УДК 517.53.57

М. М. Чип

МЕТОД МОМЕНТІВ ЗОБРАЖЕННЯ ФУНКЦІЇ РЯДОМ ТА ІНТЕГРАЛОМ

Запроваджено узагальнені моментні зображення подвійних числових послідовностей. На основі цих зображень отримано інтегральні зображення сум рядів і розвинення в ряди значень інтегралів, а також інтегральні зображення розділених різниць аналітичних у крузі функцій.

Дослідження властивостей функцій зручно проводити, вважаючи розглядувані функції сумами рядів заданих систем функцій чи значеннями інтегралів з відомими ядрами. При цьому ряд може бути збіжним у точках розбіжності інтеграла чи інтеграл може бути збіжним у точках розбіжності ряду. В обидвох випадках функцію можна зображати в об'єднанні множин збіжності ряду та інтеграла: в множині розбіжності ряду – збіжним у ній інтегралом, у множині розбіжності інтеграла – збіжним у ній рядом. У перетині множин збіжності функцію можна зображати рядом чи інтегралом.
Задача продовження функції, заданої рядом, чи задача продовження функції, заданої інтегралом, є частиною задачі ефективного зображення функції аналітичним апаратом: рядом, інтегралом, добутком, ланцюговим дробом. Мірою ефективності зображення вважають розміри множини збіжності апарату та швидкість його збіжності до зображуваної функції.

Питання зображення функцій способом моментів вивчалося, зокрема, в роботах [1, 2, 4]. У статті [3] запропоновано розглядати узагальнені моменти деякої міри на деякій вимірній множині. У [5] викладено спосіб одержання інтегральних зображень твірних функцій послідовностей узагальнених моментів.

Метою цієї статті є дослідження процесу інтегрального зображення суми ряду та процесу зображення рядом значення інтеграла на основі способу моментів. Актуальність запропонованого в статті методу систематизації зумовлена потребою розширення класу зображуваних функцій на основі природного розширення класу послідовностей моментів. Один із способів розширення обидвох класів виникає внаслідок застосування сформульованого в статті узагальнення моментного зображення на випадок подвійних числових послідовностей.

Новизна результатів статті полягає в побудові твірних функцій послідовностей узагальнених моментів за кожним індексом та їхніх інтегральних зображень, а також у побудові залежного від параметра інтеграла та зображення рядом його значення. Принципово важливим є інтегральне зображення розділеної різниці похідної аналітичної в крузі функції, на основі якого можна кількісно оцінювати відхилення значень функції та всіх її похідних при відомому відхиленні значень аргумента.

1. Суми рядів і значення інтегралів на основі послідовності моментів. Опишемо спосіб побудови рядів та інтегральних зображень їхніх сум і спосіб побудови інтегралів і зображень рядами їхніх значень на основі узагальнених моментних зображень подвійних числових послідовностей.

Означення. Узагальненим моментним зображенням заданої подвійної числової послідовності $\{s_{k,\ell}\}_0^\infty \subset \mathbb{C}$ назвемо зображення її членів у вигляді

$$s_{k,l} = \int_\Gamma a_k(\zeta)\, b_\ell(\zeta)\, d\mu(\zeta) \tag{1}$$

на шуканій множині $\Gamma \subset \mathbb{C}$ з мірою $d\mu(\zeta)$ на ній та шуканими послідовностями $\{a_k(\zeta)\}_0^\infty$ і $\{b_\ell(\zeta)\}_0^\infty$ з простору $L_2(\Gamma; d\mu(\zeta))$.

У випадку $s_{k,\ell} = s_{k+\ell}$ зображення (1) співпадає з узагальненим моментним зображенням числової послідовності $\{s_n\}_0^\infty \subset \mathbb{C}$, запровадженим у [3].

Нехай у полі комплексних чисел і в просторі функцій комплексних змінних задано послідовності

$$\{p_k\}_0^\infty, \qquad \{q_\ell\}_0^\infty, \qquad \{\varphi_k(z)\}_0^\infty, \qquad \{\psi_\ell(w)\}_0^\infty. \tag{2}$$

На основі послідовності (1) при всіх можливих наборах послідовностей (2) розглянемо процеси: побудову ряду та зображення його суми інтегралом і побудову інтеграла та зображення його значення рядом. Утворимо ряд за кожним індексом і покладемо

$$f_\ell(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s_{k,\ell} \varphi_k(z), \qquad z \in \mathcal{D}_\ell(p; s; \varphi), \tag{3}$$

$$g_k(w) = \sum_{\ell=0}^{\infty} q_\ell s_{k,\ell} \psi_\ell(w), \qquad w \in \mathcal{D}_k(q; s; \psi). \tag{4}$$

Зобразимо члени послідовності $\{s_{k,\ell}\}_0^\infty$ у вигляді (1) і при кожному $\zeta \in \Gamma$ покладемо

$$A(z;\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k a_k(\zeta)\, \varphi_k(z), \qquad z \in \mathcal{D}(p; a; \varphi), \tag{5}$$

$$B(w;\zeta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} q_\ell b_\ell(\zeta)\, \psi_\ell(w), \qquad w \in \mathcal{D}(q; b; \psi). \tag{6}$$

Підставимо (1) у (3) і (4). За умов підсумовування ряду інтегралів і з урахуванням (5) і (6) одержимо інтегральні зображення

$$f_\ell(z) = \int_\Gamma A(z;\zeta)\, b_\ell(\zeta)\, d\mu(\zeta), \qquad z \in \Delta_\ell(A; b), \tag{7}$$

$$g_k(w) = \int_\Gamma B(w;\zeta)\, a_k(\zeta)\, d\mu(\zeta), \qquad w \in \Delta_k(B; a). \tag{8}$$

У випадках непорожніх перетинів множин $\mathcal{D}$ і Δ з однаковими номерами інтегральні зображення (7) і (8) здійснюють продовження зображених рядами в (3) і (4) функцій з множин $\mathcal{D}$ на ті частини множин Δ, які не містять точок множин $\mathcal{D}$.

Утворимо інтеграли в зображеннях (7) і (8). Зображаючи підінтегральні ядра рядами за формулами (5) чи (6) за вибраними послідовностями функцій з (2), за умов почленного інтегрування одержаних рядів, враховуючи (1), одержимо формули (3) і (4) відповідно зображення значень інтегралів рядами. У випадках непорожніх перетинів множин Δ і $\mathcal{D}$ з однаковими номерами зображення (3) і (4) рядами здійснюють продовження зображених інтегралами в (7) і (8) функцій з множин Δ на ті частини множин $\mathcal{D}$, які не містять точок множин Δ.

Покладемо далі

$$F(z;w) = \sum_{\ell=0}^{\infty} q_\ell\, f_\ell(z)\, \psi_\ell(w), \qquad (z;w) \in \mathcal{D}(q; f; \psi), \tag{9}$$

$$G(w;z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, g_k(w)\, \varphi_k(z), \qquad (w;z) \in \mathcal{D}(p; g; \varphi). \tag{10}$$

Підставимо (7) у (9) та (8) у (10). За умов підсумовування ряду інтегралів і з урахуванням відповідно (6) і (5) одержимо інтегральні зображення

$$F(z;w) = \int_\Gamma A(z;\zeta)\, B(w;\zeta)\, d\mu(\zeta) = G(w;z), \qquad (z;w) \in \Delta(A; B). \tag{11}$$

У випадках непорожніх перетинів множин $\mathcal{D}$ і Δ інтегральні зображення (11) здійснюють продовження зображених рядами в (9) і (10) функцій з множин $\mathcal{D}$ на ті частини множини Δ, які не містять точок множин $\mathcal{D}$.

Нехай задано значення інтеграла в (11). Зображаючи рядом одне з підінтегральних ядер за формулою (6) чи (5) за відповідною послідовністю функцій з (2), за умов його почленного інтегрування одержимо формули (9) чи (10) зображення рядом значення інтеграла. У випадках непорожніх перетинів множин Δ і $\mathcal{D}$ зображення (9) чи (10) рядами здійснюють продовження значення інтеграла в (11) з множини Δ на ті частини множин $\mathcal{D}$, які не містять точок множини Δ.

Утворимо з послідовностей (1) і (2) збіжний подвійний ряд. За умов вираження подвійного ряду через повторні, враховуючи (9) і (10), одержимо

$$F(z;w) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} p_k \, q_\ell \, s_{k,\ell} \, \varphi_k(z) \, \psi_\ell(w) = G(w;z),$$

$$(z;w) \in \mathcal{D}(p;q;s;\varphi;\psi). \tag{12}$$

Формули (11) і (12) виражають рівність між сумою подвійного ряду та значенням інтеграла. Якщо множина збіжності подвійного ряду та множина збіжності інтеграла перетинаються, то інтегральне зображення здійснює продовження суми подвійного ряду, а зображення подвійним рядом здійснює продовження значення інтеграла.

Суму подвійного ряду можна виразити значенням інтеграла безпосередньо. Справді, зображаючи в (12) члени послідовності $\{s_{k,\ell}\}_0^\infty$ у вигляді (1), за умов підсумовування рядів інтегралів і з урахуванням (5) і (6) одержимо значення інтеграла в зображеннях (11). При цьому одержуємо також інтегральне зображення суми подвійного ряду.

Значення інтеграла можна виразити сумою подвійного ряду безпосередньо. Справді, зображаючи в (11) підінтегральні ядра рядами за формулами (5) і (6), за умов почленного інтегрування одержаного подвійного ряду, враховуючи (1), одержимо суму подвійного ряду в зображеннях (12). При цьому одержуємо також зображення подвійним рядом значення інтеграла.

У процесі перетворення ряду в інтеграл нема необхідності знаходити аналітичний вигляд суми ряду, у процесі перетворення інтеграла в ряд нема необхідності знаходити аналітичний вигляд значення інтеграла.

2. Інтегральні зображення розділених різниць аналітичних у крузі функцій. Нехай задано послідовність $\{\varphi_m(\zeta)\}_0^\infty$ неперервних функцій на кусково-гладкій лінії Γ. Функції послідовності $\{f_m(z)\}_0^\infty$, визначені інтегралом типу Коші, мають похідні будь-якого порядку $n = 0,1,2,\ldots$ у кожній однозв'язній області, яка не містить точок лінії Γ, причому

$$f_m^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi_m(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta. \tag{13}$$

Звідси, застосовуючи в процесі перетворень формулу для різниці степенів, одержуємо інтегральне зображення

$$\frac{f_m^{(n)}(z) - f_m^{(n)}(w)}{z - w} = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{(\zeta - z)^{n-\nu+1} (\zeta - w)^{\nu+1}} \varphi_m(\zeta) \, d\zeta, \quad z \neq w. \tag{14}$$

Формули вигляду (13) і (14) можна встановити для функцій, аналітичних у крузі, за умов зображення коефіцієнтів їхніх степеневих рядів у вигляді (1). При цьому появляються ширші можливості побудови ядер інтегральних перетворень.

Теорема 1. *Нехай задано послідовність* $\{f_m(z)\}_0^\infty$ *аналітичних у кругах* $K_{r_m}(z) = \{\, z : |\, z\,| < r_m \}$ *функцій*

$$f_m(z) = f_m(0) + \sum_{\nu=0}^{\infty} s_{\nu,m}\, z^{\nu+1}\,, \tag{15}$$

послідовність коефіцієнтів степеневих рядів яких при кожному $m = 0, 1, 2, \ldots$ *має принаймні одне узагальнене моментне зображення вигляду*

$$s_{k+\ell,m} = \int_\Gamma a_{k,m}(\zeta)\, b_{\ell,m}(\zeta)\, d\mu_m(\zeta) \tag{16}$$

на шуканій множині $\Gamma \subset \mathbb{C}$ *з мірою* $d\mu_m(\zeta)$ *на ній і шуканими послідовностями* $\{\, a_{k,m}(\zeta)\}_0^\infty$ і $\{\, b_{\ell,m}(\zeta)\}_0^\infty$ *з простору* $L_2(\Gamma\,; d\mu_m(\zeta))$. *Нехай*

$$A_m(z;\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,m}(\zeta)\, z^k\,, \tag{17}$$

$$B_m(w;\zeta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell,m}(\zeta)\, w^\ell\,, \tag{18}$$

причому обидва ряди є збіжними при кожному $\zeta \in \Gamma$ *відповідно у кругах* $K_{p_m}(z) = \{\, z : |\, z\,| < p_m \}$, $K_{q_m}(w) = \{\, w : |\, w\,| < q_m \}$, *і*

(***i***) *добуток цих рядів можна почленно інтегрувати на множині* Γ *з мірою* $d\mu_m(\zeta)$;

(***ii***) *можна диференціювати за кожною змінною* z *і* w *під знаком інтеграла*

$$\int_\Gamma A_m(z,\zeta)\, B_m(w,\zeta)\, d\mu_m(\zeta)\,. \tag{19}$$

Нехай

$$K_{\rho_m}(z) = \{\, z : |\, z\,| < \rho_m = \min(r_m, p_m)\}\,,$$

$$K_{\sigma_m}(w) = \{\, w : |\, w\,| < \sigma_m = \min(r_m, q_m)\}\,.$$

Тоді при кожному $n = 0, 1, 2, \ldots$ *для* $z \neq w$ *у прямому добутку кругів* $K_{\rho_m}(z)$ *і* $K_{\sigma_m}(w)$ *маємо*

$$\frac{f_m^{(n)}(z) - f_m^{(n)}(w)}{z - w} = \int_\Gamma \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{\partial^{n-\nu}}{\partial z^{n-\nu}} A_m(z,\zeta) \frac{\partial^\nu}{\partial w^\nu} B_m(w,\zeta)\, d\mu_m(\zeta)\,. \tag{20}$$

Д о в е д е н н я. Застосуємо метод математичної індукції. При $n = 0$ потрібно довести істинність формули

$$\frac{f_m(z) - f_m(w)}{z - w} = \int_\Gamma A_m(z,\zeta)\, B_m(w,\zeta)\, d\mu_m(\zeta)\,. \tag{21}$$

Справді, з (15), застосовуючи формулу для різниці степенів, одержуємо

$$\frac{f_m(z) - f_m(w)}{z - w} = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_{\nu,m}(z^\nu + z^{\nu-1}w + z^{\nu-2}w^2 + \ldots + zw^{\nu-1} + w^\nu) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} s_{k+\ell,m} z^k w^\ell\,. \tag{22}$$

Почленно інтегруючи добуток рядів (17) і (18) на множині Γ з мірою $d\mu_m(\zeta)$, враховуючи (16), одержуємо

$$\int_{\Gamma} A_m(z,\zeta)\, B_m(w,\zeta)\, d\mu_m(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} s_{k+\ell,m}\, z^k\, w^{\ell}\,. \tag{23}$$

На підставі (22) і (23) отримуємо (21).

Припустимо істинність формули (20) при натуральному n і доведемо її істинність при значенні $n+1$.

Диференціюючи (20) за z і за w, відповідно маємо

$$\frac{f_m^{(n+1)}(z)}{z-w} - \frac{f_m^{(n)}(z) - f_m^{(n)}(w)}{(z-w)^2} =$$

$$= \int_{\Gamma} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{\partial^{n-\nu+1}}{\partial z^{n-\nu+1}} A_m(z,\zeta) \frac{\partial^{\nu}}{\partial w^{\nu}} B_m(w,\zeta)\, d\mu_m(\zeta)\,,$$

$$-\frac{f_m^{(n+1)}(w)}{z-w} + \frac{f_m^{(n)}(z) - f_m^{(n)}(w)}{(z-w)^2} =$$

$$= \int_{\Gamma} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{\partial^{n-\nu}}{\partial z^{n-\nu}} A_m(z,\zeta) \frac{\partial^{\nu+1}}{\partial w^{\nu+1}} B_m(w,\zeta)\, d\mu_m(\zeta)\,,$$

звідки в результаті додавання обидвох рівностей маємо

$$\frac{f_m^{(n+1)}(z) - f_m^{(n+1)}(w)}{z-w} = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}} A_m(z,\zeta)\, B_m(w,\zeta) + \right.$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{\partial^{n-\nu+1}}{\partial z^{n-\nu+1}} A_m(z,\zeta) \frac{\partial^{\nu}}{\partial w^{\nu}} B_m(w,\zeta) + A_m(z,\zeta) \frac{\partial^{n+1}}{\partial w^{n+1}} B_m(w,\zeta) +$$

$$\left. + \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n}{\nu} \frac{\partial^{n-\nu}}{\partial z^{n-\nu}} A_m(z,\zeta) \frac{\partial^{\nu+1}}{\partial w^{\nu+1}} B_m(w,\zeta) \right] d\mu_m(\zeta)\,.$$

Поклавши в першій сумі $\nu - 1 = j$, додавши обидві суми, враховуючи співвідношення

$$\binom{n}{j+1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j+1},$$

яке можна перевірити безпосередньо, одержимо

$$\frac{f_m^{(n+1)}(z) - f_m^{(n+1)}(w)}{z-w} = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}} A_m(z,\zeta)\, B_m(w,\zeta) + \right.$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{j+1} \frac{\partial^{n-j}}{\partial z^{n-j}} A_m(z,\zeta) \frac{\partial^{j+1}}{\partial w^{j+1}} B_m(w,\zeta) +$$

$$\left. + A_m(z,\zeta) \frac{\partial^{n+1}}{\partial w^{n+1}} B_m(w,\zeta) \right] d\mu_m(\zeta)\,,$$

звідки заміною $j+1 = \nu$ та включенням під знаком суми обидвох крайніх доданків, одержуємо формулу (20) для значення $n+1$. Теорему доведено. $\Diamond$

Наслідок 1. Якщо в зображенні (20) можна переходити до границі під знаком інтеграла при $w \to z$, то

$$f_m^{(n+1)}(z) = \int_{\Gamma} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left[A_m(z,\zeta)\, B_m(w,\zeta) \right] d\mu_m(\zeta)\,. \tag{24}$$

Наслідок 2. Покладаючи в зображенні (20) послідовно $w = 0$ і $z = 0$ та враховуючи результати диференціювання (17) і (18) за z і w, відповідно одержимо

$$f_m^{(n)}(z) = f_m^{(n)}(0) + n!\,z\int_\Gamma \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{(n-\nu)!}\frac{\partial^{n-\nu}}{\partial z^{n-\nu}} A_m(z,\zeta)\, b_{\nu,m}(\zeta)\, d\mu_m(\zeta)\,, \qquad (25)$$

$$f_m^{(n)}(w) = f_m^{(n)}(0) + n!\,w\int_\Gamma \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}\frac{\partial^{\nu}}{\partial w^{\nu}} B_m(w,\zeta)\; a_{n-\nu,m}(\zeta)\, d\mu_m(\zeta)\,. \qquad (26)$$

Наслідок 3. Поклавши в зображенні (21) послідовно $w = 0$ і $z = 0$, матимемо

$$f_m(z) = f_m(0) + z\int_\Gamma A_m(z,\zeta)\, b_{0,m}(\zeta)\, d\mu_m(\zeta)\,, \qquad (27)$$

$$f_m(w) = f_m(0) + w\int_\Gamma B_m(w,\zeta)\, a_{0,m}(\zeta)\, d\mu_m(\zeta)\,, \qquad (28)$$

звідки шляхом диференціювання n разів одержуємо

$$f_m^{(n)}(z) = \int_\Gamma \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[\, zA_m(z,\zeta)\,\right] b_{0,m}(\zeta)\, d\mu_m(\zeta)\,, \qquad (29)$$

$$f_m^{(n)}(w) = \int_\Gamma \frac{\partial^n}{\partial w^n}\left[\, wB_m(w,\zeta)\,\right] a_{0,m}(\zeta)\, d\mu_m(\zeta)\,. \qquad (30)$$

Зауваження 1. Розглянемо узагальнене моментне зображення (1) у вигляді (16) і для послідовностей (2) покладемо $p_k = q_\ell = 1$, $\varphi_k(z) = z^k$, $\psi_\ell(w) = w^\ell$. Тоді з (11) і (12) одержуємо (23).

Зауваження 2. Розглянемо степеневий ряд (15) і підставимо в нього замість коефіцієнтів зображення (16) при $\ell = 0$ для ряду за змінною z і при $k = 0$ – для ряду за змінною w. Тоді за умов почленного підсумовування ряду інтегралів і з урахуванням (17) і (18) одержуємо відповідно інтегральні зображення (27) і (28).

Зауваження 3. Розглянемо інтегральні зображення (24)–(30). Покладаємо $w = z$ та прирівнюємо відповідні функції чи похідні в лівих частинах. Тоді одержуємо рівності інтегралів у правих частинах. Віднімаємо одну з формул від іншої; одержуємо інтегральні зображення різниць значень функцій чи різниць значень похідних, а також різниць значень функцій та їхніх похідних; після виділення множника $z - w$ у правих частинах деякі з одержаних зображень можуть перетворитися у зображення (20) чи (21).

Застосуємо доведену теорему до побудови інтегрального зображення (14). Інтеграл типу Коші зобразимо степеневим рядом вигляду (15) у крузі $K_r(z) = \{\, z : |\, z - z_0\,| < r,\ r > 0\,\}$, $z_0 \notin \Gamma$, радіус якого не перевищує відстані до найближчої точки лінії Γ. У зображенні (13) покладемо $n = 0$, його ядро розкладемо в степеневий ряд, який почленно зінтегруємо. Коефіцієнти отриманого ряду можна зобразити у вигляді (16), у якому

$$a_{k,m}(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - z_0)^k}\,,\quad b_{\ell,m}(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - z_0)^\ell}\,,\quad d\mu_m(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{\varphi_m(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\, d\zeta\,.$$

Твірні функції (17) і (18) відповідно набудуть вигляду

$$A_m(z,\zeta) = \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z}\,,\qquad B_m(w,\zeta) = \frac{\zeta - z_0}{\zeta - w}\,.$$

Підставивши їхні частинні похідні за z і за w у зображення (20), одержуємо зображення (14). Методом степеневих рядів продовжуємо його з круга $K_r(z)$ на однозв'язну область, яка не містить точок лінії Γ.

Інтегральне зображення розділеної різниці похідної від аналітичної у крузі функції можна встановити також у вигляді формули (21), застосовуючи спосіб її доведення для самої функції.

Теорема 2. *Нехай задано подвійну послідовність* $\{ f_m^{(n)}(z) \}_0^\infty$ *аналітичних у кругах* $K_{r_m}(z) = \{ z : |z| < r_m \}$ *функцій*

$$f_m^{(n)}(z) = f_m^{(n)}(0) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu + n + 1)!}{(\nu + 1)!} s_{\nu+n,m} z^{\nu+1} , \tag{31}$$

послідовність коефіцієнтів степеневих рядів яких має принаймні одне узагальнене моментне зображення вигляду

$$\frac{(k + \ell + n + 1)!}{(k + \ell + 1)!} \cdot s_{k+\ell+n,m} = \int_\Gamma a_{k,m,n}(\zeta)\, b_{\ell,m,n}(\zeta)\, d\mu_{m,n}(\zeta) \tag{32}$$

на шуканій множині $\Gamma \subset \mathbb{C}$ *з мірою* $d\mu_{m,n}(\zeta)$ *на ній і шуканими послідовностями* $\{ a_{k,m,n}(\zeta) \}_0^\infty$ *і* $\{ b_{\ell,m,n}(\zeta) \}_0^\infty$ *з простору* $L_2(\Gamma; d\mu_{m,n}(\zeta))$. *Нехай*

$$A_{m,n}(z;\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,m,n}(\zeta)\, z^k , \tag{33}$$

$$B_{m,n}(w;\zeta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell,m,n}(\zeta)\, w^\ell \tag{34}$$

і обидва ряди є збіжними при кожному $\zeta \in \Gamma$ *відповідно в кругах* $K_{p_m}(z) = \{ z : |z| < p_m \}$ *і* $K_{q_m}(w) = \{ w : |w| < q_m \}$, *причому їхній добуток можна почленно інтегрувати на множині* Γ *з мірою* $d\mu_{m,n}(\zeta)$. *Нехай*

$$K_{\rho_m}(z) = \{ z : |z| < \rho_m = \min(r_m, p_m) \},$$

$$K_{\sigma_m}(w) = \{ w : |w| < \sigma_m = \min(r_m, q_m) \}.$$

Тоді в прямому добутку кругів $K_{\rho_m}(z)$ *і* $K_{\sigma_m}(w)$ *для* $z \neq w$ *маємо*

$$\frac{f_m^{(n)}(z) - f_m^{(n)}(w)}{z - w} = \int_\Gamma A_{m,n}(z,\zeta)\, B_{m,n}(w,\zeta)\, d\mu_{m,n}(\zeta). \tag{35}$$

Наслідок 1. Якщо в зображенні (35) можна переходити до границі під знаком інтеграла при $w \to z$, то

$$f_m^{(n+1)}(z) = \int_\Gamma A_{m,n}(z,\zeta)\, B_{m,n}(z,\zeta)\, d\mu_{m,n}(\zeta). \tag{36}$$

Наслідок 2. Поклавши в зображенні (35) послідовно $w = 0$ і $z = 0$, одержимо

$$f_m^{(n)}(z) = f_m^{(n)}(0) + z \int_\Gamma A_{m,n}(z,\zeta)\, b_{0,m,n}(\zeta)\, d\mu_{m,n}(\zeta), \tag{37}$$

$$f_m^{(n)}(w) = f_m^{(n)}(0) + w \int_\Gamma B_{m,n}(w,\zeta)\, a_{0,m,n}(\zeta)\, d\mu_{m,n}(\zeta). \tag{38}$$

Зауваження 1. Розглянемо степеневий ряд (31) і підставимо в нього замість коефіцієнтів зображення (32) для ряду за змінною z при $\ell = 0$ і для ряду за змінною w – при $k = 0$. Тоді за умов почленного підсумовування ряду інтегралів і з урахуванням (33) і (34) відповідно одержуємо інтегральні зображення (37) і (38).

Зауваження 2. Розглянемо формули (36)–(38) і, віднімявши одну з них від іншої, одержимо інтегральні зображення різниць значень похідних; якщо в правій частині виділиться множник $z - w$, то одержимо інтегральне зображення розділеної різниці похідної.

Одержані інтегральні зображення аналітичних в крузі функцій і розділених різниць їхніх похідних у випадку перетину круга збіжності ряду з множиною збіжності інтеграла аналітично продовжують зображувані функції на ту частину множини збіжності інтеграла, яка розміщена поза кругом збіжності ряду.

1. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
2. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.
3 *Дзядик В. К.* Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 6. – С. 8–12.
4. *Евграфов М. А.* Ряды и интегральные представления // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: ВИНИТИ, 1986. – **13**. – С. 5–92.
5. *Чып М. Н.* Обобщенная проблема моментов и интегральные представления функций. – Киев, 1985. – 48 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 85-49).

МЕТОД МОМЕНТОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ РЯДОМ И ИНТЕГРАЛОМ

Введены обобщенные моментные представления двойных числовых последовательностей. На основании этих представлений получены интегральные представления сумм рядов и разложения в ряды значений интегралов, а также интегральные представления разделенных разностей аналитических в круге функций.

METHOD OF MOMENTS FOR FUNCTION REPRESENTATION BY SERIES AND INTEGRAL

The generalized moment representations of double numerical sequences are introduced. On the base of moments proposed the integral representations are obtained for the series sums and representations by integral value series, and, besides, the integral representations of divided differences of circle-analytical functions.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
02.12.02