УДК 512.933

І. І. Кирчей

АНАЛОГ КЛАСИЧНОЇ ПРИЄДНАНОЇ МАТРИЦІ НАД ТІЛОМ З ІНВОЛЮЦІЄЮ

На основі властивостей стовпцевого та рядкового визначників квадратних матриць над тілом з інволюцією введено поняття подвійного визначника та досліджено його властивості. Встановлено необхідну й достатню умови існування оберненої матриці, а також її аналітичне зображення через аналог класичної приєднаної.

Вступ. Ця робота є продовженням досліджень, викладених у [6]. У ній на основі теорії стовпцевих і рядкових визначників обернена матриця $\mathbf{A}^{-1}$ над тілом аналітично зображається через аналог класичної приєднаної матриці $\boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}]$ для довільної квадратної матриці $\mathbf{A}$ над тілом, узагальнюючи відому з комутативного випадку формулу

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}]}{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}}. \tag{1}$$

Про те, що ця проблема з лінійної алгебри над тілом залишається відкритою, вказується, зокрема, в роботі Н. Когена, С. Де Лео [12]. Тут автори зауважують: «В обчисленні оберненої дійсних і комплексних матриць (1) має велике теоретичне значення. Однак ми зазнаємо невдачі при узагальненні цієї формули для кватерніонних матриць».

Вирішальним для розв'язання цієї задачі є означення визначника квадратної матриці над тілом. У теорії визначників матриць із некомутуючими елементами є відомими три підходи. У першому, найбільш відомому, підході визначники матриць над тілом (чи більш узагальнено [8] − над некомутативним кільцем) приймають свої значення не в самому тілі, а в приєднаному до нього комутативному об'єкті і при цьому задовольняють загальновизнану [9, 12, 13, 6] необхідну та достатню для означення групу з трьох аксіом. Прикладами таких визначників є визначники Стаді, $\boldsymbol{Sdet}\,\mathbf{A}$, та Дьйодонне, $\boldsymbol{Ddet}\,\mathbf{A}$. Але оскільки у рамках цієї теорії такі властивості звичайних визначників, як розклади за мінорами рядка чи стовпця матриці, не виконуються, то відповідно не є можливою і побудова приєднаної матриці. Так, у роботі [8] при аналітичному зображенні оберненої матриці визначник, уведений Й. С. Понізовським, який узагальнює визначник Дьйодонне, не застосовується.

При іншому підході, коли визначник матриць над тілом будують як раціональну функцію від її елементів (наприклад, у роботах [2, 3]), властивість розкладу за мінорами рядка чи стовпця також не виконується. Тому для подання оберненої матриці в [2, 3] використовують іншу структуру, ніж приєднана матриця.

Врешті, при третьому підході визначники матриць із некомутуючими елементами означають у класичному сенсі як альтернативну суму мономів із фіксованим порядком елементів у кожному з них. У плані побудови оберненої матриці найбільшого успіху в межах цього підходу здобув китайський математик Л. Чен [10, 11], означивши визначник для довільної матриці $\mathbf{A}_{n\times n}$ над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$ таким чином:

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} = \sum_{\sigma\in I_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{n_1 i_2}\cdot a_{i_2 i_3}\ldots\cdot a_{i_s n_1}\cdot\ldots\cdot a_{n_r k_2}\cdot\ldots\cdot a_{k_l n_r}\,,$$

$$\sigma = (n_1 i_2 \ldots i_s)\ldots(n_r k_2\ldots k_l)\,,$$

$$n_1 > i_2, i_3, \ldots, i_s; \qquad \ldots; \qquad n_r > k_2, k_3, \ldots, k_l\,,$$

$$n = n_1 > n_2 > \ldots > n_r \ge 1\,.$$

З точки зору виконання ключових аксіом, такий визначник не є коректно означеним, але на основі цього визначника вводиться подвійний визначник (у позначеннях автора $\| \mathbf{A} \| \equiv \left| \mathbf{A}^* \mathbf{A} \right|$, де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_{n \times m}$), який задовольняє ключові аксіоми. Оскільки визначник Чена властивості розкладу за мінорами рядка чи стовпця також не має, то й матрицю, яка використовується для аналітичного зображення оберненої, не можна означити як певний аналог приєднаної. Нехай $\| \mathbf{A} \| \neq 0$ і $\mathbf{A}^{-1} = (b_{jk})$, тоді b_{jk} задаються формулою

$$\overline{b_{jk}} = \frac{1}{\| \mathbf{A} \|} \omega_{kj}, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\omega_{kj} = \boldsymbol{det}\, (\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1} \alpha_n \alpha_{j+1} \ldots \alpha_{n-1} \delta_k)^* (\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1} \alpha_n \alpha_{j+1} \ldots \alpha_{n-1} \alpha_j),$$

де α_i – i-й стовпець матриці $\mathbf{A}$, δ_k – n-вимірний стовпець з 1 в k-му рядку та 0 в усіх інших.

У пропонованій роботі в рамках теорії рядкових і стовпцевих визначників квадратної матриці над тілом з інволюцією вводиться поняття подвійного визначника та розглядаються його властивості. Установлюється критерій існування та єдиності оберненої матриці, яка подається саме через аналог приєднаної.

У наступних розробках, які не ввійшли в цю роботу, доцільність такого аналітичного зображення оберненої матриці підтверджується одержанням формул, що узагальнюють формули Крамера для лівої і правої систем лінійних рівнянь над тілом.

1. Означення основного тіла. Нехай тіло $\mathbb{S}$ є композиційною асоціативною алгеброю над своїм центром – максимальним упорядкованим полем $\mathbb{F}$, тобто $\mathbb{S}$ – алгебра з 1 і інволюцією $x \to \bar{x}$ такою, що слід елемента $\boldsymbol{t}(x) = x + \bar{x} \in \mathbb{F}$ і його норма $\boldsymbol{n}(x) = x \cdot \bar{x} \in \mathbb{F}_+$, при цьому $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$, $\overline{x \cdot y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$, $\bar{\bar{x}} = x$. Означена на $\mathbb{S}$ невироджена квадратична форма $\boldsymbol{n}(x) : \mathbb{S} \to \mathbb{F}_+$ допускає композицію $\boldsymbol{n}(x \cdot y) = \boldsymbol{n}(x) \cdot \boldsymbol{n}(y)$. Тут $\mathbb{F}_+$ – множина невід'ємних елементів поля $\mathbb{F}$, а максимальна впорядкованість поля $\mathbb{F}$ означає, що $\forall \alpha \in \mathbb{F}_+ \ \exists \sqrt{\alpha} \in \mathbb{F}_+$. Тоді [4] тіло $\mathbb{S}$ є ізоморфним одній з наступних алгебр з нормою у канонічному базисі:

1) полю $\mathbb{F}$, $\boldsymbol{n}(x) = x_0^2$;

2) алгебрі $\mathbb{C}(\alpha) = (\mathbb{F}, \alpha)$, $\alpha > 0$, яка одержується із $\mathbb{F}$ за допомогою процесу Келі – Діксона, $\boldsymbol{n}(x) = x_0^2 + \alpha x_1^2$;

3) алгебрі узагальнених кватерніонів $\mathbb{H}(\alpha, \beta) = (\mathbb{C}(\alpha), \beta)$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $\boldsymbol{n}(x) = \left(x_0^2 + \alpha x_1^2\right) + \beta\left(x_2^2 + \alpha x_3^2\right)$. Ця алгебра некомутативна.

2. Означення і властивості рядкових та стовпцевих визначників.

Означення 2.1. *Рядковим визначником за* i*-м рядком* квадратної матриці $\mathbf{A}_{n \times n}$ над тілом $\mathbb{S}$, $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}$ $\forall i = \overline{1, n}$, будемо називати альтернативну суму $n!$ мономів, у кожному з яких елементи матриці впорядковані зліва направо наступним чином:

$$\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in I_n} (-1)^{n-r} a_{i i_{k_1}} \cdot a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+l_1} i} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}}.$$

Тут циклічне зображення впорядкованої зліва підстановки n-го степеня σ у нормальній формі має вигляд

$$\sigma = (i\, i_{k_1} i_{k_1+1} \ldots i_{k_1+l_1})(i_{k_2} i_{k_2+1} \ldots i_{k_2+l_2})\ldots(i_{k_r} i_{k_r+1} \ldots i_{k_r+l_r}),$$

де $\quad i_{k_2} < i_{k_3} < \ldots < i_{k_r}, \quad i_{k_t} < i_{k_t+s} \quad \forall t = \overline{2,r}, \ \forall s = \overline{1,l_t}$.

Нехай $\mathbf{A}^{ij}$ – підматриця матриці $\mathbf{A}$, яку одержуємо викреслюючи i-й рядок та j-й стовпець. Через $\mathbf{a}_{.j}$ позначимо j-й стовпець, а через $\mathbf{a}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\mathbf{A}$. Нехай $\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{b})$ – матриця, яку одержуємо з матриці $\mathbf{A}$ заміною її j-го стовпця стовпцем $\mathbf{b}$, а матрицю $\mathbf{A}_{i.}(\mathbf{b})$ одержуємо з $\mathbf{A}$ заміною її i-го рядка рядком $\mathbf{b}$.

Лема 2.1 [6]. *Нехай* R_{ij} *– праве алгебричне доповнення елемента* a_{ij} *матриці* $\mathbf{A}_{n\times n}$ *над тілом* $\mathbb{S}$, *тобто*

$$\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot R_{ij} \qquad \forall i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Тоді

$$R_{ij} = \begin{cases} -\,\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}^{ii}_{.j}(\mathbf{a}_{.i}), & i \neq j, \\ \boldsymbol{rdet}_k\,\mathbf{A}, & i = j, \qquad k = \min\{I_n \setminus \{i\}\}. \end{cases}$$

Означення 2.2. *Стовпцевим визначником за* j*-м стовпцем* квадратної матриці $\mathbf{A}_{n\times n}$ над тілом $\mathbb{S}$, $\boldsymbol{cdet}_j\mathbf{A}$ $\ \forall j = \overline{1,n}$, будемо називати альтернативну суму $n!$ мономів, у кожному з яких елементи матриці впорядковані справа наліво таким чином:

$$\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A} = \sum_{\tau\in J_n} (-1)^{n-r} a_{j_{k_r} j_{k_r+l_r}} \cdot \ldots \cdot a_{j_{k_r+1} j_{k_r}} \cdot \ldots \cdot a_{j\, j_{k_1+l_1}} \cdot \ldots \cdot a_{j_{k_1+1} j_{k_1}} \cdot a_{j_{k_1} j}\,.$$

Тут циклічне зображення впорядкованої справа підстановки n-го степеня τ у нормальній формі має вигляд

$$\tau = (j_{k_r+l_r} \ldots j_{k_r+1} j_{k_r})\ldots(j_{k_2+l_2} \ldots j_{k_2+1} j_{k_2})(j_{k_1+l_1} \ldots j_{k_1+1} j_{k_1} j),$$

де $\quad j_{k_2} < j_{k_3} < \ldots < j_{k_r}, \quad j_{k_t} < j_{k_t+s} \quad \forall t = \overline{2,r}, \ \forall s = \overline{1,l_t}$.

Лема 2.2 [6]. *Нехай* L_{ij} *– ліве алгебричне доповнення елемента* a_{ij} *матриці* $\mathbf{A}_{n\times n}$ *над тілом* $\mathbb{S}$, *тобто*

$$\boldsymbol{cdet}_j\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} L_{ij}\cdot a_{ij} \qquad \forall j = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Тоді

$$L_{ij} = \begin{cases} -\,\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}^{jj}_{i.}(\mathbf{a}_{j.}), & i \neq j, \\ \boldsymbol{cdet}_k\,\mathbf{A}^{ii}, & i = j, \qquad k = \min\{I_n \setminus \{i\}\}. \end{cases}$$

Очевидно, що, коли елементи матриці комутують, то всі рядкові та стовпцеві визначники рівні між собою. Для довільної квадратної матриці над тілом $\mathbb{S}$ установлена [6, 7] ліва лінійність рядкового визначника відносно довільного її рядка та права лінійність стовпцевого визначника відносно будь-якого стовпця матриці. У той же час в цілому немає відповідності між виродженістю цих визначників і лівою лінійною залежністю рядків матриці чи правою лінійною залежністю її стовпців, тобто не виконується аксіома 1 з [6]. Але сумніви щодо необхідності введення цих визначникових функціоналів розвіюються вже при розгляді їх властивостей для ермітової матриці. Має місце основна теорема про рядкові та стовпцеві визначники ермітових матриць.

Теорема 2.1 [5, 6]. *Нехай* $\mathbf{A}_{n\times n}$ *– ермітова матриця над тілом* $\mathbb{S}$. *Тоді* $\boldsymbol{rdet}_1\,\mathbf{A} = \ldots = \boldsymbol{rdet}_n\,\mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_1\,\mathbf{A} = \ldots = \boldsymbol{cdet}_n\,\mathbf{A} \in \mathbb{F}$.

Оскільки всі стовпцеві та рядкові визначники ермітової матриці рівні між собою, то для неї можемо ввести поняття визначника матриці, розкриваючи його як рядковий за будь-яким рядком чи стовпцевий за будь-яким стовпцем: $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} := \boldsymbol{rdet}_i\mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_i\mathbf{A} \quad \forall i = \overline{1,n}$. У роботі [6] показано, що для ермітової матриці $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} \equiv \boldsymbol{Mdet}\,\mathbf{A}$.

Розглянемо (доведені в [6]) основні властивості стовпцевих і рядкових визначників ермітової матриці над тілом $\mathbb{S}$:

2.1. $\boldsymbol{rdet}_i\mathbf{A}_{i.}(c_1\cdot\mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k\cdot\mathbf{a}_{i_k.}) = 0$,

$\boldsymbol{cdet}_i\mathbf{A}_{i.}(c_1\cdot\mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k\cdot\mathbf{a}_{i_k.}) = 0$;

2.2. $\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.j_1}\cdot c_1 + \ldots + \mathbf{a}_{.j_k}\cdot c_k) = 0$,

$\boldsymbol{rdet}_j\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.j_1}\cdot c_1 + \ldots + \mathbf{a}_{.j_k}\cdot c_k) = 0$.

З цих властивостей очевидно випливає виконання ключової аксіоми 1 з [6] для визначника $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}$ ермітової матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\mathbb{S})$.

3. Матриця, обернена до ермітової.

Теорема 3.1 [6]. *Для ермітової невиродженої матриці* $\mathbf{A}_{n\times n}$ *існують єдині права* $(R\mathbf{A})^{-1}$ *і ліва* $(L\mathbf{A})^{-1}$ *обернені матриці, які рівні між собою,* $\mathbf{A}^{-1} := (L\mathbf{A})^{-1} = (R\mathbf{A})^{-1}$, *де*

$$(R\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}}\begin{Vmatrix} R_{11} & R_{21} & \ldots & R_{n1} \\ R_{12} & R_{22} & \ldots & R_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{1n} & R_{2n} & \ldots & R_{nn} \end{Vmatrix}, \quad (L\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}}\begin{Vmatrix} L_{11} & L_{21} & \ldots & L_{n1} \\ L_{12} & L_{22} & \ldots & L_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{1n} & L_{2n} & \ldots & L_{nn} \end{Vmatrix}.$$

4. Властивості правої та лівої відповідних ермітових матриць.

Означення 4.1. Нехай $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ матриця над тілом $\mathbb{S}$. Будемо називати матрицю $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{D} = (d_{ij})_{n\times n}$ її *лівою відповідною ермітовою,* а $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{G} = (g_{ij})_{m\times m}$ – її *правою відповідною ермітовою матрицею.*

Теорема 4.1. *Якщо довільний стовпець матриці* $\mathbf{A}$ *над тілом* $\mathbb{S}$ *є правою лінійною комбінацією її інших стовпців, то* $\det\mathbf{A}^*\mathbf{A} = 0$.

Д о в е д е н н я. Нехай j-й стовпець матриці $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ над тілом $\mathbb{S}$ є правою лінійною комбінацією її інших стовпців з індексами $j_1,\ldots,j_k$, де $j_l \in \{1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\} \quad \forall l = \overline{1,k}$. Легко перевірити, що тоді й j-й стовпець ермітової матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ є правою лінійною комбінацією своїх стовпців $j_1,\ldots,j_k$. Звідси, за властивістю ***2.2,*** $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_j(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = 0$.

Теорему доведено. ◊

Аналогічно доводиться

Теорема 4.2. *Якщо довільний рядок матриці* $\mathbf{A}$ *над тілом* $\mathbb{S}$ *є лівою лінійною комбінацією її інших рядків, то* $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\mathbf{A}^* = 0$.

Оскільки головні підматриці ермітової матриці також є ермітовими, то її базисний головний мінор можна визначити, як у комутативному випадку.

Означення 4.2. Нехай рядки та стовпці з індексами $i_1,\ldots,i_r$ ермітової матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ є базисними, тоді *рядки* з індексами $i_1,\ldots,i_r$ назвемо *базисними* для матриці $\mathbf{A}^*$, а *стовпці* з індексами $i_1,\ldots,i_r$ назвемо *базисними* для матриці $\mathbf{A}$.

За аналогією з комутативним випадком є правильною

Теорема 4.3. *Нехай* $\mathbf{A}$ *– матриця над тілом* $\mathbb{S}$. *Тоді базисні рядки матриць* $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ *та* $\mathbf{A}^*$ *є лінійно незалежними зліва, а базисні стовпці матриць* $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ *та* $\mathbf{A}$ *є лінійно незалежними справа.*

Теорема 4.4. *Довільний стовпець матриці над тілом* $\mathbb{S}$ *є правою лінійною комбінацією її базисних стовпців.*

Д о в е д е н н я. Нехай стовпці з індексами $i_1,\ldots,i_r$ – базисні для матриці $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, тоді базисний головний мінор матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\mathbf{D}=(d_{ij})_{n\times n}$ міститься на перетині стовпців і рядків із тими самими індексами $i_1,\ldots,i_r$. Доповнимо ермітову матрицю $\mathbf{M}$, що відповідає базисному головному мінорові матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, ($r+1$)-м рядком і стовпцем, що складаються з відповідних елементів її j-го рядка та j-го стовпця, при цьому $j\in\{i_1,\ldots,i_r\}$. Позначимо одержану матрицю через $\mathbf{D}_j$:

$$\mathbf{D}_j := \begin{Vmatrix} d_{i_1i_1} & \cdots & d_{i_1i_r} & d_{i_1j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{i_ri_1} & \cdots & d_{i_ri_r} & d_{i_rj} \\ d_{ji_1} & \cdots & d_{ji_r} & d_{jj} \end{Vmatrix}.$$

Оскільки ермітова матриця $\mathbf{D}_j$ має два однакові стовпці, то, за властивістю ***2.2,*** $\boldsymbol{det}\,\mathbf{D}_j=\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{D}_j=\sum\limits_{l=1}^{r}L_{i_lj}\cdot d_{i_lj}+L_{jj}\cdot d_{jj}=0$, де $\forall l=\overline{1,k}$ L_{i_lj} є лівим алгебричним доповненням елемента d_{i_lj} матриці $\mathbf{D}_j$. Так як $L_{jj}=$ $=\boldsymbol{det}\,\mathbf{M}\neq 0$, то

$$d_{jj}=-\sum_{l=1}^{r}(\boldsymbol{det}\,\mathbf{M})^{-1}L_{i_lj}\cdot d_{i_lj}\qquad \forall j\in\{i_1,\ldots,i_r\}. \tag{4}$$

Нехай тепер $j\notin\{i_1,\ldots,i_k,i_{k+1},\ldots,i_r\}$, $i_k<j<i_{k+1}$. Тоді $\mathbf{D}_j$ має вигляд

$$\mathbf{D}_j = \begin{Vmatrix} d_{i_1i_1} & \ldots & d_{i_1i_k} & d_{i_1j} & d_{i_1i_{k+1}} & \ldots & d_{i_1i_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{i_ki_1} & \ldots & d_{i_ki_k} & d_{i_kj} & d_{i_ki_{k+1}} & \ldots & d_{i_ki_r} \\ d_{ji_1} & \ldots & d_{ji_k} & d_{jj} & d_{ji_{k+1}} & \ldots & d_{ji_r} \\ d_{i_{k+1}i_1} & \ldots & d_{i_{k+1}i_k} & d_{i_{k+1}j} & d_{i_{k+1}i_{k+1}} & \ldots & d_{i_{k+1}i_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{i_ri_1} & \ldots & d_{i_ri_k} & d_{i_rj} & d_{i_ri_{k+1}} & \ldots & d_{i_ri_r} \end{Vmatrix}.$$

Матриця $\mathbf{D}_j$ і в цьому випадку є ермітовою і, за властивістю ***2.2***, $\boldsymbol{det}\,\mathbf{D}_j=\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{D}_j=\sum\limits_{l=1}^{r}L_{i_lj}\cdot d_{i_lj}+L_{jj}\cdot d_{jj}=0$. Оскільки $L_{jj}=\boldsymbol{det}\,\mathbf{M}\neq 0$, то

$$d_{jj}=-\sum_{l=1}^{r}(\boldsymbol{det}\,\mathbf{M})^{-1}L_{i_lj}\cdot d_{i_lj},\qquad j\notin\{i_1,\ldots,i_r\}. \tag{5}$$

Об'єднавши вирази (4) і (5), одержимо $d_{jj} = -\sum_{l=1}^{r} (\boldsymbol{det}\,\mathbf{M})^{-1} L_{i_l j} \cdot d_{i_l j} \quad \forall j = \overline{1,n}$.

Нехай $-(\boldsymbol{det}\,\mathbf{M})^{-1} L_{i_l j} = \mu_l$, тоді $d_{jj} = \sum_{l=1}^{r} \mu_l \cdot d_{i_l j}$. Оскільки $d_{jj} = \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kj}} \cdot a_{kj}$

і $d_{i_l j} = \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{k i_l}} \cdot a_{kj}$, то $\sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kj}} \cdot a_{kj} = \sum_{l=1}^{r} \mu_l \cdot \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{ki_l}} \cdot a_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{r} \mu_l \cdot \overline{a_{ki_l}} \cdot a_{kj}$.

Звідси маємо, що $\overline{a_{kj}} = \sum_{l=1}^{r} \mu_l \cdot \overline{a_{ki_l}}$, тоді $a_{kj} = \sum_{l=1}^{r} a_{ki_l} \cdot \overline{\mu_l} \quad \forall k = \overline{1,m}$. А це означає, що довільний j-й стовпець матриці $\mathbf{A}$ є правою лінійною комбінацією її базисних стовпців із коефіцієнтами $\overline{\mu_1}, \ldots, \overline{\mu_r}$:

$$\mathbf{a}_{\bullet j_1} \cdot \overline{\mu_1} + \ldots + \mathbf{a}_{\bullet j_r} \cdot \overline{\mu_r} = \mathbf{a}_{\bullet j} \qquad \forall j \in J_n \ .$$

Теорему доведено. ◊

Теорема 4.5. *Довільний рядок матриці над тілом* $\mathbb{S}$ *є лівою лінійною комбінацією її базисних рядків.*

Д о в е д е н н я є аналогічним до доведення теореми 4.5.

Очевидним наслідком теорем 4.1, 4.4 та 4.5 є критерій виродженності лівої чи правої відповідних ермітових матриць:

Теорема 4.6. *Для того щоб* $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A} = 0$, *необхідно й достатньо, щоб стовпці матриці* $\mathbf{A}^*$ *були лінійно залежними справа або рядки матриці* $\mathbf{A}$ *були лінійно залежними зліва.*

5. Властивості подвійного визначника квадратних матриць над тілом.

Означення 5.1 [1]. Матрицю $\mathbf{P}_{ij}(b) := \mathbf{I} + b \cdot \mathbf{E}_{ij}$ будемо називати *елементарною унімодулярною матрицею*. Матриці $\mathbf{P}_{ij}(b)$ (для всіх $i \neq j$ та всіх $b \in \mathbb{S}$) породжують *унімодулярну групу* $\mathrm{SL}(n, \mathbb{S})$, її елементи будемо називати *унімодулярними матрицями*.

Теорема 5.1. *Для ермітової матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \mathbb{S})$ *і* $\forall b \in \mathbb{S}$ *виконуєтьcя*

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{det}(\mathbf{P}_{ij}(b) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{ij}^*(b)).$$

Д о в е д е н н я. Спочатку зауважимо, що для $\forall \mathbf{U} \in \boldsymbol{M}(n, \mathbb{S})$ й ермітової $\mathbf{A}$ матриця $\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}$ є ермітовою. Дійсно, $(\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U})^* = \mathbf{U}^*\mathbf{A}^*\mathbf{U} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}$.

Множення матриці $\mathbf{A}$ зліва на матрицю $\mathbf{P}_{ij}(b)$ рівносильне додаванню до i-го рядка матриці $\mathbf{A}$ її j-го рядка, помноженого зліва на $b \in \mathbb{S}$. Множення матриці $\mathbf{A}$ справа на $\mathbf{P}_{ij}^*(b)$, у свою чергу, рівносильне додаванню до i-го стовпця її j-го стовпця, помноженого справа на $\overline{b}$. Таким чином,

$$\mathbf{P}_{ij}(b) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{ij}^*(b) = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} + a_{1j}\,\overline{b} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} + b a_{j1} & \ldots & (b a_{jj} + a_{ij})\overline{b} + b a_{ji} + a_{ii} & \ldots & a_{in} + b a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{ni} + a_{nj}\,\overline{b} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Тоді на підставі властивостей ***2.1*** і ***2.2*** одержимо

$$\boldsymbol{det}\left(\mathbf{P}_{ij}(b)\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}_{ij}^{*}(b)\right)=\boldsymbol{cdet}_i\left(\mathbf{P}_{ij}(b)\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}_{ij}^{*}(b)\right)=$$

$$=\left(\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{\bullet i}(\mathbf{a}_{\bullet j})+\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i\bullet}(b\cdot\mathbf{a}_{j\bullet})\right)\cdot\overline{b}+$$

$$+\,\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i\bullet}(b\cdot\mathbf{a}_{j\bullet})+\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}=\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\,.$$

Теорему доведено. ◊

Теорема 5.2. *Для ермітової матриці* $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\mathbb{S})$ *і* $\forall\mathbf{U}\in\mathrm{SL}(n,\mathbb{S})$ *виконується*

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}=\boldsymbol{det}(\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{U}^{*})\,.$$

Д о в е д е н н я. Відмітимо, що для $\forall\mathbf{U}\in\mathrm{SL}(n,\mathbb{S})$ $\exists k\in\mathbb{N}$, $\exists\{\mathbf{P}_1,\ldots,\mathbf{P}_k\}\subset\subset\mathrm{SL}(n,\mathbb{S})$ такі, що $\mathbf{U}=\mathbf{P}_k\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}_1$.

Теорему доведемо методом індукції за k.

а) У випадку $k=1$ доведення випливає з теореми 5.1.

б) Нехай теорема справджується для $k-1\geq 1$, тобто $\mathbf{U}=\mathbf{P}_{k-1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}_1$ і $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}=\boldsymbol{det}\left(\mathbf{P}_{k-1}\ldots\mathbf{P}_1\mathbf{A}\mathbf{P}_1^{\,*}\ldots\mathbf{P}_{k-1}^{\,*}\right)$. Позначимо $\mathbf{P}_{k-1}\ldots\mathbf{P}_1\mathbf{A}\mathbf{P}_1^{\,*}\ldots\mathbf{P}_{k-1}^{\,*}$ через $\tilde{\mathbf{A}}$. Як показано в теоремі 5.1, матриця $\tilde{\mathbf{A}}$ є ермітовою.

в) Нехай тепер $\mathbf{U}=\mathbf{P}_k\cdot\mathbf{P}_{k-1}\ldots\cdot\mathbf{P}_1$, тоді

$$\boldsymbol{det}(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{*})=\boldsymbol{det}\left(\mathbf{P}_k\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P}_k^{*}\right)=\boldsymbol{det}\,\tilde{\mathbf{A}}=\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\,.$$

Теорему доведено. ◊

Теорема 5.3. *Нехай* $\mathbf{A}$ − *ермітова матриця над тілом* $\mathbb{S}$. *Тоді* $\exists\mathbf{U}\in\in\mathrm{SL}(n,\mathbb{S})$, *що* $\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{U}^{*}=\mathrm{diag}(\mu_1,\ldots,\mu_n)$, *де* $\mathrm{diag}(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ − *діагональна матриця з елементами* $\mu_i\in\mathbb{F}$ $\forall i=\overline{1,n}$, *при цьому* $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}=\mu_1\cdot\ldots\cdot\mu_n$.

Д о в е д е н н я. Для довільної ермітової матриці $\mathbf{A}$ можливі такі випадки:

а) Нехай $a_{11}\neq 0$, тоді покладемо $\mu_1=a_{11}\in\mathbb{F}$. Домножуючи послідовно матрицю $\mathbf{A}$ зліва на елементарні унімодулярні матриці $\mathbf{P}_{i1}\left(-\dfrac{a_{i1}}{\mu_1}\right)$ $\forall i=\overline{2,n}$, одержимо матрицю, у якій усі елементи першого стовпця, крім діагонального, є нульовими. Оскільки $\overline{-\dfrac{a_{i1}}{\mu_1}}=-\dfrac{a_{1i}}{\mu_1}$, то $\mathbf{P}_{i1}^{*}\left(-\dfrac{a_{i1}}{\mu_1}\right)=\mathbf{P}_{1i}\left(-\dfrac{a_{1i}}{\mu_1}\right)$. Послідовно домножуючи матрицю $\mathbf{A}$ справа на елементарні унімодулярні матриці $\mathbf{P}_{i1}^{*}\left(-\dfrac{a_{i1}}{\mu_1}\right)$, одержимо нульовими всі елементи першого рядка, крім діагонального. При цьому з огляду на теорему 5.1 матриця залишається ермітовою.

б) Нехай $a_{11}=0$ і $\exists i\in I_n$, що $a_{i1}\neq 0$. Тоді, помноживши матрицю $\mathbf{A}$ зліва на елементарну унімодулярну матрицю $\mathbf{P}_{1i}(a_{1i})$ і справа на $\mathbf{P}_{i1}\left(\overline{a_{i1}}\right)$, одержимо матрицю $\tilde{\mathbf{A}}$ з елементом $\tilde{a}_{11}=\boldsymbol{n}(a_{i1})(2+a_{i\,i})\in\mathbb{F}$. Покладемо $\mu_1=\tilde{a}_{11}$. Послідовно домножуючи матрицю $\mathbf{A}$ зліва на елементарні унімодулярні матриці $\mathbf{P}_{i1}\left(-\dfrac{a_{i1}}{\mu_1}\right)$ і справа на $\mathbf{P}_{i1}^{*}\left(-\dfrac{a_{i1}}{\mu_1}\right)$ $\forall i=\overline{2,n}$, побудуємо матрицю, в якій усі елементи першого рядка й стовпця, крім діагонального, є нульовими.

в) Нехай $a_{i1} = 0 \quad \forall i \in I_n$, тоді покладемо $\mu_1 = a_{11}$.

Провівши описану процедуру для кожного діагонального елемента та елементів відповідних рядків і стовпців, через скінчену кількість операцій множення ермітової матриці $\mathbf{A}$ зліва на елементарні унімодулярні матриці $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{ij}(b_k)$ і справа на $\mathbf{P}_k^* = \mathbf{P}_{ji}(\overline{b_k})$ побудуємо діагональну матрицю з елементами $\mu_i \in \mathbb{F} \quad \forall i = \overline{1,n}$. Покладемо $\mathbf{U} = \prod\limits_k \mathbf{P}_k$. Тоді за теоремою 5.2 отримаємо

$$\boldsymbol{det}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^*) = \boldsymbol{det}(\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)) = \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_n .$$

Теорему доведено. ◊

Теорема 5.4. *Нехай* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \mathbb{S})$, *тоді* $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо ермітові матриці порядку $2n$: $\begin{Vmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & -\mathbf{I} \end{Vmatrix}$. Очевидно, що $\boldsymbol{det}\begin{Vmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{Vmatrix} = \boldsymbol{det}\begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & -\mathbf{I} \end{Vmatrix}$. Неважко бачити, що довільну квадратну матрицю $\begin{Vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{Vmatrix}$ можна подати у вигляді добутку n^2 елементарних унімодулярних матриць, $\forall k = \overline{1, n^2} \quad \exists i = \overline{1,n}$, $\exists j = \overline{n+1, n^2}$, $\exists \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{ij}^{(k)}(a_{ij})$: $\begin{Vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{Vmatrix} = \prod\limits_k \mathbf{P}_k$. Отже, $\begin{Vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{Vmatrix} \in \mathrm{SL}(2n, \mathbb{S})$ і за теоремою 5.2 одержимо

$$(-1)^n \boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \boldsymbol{det}\begin{Vmatrix} \mathbf{A}\mathbf{A}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{Vmatrix} = \boldsymbol{det}\left(\begin{Vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & -\mathbf{I} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{I} \end{Vmatrix} \right) =$$

$$= \boldsymbol{det}\begin{Vmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{Vmatrix} = \boldsymbol{det}\left(\begin{Vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{I} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{Vmatrix} \right) =$$

$$= \boldsymbol{det}\begin{Vmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^*\mathbf{A} \end{Vmatrix} = (-1)^n \boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A} .$$

Теорему доведено. ◊

Означення 5.2 [11]. Для $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \mathbb{S})$ визначник її відповідної ермітової матриці будемо називати її *подвійним* (*double*) *визначником*, $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} := = \boldsymbol{det}(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \boldsymbol{det}(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)$.

Теорема 5.5. *Нехай* $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \subset \boldsymbol{M}(n, \mathbb{S})$. *Тоді*

$$\boldsymbol{ddet}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{ddet}\,\mathbf{B} .$$

Д о в е д е н н я. За теоремою 5.3 ермітова матриця $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ унімодулярно подібна до діагональної матриці, тобто для матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A} \quad \exists \mathbf{U} \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{S})$, $\exists \alpha_i \in \mathbb{F} \quad \forall i = \overline{1,n}$, що $\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{A}^*\mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{U})^* \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}$. Нехай $\mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = (q_{ij})_{n \times n}$. Тоді $\alpha_i = \sum\limits_k \overline{q_{ki}}\, q_{ki} = \sum\limits_k \boldsymbol{n}(q_{ki}) \in \mathbb{F}_+ \quad \forall i = \overline{1,n}$. Оскільки поле $\mathbb{F}$ є максимально впорядкованим, то $\exists \sqrt{\alpha_i} \in \mathbb{F}_+$. Крім того, так як $(\mathbf{V}^*)^{-1} = = (\mathbf{V}^{-1})^*$, то для ермітової матриці $(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B})^*(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B})$ знову на підставі теореми 5.3 $\exists \mathbf{W} \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{S})$, $\exists \beta_i \in \mathbb{F}$ $\forall i = \overline{1, n}$, що $\mathbf{W}^*(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B})^*(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{W} =$ $= \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Тоді за теоремою 5.2 одержимо

$$\boldsymbol{ddet}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \boldsymbol{det}(\mathbf{B}^*(\mathbf{A}^*\mathbf{A})\mathbf{B}) = \boldsymbol{det}(\mathbf{B}^*(\mathbf{U}^*)^{-1}\mathbf{U}^*(\mathbf{A}^*\mathbf{A})\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}) =$$

$$= \boldsymbol{det}\left((\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})^* \,\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}\right) =$$

$$= \boldsymbol{det}\left((\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})\,\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})^*(\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})\,\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})\right) =$$

$$= \boldsymbol{det}\left((\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})\,\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})(\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})\,\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})^*\right) =$$

$$= \boldsymbol{det}\left(\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})^*\,\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})\right) =$$

$$= \boldsymbol{det}\big(\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})\,\mathbf{W}^{-1}\,\mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)(\mathbf{W}^{-1})^* \times$$

$$\times\,\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})\big) = \boldsymbol{det}\big((\mathbf{W}^{-1})^\top\,\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})\times$$

$$\times\,\mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)\,\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})((\mathbf{W}^{-1})^\top)^*\big) =$$

$$= \boldsymbol{det}\left(\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})\,\mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)\,\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})\right) =$$

$$= \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \cdot \beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_n = \boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{det}\,\mathbf{B} = \boldsymbol{det}\,\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}.$$

Теорему доведено. ◊

При доведенні теорем 5.4 та 5.5 ми, дотримуючись [11], узагальнили їх з тіла кватерніонів на тіло $\mathbb{S}$.

Теорема 5.6. *Для* $\forall \mathbf{U} \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{S})$ *маємо, що* $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{U} = 1$.

Д о в е д е н н я. За теоремою 5.3 для $\forall \mathbf{U} \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{S})$ отримуємо, що $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{U} = \boldsymbol{det}\,\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \boldsymbol{det}\,\mathbf{U}^*\mathbf{I}\mathbf{U} = \boldsymbol{det}\,\mathbf{I} = 1$.

Теорему доведено. ◊

Зауваження 5.1. На підставі теореми 5.6 унімодулярну матрицю над тілом $\mathbb{S}$ можна означити як матрицю, подвійний визначник якої дорівнює 1.

Зауваження 5.2. З теорем 4.1, 5.5 та 5.6 випливає, що $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}$ для $\forall \mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \mathbb{S})$ задовольняє ключові аксіоми визначника і, коли $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \mathbb{H})$, то $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{Mdet}(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \boldsymbol{Mdet}(\mathbf{A}\mathbf{A}^*) = \boldsymbol{Sdet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{Ddet}^2\mathbf{A}$.

6. Обернена матриця над тілом $\mathbb{S}$.

Означення 6.1. Нехай $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_j(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \sum_i \mathbb{L}_{ij}\, a_{ij}$ $\forall j = \overline{1, n}$. Тоді $\mathbb{L}_{ij}$ будемо називати *лівим подвійним алгебричним доповненням елемента* a_{ij} матриці $\mathbf{A}$.

Означення 6.2. Нехай $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_i(\mathbf{A}\mathbf{A}^*) = \sum_j a_{ij}\mathbb{R}_{ij}$ $\forall i = \overline{1, n}$. Тоді $\mathbb{R}_{ij}$ будемо називати *правим подвійним алгебричним доповненням елемента* a_{ij}.

Теорема 6.1. *Для того щоб довільна матриця* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \mathbb{S})$ *була оборотною, необхідно й достатньо, щоб* $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$. *Тоді* $\mathbf{A}^{-1} = (L\mathbf{A})^{-1} =$ $= (R\mathbf{A})^{-1}$, *де*

$$(L\mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^* = \frac{1}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}\begin{Vmatrix} \mathbb{L}_{11} & \mathbb{L}_{21} & \ldots & \mathbb{L}_{n1} \\ \mathbb{L}_{21} & \mathbb{L}_{22} & \ldots & \mathbb{L}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbb{L}_{n1} & \mathbb{L}_{n2} & \ldots & \mathbb{L}_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad (6)$$

$$(R\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^*(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}^*}\begin{Vmatrix} \mathbb{R}_{11} & \mathbb{R}_{21} & \ldots & \mathbb{R}_{n1} \\ \mathbb{R}_{12} & \mathbb{R}_{22} & \ldots & \mathbb{R}_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbb{R}_{1n} & \mathbb{R}_{2n} & \ldots & \mathbb{R}_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad (7)$$

при цьому $\mathbb{L}_{ij} = \boldsymbol{cdet}_j \mathbf{D}_{\bullet j}(\mathbf{a}^*_{\bullet i})$ *та* $\mathbb{R}_{ij} = \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{G}_{i\bullet}(\mathbf{a}^*_{j\bullet})$ $\forall i, j = \overline{1, n}$.

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай існує обернена $\mathbf{A}^{-1}$ для $\mathbf{A}$ над тілом $\mathbb{S}$. Тоді за теоремою 5.5 одержимо $1 = \boldsymbol{ddet}\,\mathbf{I} = \boldsymbol{ddet}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}) = \boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}$. Звідки випливає, що $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$.

Достатність. Оскільки $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A} \neq 0$, то за теоремою 3.1 для ермітової матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ існує обернена $(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}$. Помноживши її справа на матрицю $\mathbf{A}^*$, на підставі рівності (3) одержимо аналітичне зображення лівої оберненої матриці

$$(L\mathbf{A})^{-1} = (L(\mathbf{A}^*\mathbf{A}))^{-1}\mathbf{A}^* =$$

$$= \frac{1}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}\begin{Vmatrix} \boldsymbol{cdet}_1\mathbf{D}_{\bullet 1}(\mathbf{a}^*_{\bullet 1}) & \boldsymbol{cdet}_1\mathbf{D}_{\bullet 1}(\mathbf{a}^*_{\bullet 2}) & \ldots & \boldsymbol{cdet}_1\mathbf{D}_{\bullet 1}(\mathbf{a}^*_{\bullet n}) \\ \boldsymbol{cdet}_2\mathbf{D}_{\bullet 2}(\mathbf{a}^*_{\bullet 1}) & \boldsymbol{cdet}_2\mathbf{D}_{\bullet 2}(\mathbf{a}^*_{\bullet 2}) & \ldots & \boldsymbol{cdet}_2\mathbf{D}_{\bullet 2}(\mathbf{a}^*_{\bullet n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{cdet}_n\mathbf{D}_{\bullet n}(\mathbf{a}^*_{\bullet 1}) & \boldsymbol{cdet}_n\mathbf{D}_{\bullet n}(\mathbf{a}^*_{\bullet 2}) & \ldots & \boldsymbol{cdet}_n\mathbf{D}_{\bullet n}(\mathbf{a}^*_{\bullet n}) \end{Vmatrix}.$$

Враховуючи, що $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{det}\,\mathbf{D} = \boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{D} = \sum_i \boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{D}_{\bullet j}(\mathbf{a}^*_{\bullet i}) \cdot a_{ij} = \sum_i \mathbb{L}_{ij} \cdot a_{ij}$ $\forall j = \overline{1, n}$, звідси випливає формула (6).

Доведемо тепер формулу (7). Оскільки $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}^* = \boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$, то за теоремою 3.1 для ермітової $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ існує обернена матриця $(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)^{-1}$. Помноживши її зліва на матрицю $\mathbf{A}^*$ та застосувавши формулу (2), одержимо аналітичне зображення правої оберненої матриці

$$(R\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^*(R(\mathbf{A}\mathbf{A}^*))^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}^*}\begin{Vmatrix} \boldsymbol{rdet}_1\mathbf{G}_{1\bullet}(\mathbf{a}^*_{1\bullet}) & \boldsymbol{rdet}_2\mathbf{G}_{2\bullet}(\mathbf{a}^*_{1\bullet}) & \ldots & \boldsymbol{rdet}_n\mathbf{G}_{n\bullet}(\mathbf{a}^*_{1\bullet}) \\ \boldsymbol{rdet}_1\mathbf{G}_{1\bullet}(\mathbf{a}^*_{2\bullet}) & \boldsymbol{rdet}_2\mathbf{G}_{2\bullet}(\mathbf{a}^*_{2\bullet}) & \ldots & \boldsymbol{rdet}_n\mathbf{G}_{n\bullet}(\mathbf{a}^*_{2\bullet}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{rdet}_1\mathbf{G}_{1\bullet}(\mathbf{a}^*_{n\bullet}) & \boldsymbol{rdet}_2\mathbf{G}_{2\bullet}(\mathbf{a}^*_{n\bullet}) & \ldots & \boldsymbol{rdet}_n\mathbf{G}_{n\bullet}(\mathbf{a}^*_{n\bullet}) \end{Vmatrix}.$$

Беручи до уваги, що $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{det}\,\mathbf{G} = \boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{G} = \sum_j a_{ij} \cdot \boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{G}_{i\bullet}(\mathbf{a}^*_{j\bullet}) = \sum_j a_{ij} \cdot \mathbb{R}_{ij}$ $\forall i = \overline{1, n}$, звідси одержимо формулу (7).

Рівність $(L\mathbf{A})^{-1} = (R\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$ одержуємо з властивостей оберненої матриці для добутку:

$$(L\mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1},$$

$$(R\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^*(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)^{-1} = \mathbf{A}^*(\mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Теорему доведено. ◊

Зауваження 6.1. У теоремі 6.1 запропоновано класичний метод побудови оберненої матриці $\mathbf{A}^{-1}$ для $\forall \mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \mathbb{S})$, $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$, через побудову матриці, яка є аналогом приєднаної, розглядаючи її за формулою (6) або (7). Позначимо її через $\boldsymbol{Adj}[\![\mathbf{A}]\!]$. Отже, в тілі $\mathbb{S}$ справджується рівність

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\boldsymbol{Adj}[\![\mathbf{A}]\!]}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}.$$

1. *Артин Э.* Геометрическая алгебра. – М.: Наука, 1969. – 284 с.
2. *Гельфанд И. М., Ретах В. С.* Детерминанты матриц над некоммутативными кольцами // Функц. анализ и его прил. – 1991. – **25**, № 2. – С. 13–25.
3. *Гельфанд И. М., Ретах В. С.* Теория некоммутативных детерминантов и характиристические функции графов // Функц. анализ и его прил. – 1992. – **26**, № 4. – С. 33–45.
4. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. – М.: Наука, 1978. – 431 с.
5. *Кирчей І. І.* Дробово-раціональна регуляризація системи лінійних рівнянь над тілом кватерніонів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39**, № 2. – С. 89–95.
6. *Кирчей І. І.* Класична приєднана матриця для ермітової над тілом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 3. – С. 33–48.
7. *Кирчей І. І.* Матриця, обернена до ермітової над тілом // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2002. – Вип. 4. – С. 120–125.
8. *Понизовский И. С.* Об определителе матриц с элементами из некоторого кольца // Мат. сб. – 1958. – **45** (**87**), № 1. – С. 3–16.
9. *Aslaksen H.* Quaternionic determinants // Math. Intell. – 1996. – **18** (3). – P. 57–65.
10. *Chen L.* Definition of determinant and Cramer solutions over quaternion field // Acta Math. Sinica (New. Ser.). – 1991. – **7.** – P. 171–180.
11. *Chen L.* Inverse matrix and properties of double determinant over quaternion field // Science China. Ser. A. – 1991. – **34.** – P. 528–540.
12. *Cohen N., De Leo S.* The quaternionic determinant // Electronic J. Linear Algebra. – 2000. – **7.** – P. 100–111.
13. *Dyson F. J.* Quaternion determinants // Helvetica Phys. Acta. – 1972. – **45**. – P. 289–302.

АНАЛОГ КЛАССИЧЕСКОЙ ПРИСОЕДИНЁННОЙ МАТРИЦЫ НАД ТЕЛОМ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

На основании свойств столбцевого и строчного определителей квадратных матриц над телом с инволюцией вводится понятие двойного определителя и исследуются его свойства. Установлено необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы и получено её аналитическое представление через аналог классической присоединенной.

ANALOGUE OF ADJOINT MATRIX OVER SKEW FIELD WITH INVOLUTION

From the properties of column's and row's determinants of square matrices over a skew field with involution, double determinant is introduced and its properties are investigated. The necessary and sufficient existence conditions of inverse matrix and its analytical representation by the analogue of adjoint one have been obtained.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.09.02