_2\dots k_m} D^{-1}_{k_1k_2\dots k_m,m+\ell} -$$

$$- b^{-1}_{k_1k_2\dots k_m} D_{k_1k_2\dots k_m,m+\ell}\, D^{-1}_{k_1k_2\dots k_m,m+\ell} \big]\, a_{k_1k_2\dots k_m} =$$

$$= -\sum_{k_m=1}^{n} \sum_{k_{m+1}=1}^{n} D^{-1}_{k_1k_2\dots k_m,m} D^{-1}_{k_1k_2\dots k_{m+1},m+\ell}\, a_{k_1k_2\dots k_{m+1}} D^{-1}_{k_1k_2\dots k_m,m+\ell} a_{k_1k_2\dots k_m}\,.$$

Нехай тепер твердження леми виконується для деякого $s = i$. Тоді для $s = i-1$ з огляду на умови (3) леми одержимо

$$D_{k(i-1),m+\ell} - D_{k(i-1),m} =$$

$$= b_{k(i-1)} + \sum_{k_i=1}^{n} D^{-1}_{k(i),m+\ell} a_{k(i)} - b_{k(i-1)} - \sum_{k_i=1}^{n} D^{-1}_{k(i),m} a_{k(i)} =$$

$$= \sum_{k_i=1}^{n} \big[D^{-1}_{k(i),m} D_{k(i),m} D^{-1}_{k(i),m+\ell} - D^{-1}_{k(i),m} D_{k(i),m+\ell} D^{-1}_{k(i),m+\ell}\big] a_{k(i)} =$$

$$= -\sum_{k_i=1}^{n} D^{-1}_{k(i),m} \big[D_{k(i),m+\ell} - D_{k(i),m}\big] D^{-1}_{k(i),m+\ell}\, a_{k(i)} =$$

$$= (-1)^{m-i+1} \sum_{k_i,k_{i+1},\dots,k_{m+1}=1}^{n} \prod_{j=i}^{m} D^{-1}_{k(j),m} \prod_{j=i-1}^{m} D^{-1}_{k(m+i-j),m+\ell}\, a_{k(m+i-j)}\,.$$

Лему доведено. ◊

Наслідок 1. *Якщо для МГЛД* (1) *виконуються співвідношення* (3), *то для* $m = 1,2,\dots$, $\ell = 1,2,\dots$ *різницю між його підхідними дробами можна обчислити за формулою*

$$D_{m+\ell} - D_m = (-1)^m \sum_{k_1,k_2,\dots,k_{m+1}=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} D^{-1}_{k(j),m} \prod_{j=1}^{m+1} D^{-1}_{k(m+2-j),m+\ell}\, a_{k(m+2-j)}\,. \tag{5}$$

Наслідок 2. *Якщо для МГЛД* (1) *виконується співвідношення* (4), *то залишковий член* R_m, $m = 1, 2, \dots$, *можна обчислити за формулою*

$$R_m = D_\infty - D_m = (-1)^m \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{m+1}=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} D_{k(j),m}^{-1} \prod_{j=1}^{m+1} D_{k(m+2-j),\infty}^{-1} a_{k(m+2-j)} , \quad (6)$$

де $D_{k(j),\infty}$ – *залишки нескінченного МГЛД* (1).

Слід зазначити, що формули (5) і (6) за формою відрізняються від своїх числових аналогів, одержаних у [2, 3], хоча останні можна з них одержати.

Означення 2. МГЛД називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається наступний ряд, складений з підхідних дробів:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \| D_{\nu+1} - D_\nu \| . \quad (7)$$

Означення 3. Будемо говорити, що один МГЛД G *мажорує* інший МГЛД D, якщо існує таке невід'ємне ціле число n_0 і деяка додатна стала M, що для всіх цілих n і m таких, що $n \ge n_0$ і $m \ge n_0$ виконується співвідношення

$$\| D_n - D_m \| \le M \| G_n - G_m \| ,$$

де D_i, G_i – підхідні дроби нескінченних МГЛД D і G відповідно.

Лема 2 [5]. *Якщо матриця* $F \in X$, $\| F \| \le 1$, *а* I – *одинична матриця, то матриця* $A = I - F$ *має обернену і при цьому*

$$(I - F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} F^k, \qquad \left\| (I - F)^{-1} \right\| \le \frac{1}{1 - \| F \|} .$$

Наслідок 3 [5]. *Якщо матриця* A – *невироджена, а матриця* H – *її збурення таке, що* $\left\| A^{-1} H \right\| < 1$, *то*

(***i***) *матриця* $A + H$ – *невироджена*;

(***ii***) $(A+H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-A^{-1}H)^k A^{-1} = A^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-AH^{-1})^k, \quad \left\| (A+H)^{-1} \right\| \le \dfrac{\left\| A^{-1} \right\|}{1 - \left\| A^{-1} H \right\|}$.

Теорема 1 (***Ознака мажорації***). *Якщо для МГЛД* (1) *виконується умова* (3) *та існує абсолютно збіжний числовий гіллястий дріб*

$$\tilde{b}_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{s=1}^{\infty} \sum_{k_s=1}^{n} \frac{\tilde{a}_{k(s)}}{\tilde{b}_{k(s)}} \quad (8)$$

зі знакосталими частинними чисельниками такий, що

$$\tilde{D}_{k(s),m}^{-1} \ge \left\| D_{k(s),m}^{-1} \right\| > 0, \qquad \left\| a_{k(s)} \right\| \le \left| \tilde{a}_{k(s)} \right| , \quad (9)$$

де $1 \le k_s \le n$, $s = 1, 2, \dots$, $m = s+1, s+2, \dots$, *то МГЛД* (1) *також є абсолютно збіжним.*

Д о в е д е н н я. Скориставшись формулою різниці між двома підхідними дробами порядку m і $m+1$, запишемо

$$\| D_{m+1} - D_m \| \le$$

$$\le \left\| (-1)^m \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_{m+1}=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} D_{k(j),m}^{-1} \prod_{j=1}^{m+1} D_{k(m+2-j),m+\ell}^{-1}\, a_{k(m+2-j)} \right\| \le$$

$$\le \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_{m+1}=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \| D_{k(j),m}^{-1} \| \prod_{j=1}^{m+1} \| D_{k(m+2-j),m+\ell}^{-1} \| \| a_{k(m+2-j)} \| .$$

Звідси з урахуванням умов теореми одержимо

$$\| D_{m+1} - D_m \| \le \left| \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_{m+1}=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \tilde{D}_{k(j),m}^{-1} \prod_{j=1}^{m+1} \tilde{D}_{k(m+2-j),m+\ell}^{-1}\, \tilde{a}_{k(m+2-j)} \right| =$$

$$= \left| \tilde{D}_{m+1} - \tilde{D}_m \right| .$$

За умовою ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \tilde{D}_{\nu+1} - \tilde{D}_\nu \right|$ є збіжним. Отже, ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} \| D_{\nu+1} - D_\nu \|$ також збігається, тобто МГЛД збігається абсолютно, що й треба було довести. ◊

Означення 4. Нехай M − деяка підмножина банахового простору $X \times X$. Будемо називати M *областю збіжності* гіллястого ланцюгового дробу (1) з матричними елементами, якщо для всіх $a_{k(s)} \in M$ та $b_{k(s)} \in M$ цей ГЛД збігається.

Означення 5. Замкнена підмножина лінійного простору X, котрій належать значення гіллястих ланцюгових дробів, а також значення усіх підхідних дробів МГЛД (1) за умови, що всі $(a_{k(s)},\ b_{k(s)}) \in M$, називається *областю значень* дробу (1).

Тепер розглянемо ознаку збіжності, яка для звичайних ланцюгових дробів розглядалась Слєшинським, Марковим і Прінґсгеймом [1, 4, 8].

Теорема 2. *МГЛД* (1) *з елементами, що задовольняють умови*

$$\| b_{k(s)}^{-1} \| \le \frac{1}{\| a_{k(s)} \| + n}, \qquad 1 \le k_s \le n, \qquad s = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

абсолютно збігається, а множиною його значень є область

$$\{ z \in X : \| z \| \le n \} . \tag{11}$$

Д о в е д е н н я. Введемо до розгляду ГЛД з дійсними елементами

$$\tilde{D} = \mathop{\mathrm{D}}_{s=1}^{\infty} \sum_{k_s=1}^{n} \frac{\tilde{a}_{k(s)}}{\tilde{b}_{k(s)}} , \tag{12}$$

де

$$\tilde{a}_{k(s)} = - \| a_{k(s)} \|, \quad \tilde{b}_{k(s)} = \| a_{k(s)} \| + n, \quad s = 1, 2, \ldots, p, \quad k_s = 1, 2, \ldots, n . \tag{13}$$

Методом математичної індукції доведемо такі нерівності:

$$\| D_{k(s),m}^{-1} \| \le \tilde{D}_{k(s),m}^{-1} < \| a_{k(s)} \|^{-1} . \tag{14}$$

Дійсно, для $s = m$ маємо

$$\| D_{k(m),m}^{-1} \| \le \frac{1}{\| a_{k(m)} \| + n} = \tilde{b}_{k(m)}^{-1} = \tilde{D}_{k(m),m}^{-1} < \frac{1}{\| a_{k(m)} \|} .$$

Припустимо тепер, що співвідношення (14) справджується для деякого $s = i+1$. Тоді на основі нерівності (10), наслідку 3 і припущення індукції одержимо

$$\| D_{k(i),m}^{-1} \| = \left\| \left(b_{k(i)} + \sum_{k_{i+1}=1}^{n} D_{k(i+1),m}^{-1} a_{k(i+1)} \right)^{-1} \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \left(-b_{k(i)}^{-1} \sum_{k_{i+1}=1}^{n} D_{k(i+1),m}^{-1} a_{k(i+1)} \right)^{j} b_{k(i)}^{-1} \right\| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} \left(\| b_{k(i)}^{-1} \| \sum_{k_{i+1}=1}^{n} \| D_{k(i+1),m}^{-1} \| \| a_{k(i+1)} \| \right)^{j} \| b_{k(i)}^{-1} \| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\tilde{b}_{k(i)}^{-1} \sum_{k_{i+1}=1}^{n} \tilde{D}_{k(i+1),m}^{-1} \tilde{a}_{k(i+1)} \right)^{j} \tilde{b}_{k(i)}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\tilde{b}_{k(i)} + \sum_{k_{i+1}=1}^{n} \tilde{D}_{k(i+1),m}^{-1} \tilde{a}_{k(i+1)}} = \tilde{D}_{k(i),m}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\| a_{k(i)} \| + n - \sum_{k_{i+1}=1}^{n} \tilde{D}_{k(i+1),m}^{-1} \| a_{k(i+1)} \|} < \frac{1}{\| a_{k(i)} \|}.$$

Таким чином, співвідношення (14) доведено.

На основі леми 1 запишемо наступні співвідношення:

$$\| D_{m+\ell} - D_m \| =$$

$$= \left\| (-1)^m \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_{m+1}=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} D_{k(j),m}^{-1} \prod_{j=1}^{m+1} D_{k(m+2-j),m+\ell}^{-1} a_{k(m+2-j)} \right\| \le$$

$$\le \left| (-1)^m \sum_{k_1.k_2,\ldots,k_{m+1}=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \tilde{D}_{k(j),m}^{-1} \prod_{j=1}^{m+1} \tilde{D}_{k(m+2-j),m+\ell}^{-1} \tilde{a}_{k(m+2-j)} \right|.$$

Отже,

$$\| D_{m+\ell} - D_m \| \le \left| \tilde{D}_{m+\ell} - \tilde{D}_m \right|. \tag{15}$$

Із умови теореми випливає, що

$$\sum_{k_1=1}^{n} \| b_{k_1}^{-1} \| \| a_{k_1} \| \le n, \qquad \sum_{k_1=1}^{n} \tilde{D}_{k_1,m}^{-1} \| a_{k_1} \| \le n.$$

Отже, неважно зробити висновок, що

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} | D_{\nu+1} - D_{\nu} | \le \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} (\tilde{D}_{\nu+1} - \tilde{D}_{\nu}) \right| = \left| \lim_{m\to\infty} \tilde{D}_m - \tilde{D}_1 \right| \le 2n. \tag{16}$$

Нерівності (15) і (16) закінчують доведення обидвох частин теореми. ◊

Із встановленої теореми, зокрема, випливає ознака збіжності ГЛД з комплексними елементами, доведена в [2].

Теорема 3. *МГЛД* (1) *з елементами, що задовольняють умову*

$$\| b_{k(s)}^{-1} \| \le \frac{1}{1 + \sum_{k_{s+1}=1}^{n} \| a_{k(s+1)} \|}, \qquad 1 \le k_s \le n, \qquad s = 1, 2, 3, \ldots, \tag{17}$$

абсолютно збігається, а його множиною значень є область

$$\left\{ z \in X : \quad \| z - b_0 \| \le \sum_{k_1=1}^{n} \| a_{k_1} \| \right\}. \tag{18}$$

Д о в е д е н н я. Як у попередній теоремі, введемо до розгляду мажоруючий гіллястий дріб (12) з елементами

$$\tilde{a}_{k(s)} = -\| a_{k(s)} \|, \qquad \tilde{b}_{k(s)} = 1 + \sum_{k_{s+1}=1}^{n} \| a_{k(s+1)} \|. \tag{19}$$

Методом математичної індукції за s доведемо, що справджуються нерівності

$$\| D_{k(s),m}^{-1} \| \le \tilde{D}_{k(s),m}^{-1} < 1. \tag{20}$$

Дійсно, для $s = m$ згідно з умовами теореми одержимо

$$\| D_{k(m),m}^{-1} \| = \| b_{k(m)}^{-1} \| \le \frac{1}{1 + \sum_{k_{m+1}=1}^{n} \| a_{k(m+1)} \|} = \tilde{b}_{k(m)}^{-1} = \tilde{D}_{k(m),m}^{-1} < 1.$$

Припустивши, що нерівність (20) справджується і для довільного $s = i + 1$, доведемо, враховуючи нерівність

$$\left\| b_{k(i)}^{-1} \sum_{k_{i+1}=1}^{n} D_{k(i+1),m}^{-1} a_{k(i+1)} \right\| < 1,$$

її виконання для $s = i$:

$$\| D_{k(i),m}^{-1} \| = \left\| \left(b_{k(i)} + \sum_{k_{i+1}=1}^{n} D_{k(i+1),m}^{-1} a_{k(i+1)} \right)^{-1} \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \left(-b_{k(i)}^{-1} \sum_{k_{i+1}=1}^{n} D_{k(i+1),m}^{-1} a_{k(i+1)} \right)^{j} b_{k(i)}^{-1} \right\| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} \left(\| b_{k(i)}^{-1} \| \sum_{k_{i+1}=1}^{n} \| D_{k(i+1),m}^{-1} \| \| a_{k(i+1)} \| \right)^{j} \| b_{k(i)}^{-1} \| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\tilde{b}_{k(i)}^{-1} \sum_{k_{i+1}=1}^{n} \tilde{D}_{k(i+1),m}^{-1} \tilde{a}_{k(i+1)} \right)^{j} \tilde{b}_{k(i)}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\tilde{b}_{k(i)} + \sum_{k_{i+1}=1}^{n} \tilde{D}_{k(i+1),m}^{-1} \tilde{a}_{k(i+1)}} = \tilde{D}_{k(i),m}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{1 + \sum_{k_{i+1}=1}^{n} \| a_{k(i+1)} \| - \sum_{k_{i+1}=1}^{n} \tilde{D}_{k(i+1),m}^{-1} \| a_{k(i+1)} \|} < 1.$$

Таким чином, виконуються умови мажорації. За схемою, розглянутою у попередній теоремі, легко встановити, що за умов цієї теореми виконується рівність (15). Отже,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \| D_{\nu+1} - D_{\nu} \| \le \| b_0 \| - \lim_{m\to\infty} \| D_{m+1} \| \le \lim_{m\to\infty} \sum_{k_1=1}^{n} \frac{\| a_{k_1} \|}{\tilde{D}_{k_1,m}} \le \sum_{k_1=1}^{n} \| a_{k_1} \|,$$

і гіллястий ланцюговий дріб абсолютно збігається. Оскільки відповідно до нерівності (20)

$$\| D_m - b_0 \| \le \sum_{k_1=1}^{n} \frac{| \tilde{a}_{k_1} |}{\tilde{D}_{k_1,m}} < \sum_{k_1=1}^{n} \| a_{k_1} \|,$$

то множиною значень дробу (1) є область

$$\left\{ z \in X : \ \| z - b_0 \| \le \sum_{k_1=1}^{\infty} \| a_{k_1} \| \right\},$$

що й треба було довести. ◊

Обидві запропоновані достатні ознаки є простими та зручними у застосуванні. Вони можуть знайти практичне використання, зокрема, в системах комп’ютерної алгебри, а також послужити основою для одержання інших достатніх ознак для МГЛД.

1. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
2. *Недашковский Н. А.* Достаточные признаки сходимости ветвящихся цепных дробей // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1984. – Вып. 19. – С. 29–33.
3. *Недашковский Н. А.* О сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей некоторых типов // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1984. – Вып. 20. – С. 27–31.
4. *Недашковський М. О.* Розв’язування матричних рівнянь гіллястими ланцюговими дробами // Комп’ютерна математика. Оптимізація обчислень: Зб. наук. праць. – К.: Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, 2001. – Т. 1. – С. 318–319.
5. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
6. *Тыртышников Е. Е.* Краткий курс численного анализа. – М.: ВИНИТИ, 1994. – 220 с.
7. *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. – Massachusetts: Addison-Wesley Publ. Co., 1980. – 428 p.
8. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions with applications. – Amsterdam: Elsevier, 1992. – 606 p.

ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ МАТРИЧНЫХ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Для ветвящихся цепных дробей с матричными элементами доказаны достаточные признаки сходимости, являющиеся обобщением критериев сходимости Слешинского, Маркова и Прингсгейма для непрерывных дробей.

CONVERGENCE CRITERIA OF MATRIX BRANCHED CONTINUED FRACTIONS

The criteria of convergence are established for branched continued fractions with matrix elements. This criteria were obtained from the generalizations of Sleszyński, Markov and Pringsheim convergence criteria for continued fractions.

Терноп. акад. нар. госп-ва, Тернопіль

Одержано
01.11.02