УДК 539.30: 512.972

І. Б. Прокопович

ПРО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ЗА ЗВ'ЯЗАНИМ ТЕНЗОРНИМ АРГУМЕНТОМ

Розглянуто задачу прямого, безкомпонентного диференціювання тензорних функцій довільного рангу, що залежать від тензора другого рангу, не всі компоненти якого є незалежними або змінними, тобто зв'язаного тензора. Означення похідної за тензорним аргументом узагальнено на випадок зв'язаного аргументу. Відповідно до цього узагальнення означено власну похідну зв'язаного тензора, за допомогою якої похідна за зв'язаним аргументом виражається через похідну за ним же як незв'язаним. Встановлено властивості власних похідних і деякі підходи до їх визначення. Побудовано вирази для власних похідних зв'язаних тензорів, що застосовуються в нелінійній механіці деформування.

У нелінійній (загальній) механіці деформування, зокрема в нелінійній теорії пружності, поруч з традиційним, найбільш поширеним, компонентним (індексним) записом тензорних формул використовують прямий (безпосередній) запис, що дозволяє обійтися без нагромаджень індексних «дерев», за якими вельми важко розгледіти тензорний «ліс». Аналіз відповідної літератури дозволяє зробити висновок про три рівні застосування прямого запису. Перший, найбільш простий − використання прямих тензорних позначень задля стислості та наочності формул, без застосування їх у викладках. Другий рівень − застосування у межах тензорної алгебри. І, нарешті, третій рівень − у диференціюванні функції тензорного аргументу, що істотно спрощує теоретичне дослідження рівнянь стану деформівних матеріалів (за іншою термінологією − визначальних рівнянь матеріалів або й просто − рівнянь матеріалів). Відразу ж треба зазначити, що диференціювання функцій тензорного аргументу не є частиною класичного тензорного аналізу. Останній правильно б назвати аналізом тензорного поля (просторового розподілу тензора), тому що його предмет − зв'язок між значеннями одного й того ж тензора в різних точках. А функція тензорного аргументу описує зв'язок між різними тензорними величинами в одній і тій самій точці.

Вказані рівні наочно відображають проблеми впровадження прямої тензорної математики в прикладні дослідження. Так, перехід від першого рівня до другого неможливий без зручної системи позначень алгебричних тензорних операцій (власне кажучи − системи). Тут природне і досить поширене застосування традиційних позначень операцій матричної алгебри спільно з позначеннями векторної алгебри не дає бажаного результату. Навпаки, відмова від формальної аналогії між матрицею і тензором (адже тензор − це не матриця) і його означення як лінійної комбінації векторних поліад (тензор − це полівектор, багатократний вектор) автоматично зводить тензорні алгебричні операції до багатократних векторних операцій і таким чином вирішує проблему зручної системи їх позначень. У свою чергу, без належного розвитку тензорної алгебри є неможливим перехід на третій рівень.

Очевидно, первинна і загалом вичерпна розробка теорії диференціювання функцій від тензорного аргументу другого рангу з метою її застосування у загальній теорії пружності належить А. І. Лур'є [1, 2]. Однак у ній не враховано особливостей, зумовлених зв'язаними тензорами, зокрема механічними, як от − симетричний і кососиметричний тензори, кульовий тензор і девіатор, ортогональний тензор (тензор повороту). Заповнення цієї прогалини пропонується нижче.

Загальне означення похідної за тензорним аргументом. Нехай

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{P})$$

– тензорна функція $\mathbf{F}$ від тензорного аргументу $\mathbf{P}$. Функцію $\mathbf{F}$ вважатимемо тензором довільного рангу, зокрема – нульового (скаляр) і першого (вектор), а її аргумент $\mathbf{P}$ – тензором другого рангу. Виходитимемо з означення похідної, прийнятого в роботі [2] (можливі формально різні означення, рівні між собою з точністю до певного транспонування). А саме, такою похідною функції $\mathbf{F}$ приймається тензор $\mathbf{F}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{P})$, двократна згортка якого з транспонованим приростом тензора $\mathbf{P}$ дорівнює приросту тензора $\mathbf{F}$:

$$d\mathbf{F}(\mathbf{P}) = \mathbf{F}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{P}) : d\mathbf{P}^{\top}. \tag{1}$$

Тут двокрапка означає двократну згортку тензорів (подвійний скалярний добуток), верхній індекс «$\top$» – символ операції транспонування; $d\mathbf{F}$, $d\mathbf{P}$ – прирости (нескінченно малі) відповідно тензорів $\mathbf{F}$ і $\mathbf{P}$. Зазначимо також, що ранг похідної дорівнює сумі рангів функції та аргументу.

Вказане означення потребує уточнення, якщо аргумент функції $\mathbf{F}$ є не довільним, а зв'язаним тензором $\mathbf{Q}$, значення якого підлягають певній в'язі:

$$\mathbf{U}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{U}(\mathbf{P}) \neq \mathbf{0}, \tag{2}$$

де $\mathbf{U}$ – тензор, ранг якого може бути довільним.

Оскільки

$$d\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{F}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) : d\mathbf{Q}^{\top}, \tag{3}$$

то згідно з означенням (1) тензор $\mathbf{F}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q})$ – похідна від функції зв'язаного тензорного аргументу. Але приріст тензора $\mathbf{Q}$ є не довільним тензором, а зв'язаним і підлягає диференціальній в'язі, що випливає з умови (2):

$$d\mathbf{U}(\mathbf{Q}) = \mathbf{U}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) : d\mathbf{Q}^{\top} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{U}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) \neq \mathbf{0}. \tag{4}$$

Тому рівність (3) задовольняє довільний тензор

$$\hat{\mathbf{F}}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{F}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) + \mathbf{C} * \mathbf{U}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q}),$$

де $\mathbf{C}$ – довільний сталий тензор; символом «$*$» позначено тензорний добуток (зовнішній (декартовий), векторний чи скалярний відповідної кратності) такий, що ранг $\mathbf{F}$ дорівнює рангу $\mathbf{C} * \mathbf{U}$.

Таким чином, рівність (1) не означує похідну в разі зв'язаного тензорного аргументу, а тому не є придатною як загальне означення похідної. Ця проблема вирішується просто, якщо звернутися до правила компонентного обчислення такої похідної [2]. Воно не допускає неоднозначності в її означенні. Тому й тензорне означення також повинне бути однозначним. Це можливе лише тоді, коли похідною вважати тензор, що задовольняє рівняння (1) за довільного незв'язаного приросту $\delta\mathbf{Q}$ аргументу $\mathbf{Q}$:

$$d\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{F}_{,\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}) : \delta\mathbf{Q}^{\top}. \tag{5}$$

Таке означення є загальним, оскільки стосується й незв'язаного тензорного аргументу як виродженого випадку зв'язаного, коли функція в'язі (2) тотожно дорівнює нулеві. Тоді дійсний приріст є довільним:

$$\mathbf{U}(\mathbf{P}) \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{U}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{P}) \equiv \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{P} \equiv \delta\mathbf{P}. \tag{6}$$

Власна похідна тензора. Тензорну функцію, що визначає дійсний приріст тензора через його довільний приріст, називатимемо власною похідною тензора:

$$d\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{,\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}) : \delta\mathbf{Q}^{\top} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{Q}_{,\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}) \equiv \mathbf{Q}'(\mathbf{Q}). \tag{7}$$

Для незв'язаного тензора власна похідна дорівнює ізотропному тензору четвертого рангу [2]:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{I}_2 , \tag{8}$$

що транспонує довільний тензор другого рангу за двократної згортки:

$$\mathbf{P}^{\top} = \mathbf{I}_2 : \mathbf{P} = \mathbf{P} : \mathbf{I}_2 . \tag{9}$$

Тому тензор $\mathbf{I}_2$ природно назвати інвертором (четвертого рангу). (Тут варто зазначити, що поняття тензора-інвертора легко узагальнюється й на вищі парні ранги, а застосування таких тензорів дозволяє не вдаватися до індексного запису операції перестановки індексів у тензорах довільного рангу (зокрема, операції транспонування) і, таким чином, усуває істотний недолік прямої тензорної алгебри). В іншому крайньому випадку, коли тензор $\mathbf{Q}$ є сталим (такий тензор можна назвати повністю зв'язаним), то його власна похідна тотожно дорівнює нулеві (четвертого рангу).

Власна похідна пов'язує похідну за зв'язаним аргументом через необумовлену похідну, отриману в припущенні, що аргумент не є зв'язаним:

$$\mathbf{F}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) : \mathbf{I}_2 : \mathbf{Q}' : \delta\mathbf{P}^{\top} = \mathbf{F}_{,\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}) : \delta\mathbf{P}^{\top} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{F}_{,\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{F}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) : \mathbf{I}_2 : \mathbf{Q}' . \tag{10}$$

Якщо $\mathbf{F}$ – теж зв'язаний тензор другого рангу, то

$$\mathbf{F}_{,\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{F}' : \mathbf{I}_2 : \mathbf{F}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) : \mathbf{I}_2 : \mathbf{Q}' , \tag{11}$$

де похідна $\mathbf{F}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q})$ визначається без урахування в'язей, накладених як на значення функції, так і на значення аргументу.

З рівності (4) і означення власної похідної випливає умова, якій підлягає власна похідна:

$$\mathbf{U}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) : \mathbf{I}_2 : \mathbf{Q}' = \mathbf{U}_{,\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}) \equiv \mathbf{0} . \tag{12}$$

Враховуючи, що

$$d\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{,\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}) : d\mathbf{Q}^{\top} ,$$

і виражаючи тут дійсний приріст через довільний за рівністю (7), отримаємо ще одну умову, загальну для всіх власних похідних:

$$\mathbf{Q}' : \mathbf{I}_2 : \mathbf{Q}' = \mathbf{Q}' \qquad \Rightarrow \qquad (\mathbf{Q}' : \mathbf{I}_2) : (\mathbf{Q}' : \mathbf{I}_2) = \mathbf{Q}' : \mathbf{I}_2 . \tag{13}$$

Як бачимо, власна похідна з точністю до транспонування є одиничним тензором четвертого рангу для самої себе. Тому умову (13) природно назвати нормувальною.

Визначальне подання зв'язаного тензора та його в'язі. Формули (10) і (11) складають апарат побудови похідних за зв'язаним тензорним аргументом із застосуванням поняття власної похідної зв'язаного тензора. Але загалом, умови (12), (13) не визначають однозначно власну похідну тензора, а навіть якщо визначають, то не вказують явно. Побудова власної похідної істотно спрощується, якщо вдається виразити зв'язаний тензор через довільний так, що

$$\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}), \qquad \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}) \equiv \mathbf{Q} . \tag{14}$$

Функцію (14) природно назвати визначальним поданням зв'язаного тензора.

З тотожності (14) маємо, що

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \qquad \Rightarrow \qquad d\mathbf{P} = \delta\mathbf{Q} . \tag{15}$$

Тому

$$\mathbf{Q}' = \tilde{\mathbf{Q}}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q}). \qquad (16)$$

З підстановкою функції (14) (як і будь-якої іншої функції, що виражає зв'язаний тензор через незв'язаний) у в'язь (2) вона за формулою (6) перетворюється в тотожність

$$\mathbf{U}(\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{P})) \equiv \mathbf{0}\,.$$

А така ж підстановка у функцію $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ приводить до залежної від незв'язаного тензора функції

$$\mathbf{G}(\mathbf{P}) = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}))\,,$$

яка з огляду на рівність (15) породжує шукану похідну від функції $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$:

$$\mathbf{F}_{,\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{G}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q})\,.$$

За допомогою визначального подання зв'язаного тензора отримуємо відповідну визначальну в'язь:

$$\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{P}) = \mathbf{P} - \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}) \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}\,. \qquad (17)$$

Ранг цієї в'язі дорівнює рангу зв'язаного тензора. Відповідну диференціальну в'язь отримуємо шляхом диференціювання рівності (17):

$$d\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{Q}) = \tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) : d\mathbf{Q}^{\top} = \mathbf{0}\,.$$

Зі співвідношень (16) і (17) випливає формула зв'язку між власною похідною зв'язаного тензора і його визначальною диференціальною в'яззю:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}'\,. \qquad (18)$$

Звідси, у свою чергу, випливає, що похідна від визначальної в'язі теж підлягає нормувальній умові (13):

$$\tilde{\mathbf{U}}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) : \mathbf{I}_2 : \tilde{\mathbf{U}}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = \tilde{\mathbf{U}}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q})\,. \qquad (19)$$

Таким чином, власну похідну можна побудувати, виходячи з визначального подання зв'язаного тензора або його в'язі.

Власні похідні від деяких зв'язаних тензорів. Тепер застосуємо отримані співвідношення до побудови власних похідних від відомих у механіці суцільного середовища зв'язаних тензорів другого рангу.

Визначальними поданнями симетричного, кососиметричного (антисиметричного), кульового тензорів і девіатора слугують відомі означення відповідних частин довільного тензора другого рангу [2]:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\top} \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}) = \frac{1}{2}(\mathbf{P} + \mathbf{P}^{\top}) = \frac{1}{2}(\mathbf{J}_2 + \mathbf{I}_2) : \mathbf{P}\,, \qquad (20)$$

$$\mathbf{Q} = -\,\mathbf{Q}^{\top} \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}) = \frac{1}{2}(\mathbf{P} - \mathbf{P}^{\top}) = \frac{1}{2}(\mathbf{J}_2 - \mathbf{I}_2) : \mathbf{P}\,, \qquad (21)$$

$$\mathbf{Q} = q\mathbf{I} \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}) = \frac{1}{3}\mathbf{I}\mathbf{I} : \mathbf{P}\,, \qquad (22)$$

$$\mathbf{I} : \mathbf{Q} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}) = \mathbf{P} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\mathbf{I} : \mathbf{P} = \left(\mathbf{J}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{I}\mathbf{I}\right) : \mathbf{P}\,. \qquad (23)$$

Тут q − скалярна змінна, $\mathbf{I}$ − одиничний тензор другого рангу (тензор четвертого рангу $\mathbf{I}\mathbf{I}$, що дорівнює зовнішньому (декартовому) добутку двох одиничних тензорів другого рангу, є теж ізотропним тензором [2]), а

$$\mathbf{J}_2 = \mathbf{I}_2 : \mathbf{I}_2 \qquad (24)$$

− ще один ізотропний тензор четвертого рангу [2]. Його природно назвати одиницею четвертого рангу, оскільки двократна згортка з ним будь-якого тензора (не нижче другого рангу) не змінює останнього. (Принагідно зазначимо, що одиничний тензор $\mathbf{I}$ другого рангу одночасно є інвертором, оскільки інверсія (транспонування) векторів не змінює їх. А звичайна одиниця є одночасно інвертором нульового рангу).

Зі співвідношень (20)−(23) вочевидь (з урахуванням рівності (8) і очевидних властивостей ізотропних тензорів, що визначаються співвідношеннями (9) і (24)) випливають вирази для відповідних власних похідних:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\top} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{Q}' = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_2 + \mathbf{J}_2)\,, \tag{25}$$

$$\mathbf{Q} = -\,\mathbf{Q}^{\top} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{Q}' = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{J}_2)\,, \tag{26}$$

$$\mathbf{Q} = q\mathbf{I} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{Q}' = \frac{1}{3}\mathbf{I}\mathbf{I}\,, \tag{27}$$

$$\mathbf{I} : \mathbf{Q} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{Q}' = \mathbf{I}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{I}\mathbf{I}\,. \tag{28}$$

Вираз для власної похідної симетричного тензора (25) наведено в монографії [2] як такий, що вочевидь отримується шляхом компонентного диференціювання.

Наступний приклад більш цікавий, бо показує, що власна похідна не завжди є сталою. Так, для тензора з одиничним третім (кубічним) інваріантом − детермінантом матриці компонент тензора, маємо таке очевидне визначальне подання:

$$\det \mathbf{Q} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}) = (\det \mathbf{P})^{-1}\,\mathbf{P}\,.$$

Враховуючи формулу для похідної від вказаного детермінанта невиродженого тензора [2]

$$\frac{d \det \mathbf{P}}{d\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{-1} \det \mathbf{P}\,,$$

після нескладних перетворень отримаємо шуканий вираз для власної похідної:

$$\det \mathbf{Q} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}' = \left(\mathbf{J}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} \right) : \mathbf{I}_2 =$$

$$= \left[\mathbf{Q} \cdot \left(\mathbf{J}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{I}\mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{Q}^{-1} \right] : \mathbf{I}_2\,.$$

І, нарешті, останній приклад − ортогональний тензор (що є окремим випадком попереднього). Визначальне подання цього тензора записується за допомогою функції, яку можна назвати коренем квадратним тензора [2]:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{\top} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}) = \mathbf{P} \cdot \left(\sqrt{\mathbf{P}^{\top} \cdot \mathbf{P}} \right)^{-1},$$

де тензор $\mathbf{P}$ – невироджений. Але оскільки побудувати похідну від кореня квадратного тензора складно, то зручніше встановити диференціальну визначальну в'язь ортогонального тензора, виходячи з в'язі відповідного (тут − другого) рангу. Такою є умова, записана вище зліва від знаку імплікації:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{\top} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}(\mathbf{P}) = \mathbf{P} - (\mathbf{P}^{\top})^{-1}.$$

Диференціюючи її з урахуванням виразу для похідної від тензора, оберненого до невиродженого [2],

$$\frac{d\mathbf{P}^{-1}}{d\mathbf{P}} = -\,(\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{I}_2) : (\mathbf{P}^{\top})^{-1},$$

за допомогою нормувальної умови (19) отримаємо шуканий вираз для визначальної диференціальної в'язі:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{\top} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{U}}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2}\mathbf{U}_{,\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{J}_2 + \mathbf{Q}\cdot\mathbf{I}_2\cdot\mathbf{Q}^{-1}) : \mathbf{I}_2 = \frac{1}{2}\left[\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{J}_2 + \mathbf{I}_2)\cdot\mathbf{Q}^{-1}\right] : \mathbf{I}_2 .$$

І вже звідси отримуємо за формулою (18) власну похідну ортогонального тензора

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{\top} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}' = \frac{1}{2}\left(\mathbf{J}_2 - \mathbf{Q}\cdot\mathbf{I}_2\cdot\mathbf{Q}^{-1}\right) : \mathbf{I}_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{J}_2 - \mathbf{I}_2)\cdot\mathbf{Q}^{-1}\right] : \mathbf{I}_2 .$$

На завершення зазначимо, що можна достатньо очевидним шляхом поширити наведену техніку тензорного диференціювання на аргументи іншого рангу (відмінного від другого) і на випадок декількох в'язей, накладених на аргумент.

1. *Лурье А. И.* Дифференцирование по тензорному аргументу // Вопросы мат. физики. – Л.: Наука, 1976. – С. 48–57.
2. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.

О ДИФФЕРЕНЦИИРОВАНИИ ПО СВЯЗАННОМУ ТЕНЗОРНОМУ АРГУМЕНТУ

Рассмотрена задача прямого, безкомпонентного дифференцирования тензорных функций произвольного ранга, зависящих от тензора второго ранга, не все компоненты которого являются независимыми или переменными, т.е. связанного тензора. Понятие производной по тензорному аргументу обобщено на случай связанного аргумента. Согласно этому обобщению определено понятие собственной производной связанного тензора, при помощи которой производная по связанному аргументу выражается через производную по нему же как несвязанному. Установлены свойства собственных производных и некоторые подходы к их определению. Построены выражения для собственных производных связанных тензоров, употребляемых в нелинейной механике деформирования.

ON DIFFERENTIATION WITH RESPECT TO BOUND TENSOR ARGUMENT

The problem of direct (component-free) differentiation for any rank tensor functions, depending on the second rank tensor, some components of which are not independent or variable, is studied. The tensor argument derivative definition is generalized on the bound argument. Accordingly, the bound tensor own derivative, which is the method to express the bound tensor derivative if it is the unbound one, is determined. The own derivative properties and some approaches to their determination are established. The expressions of own derivative for bound tensors, most used in nonlinear mechanics of deformable solids, are constructed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.11.02