

А. Я. Бомба, Д. О. Пригорницький

НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ ОБЕРНЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ У БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ З ПОТЕНЦІАЛОМ КЕРУВАННЯ

Розроблено новий алгоритм чисельного розв'язування обернених нелінійних крайових задач на конформні відображення з потенціалом керування у тризв'язних областях, обмежених еквіпотенціальними лініями, за умови мінімуму внутрішнього перетоку.

Вступ. У роботах [1–8] для побудови динамічної сітки та поля швидкості із паралельним розрахунком інших характеристик (витрат, перетоків тощо) квазіпотенційних полів широко використовувався метод обернених крайових задач (конформних і квазіконформних відображень). Так, у роботах [2, 3] розглянуто модельну задачу про знаходження гармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (потенціалу) у тризв'язній криволінійній області G_z ($z = x + iy$), обмеженій трьома замкненими гладкими опуклими контурами: $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ (внутрішнім), $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ (зовнішнім), $L_0 = \{z : f_0(x, y) = 0\}$ (внутрішнім, що є носієм керуючого потенціалу), за таких умов: $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $\varphi|_{L_0} = \varphi_0$, де φ_0 – потенціал керування. Шляхом введення гармонічної функції $\psi = \psi(x, y)$ (функції течії), комплексно спряженої до $\varphi = \varphi(x, y)$, ця задача зведена до більш загальної задачі на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ області G_z із невідомими розрізами вздовж ліній розділу течії на відповідну область комплексного потенціалу G_ω або на обернене конформне відображення $G_\omega \rightarrow G_z$ при відповідності кутових точок із паралельним знаходженням невідомих параметрів (витрат-перетоків). Особливістю розв'язання такого типу задач у загальному (на відміну від задач із заданим значенням параметра φ_0) є те, що залежно від значень параметра φ_0 область комплексного потенціалу $G_\omega = G_\omega(\varphi_0)$ будується неоднозначно, й, поряд із побудовою алгоритму чисельного розв'язання відповідної нелінійної оберненої задачі в кожному з конкретних випадків, виникає проблема безпосереднього переходу до оберненої задачі, адже невідомо, яку із конфігурацій області G_ω слід вибирати. У роботі [2] розв'язано проблему обернення крайових задач на конформні відображення для тризв'язних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями з керуванням на внутрішньому контурі, в загальному: побудовано «алгоритм вибору» залежно від значень потенціалу керування φ_0 ($-\infty < \varphi_0 < +\infty$).

У пропонованій роботі сформульовано задачу побудови та реалізації алгоритму розв'язання такого типу задач за умов мінімуму перетоку від контуру L_* до L_0 і відсутності перетоку від контуру L_0 до L^* .

Загальна постановка задачі. Розглянемо в деякій тризв'язній криволінійній області G_z , $z = x + iy$, обмеженій замкненими гладкими контурами $L_* = \{x + iy : x = x_*(t), y = y_*(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, $L^* = \{x + iy : x = x^*(t), y = y^*(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, $L_0 = \{x + iy : x = x_0(t), y = y_0(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, процес

руху частинок (зокрема, фільтрації у пористому пласті, руху заряджених частинок у провідній пластинці та ін.), який описується за допомогою рівняння руху $\mathbf{v} = \alpha \text{grad } \varphi$ (закон Дарсі чи закон Ома) та рівняння нерозрив-

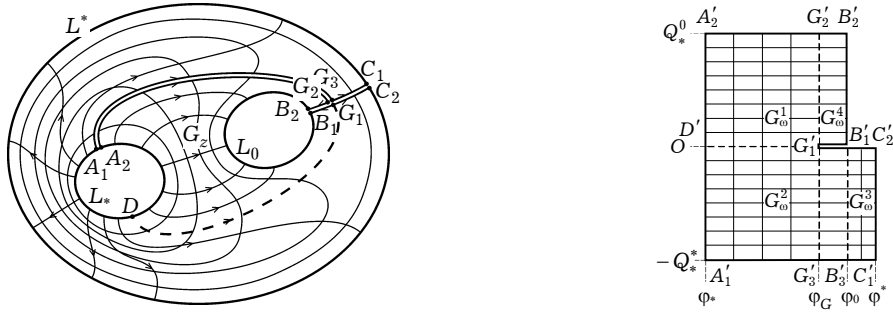


Рис. 1

ності $\text{div } \mathbf{v} = 0$, де $\mathbf{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$ – швидкість руху частинок; $\alpha = 1$ – коефіцієнт провідності (фільтрації тощо); $\varphi = \varphi(x, y)$ – потенціал поля ($\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $\varphi|_{L_0} = \varphi_0$, $-\infty < \varphi_* < \varphi_0 < \varphi^* < +\infty$) у випадку відсутності перетоку з L_0 в L^* (рис. 1). Значення потенціалу керування шукатимемо за умови мінімуму перетоку від L_* до L_0 (рис. 2).

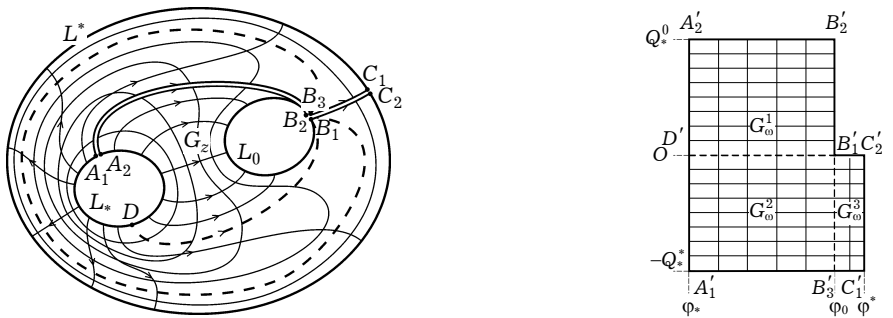


Рис. 2

Аналогічно, як у [1–6], увівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$ (комплексно-спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$), здійснивши умовні розрізи $AB = A_1B_3 = A_2B_2$ і $BC = B_3C_1 = B_1C_2$ вздовж відповідних ліній течії, що проходять через точку розділу потоків $B = B_1 = B_2 = B_3$ (рис. 2), отримуємо більш загальну задачу на конформне відображення $\omega = \omega(z)$ утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus (AB \cup BC)$ на відповідну область комплексного потенціалу $G_\omega = G_\omega^1 \cup G_\omega^2 \cup G_\omega^3 \cup D'B_1' \cup B_1'B_3'$ де $G_\omega^1 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi_0, 0 < \psi < Q_*^0\}$, $G_\omega^2 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi_0, -Q_*^* < \psi < 0\}$, $G_\omega^3 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_0 < \varphi < \varphi^*, -Q_*^* < \psi < 0\}$, $D'B_1' = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi_0, \psi = 0\}$, $B_1'B_3' = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi = \varphi_0, -Q_*^* < \psi < 0\}$ (тут D', B_i' – образи точок D, B_i), з невідомими витратами $Q_*^0 = \oint_{A_2D} -v_y dx + v_x dy$, $Q_*^* = \oint_{A_1D} -v_y dx + v_x dy$ та невідомим потенціалом керування φ_0 :

$$\begin{aligned} \varphi_x = \psi_y, \quad \varphi|_{A_1A_2} = \varphi_*, \quad \varphi|_{B_1B_2} = \varphi_0, \quad \varphi|_{C_1C_2} = \varphi^*, \\ \varphi_y = -\psi_x, \quad \psi|_{A_1C_1} = -\varphi_*^*, \quad \psi|_{DB_1} = 0, \quad \psi|_{A_2B_2} = \varphi_*^0. \end{aligned} \quad (1)$$

Аналогічно, як у [1–4], відповідну їй неповну обернену крайову задачу на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + i y(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^0 і рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин функції течії $z = z(\omega)$ запишемо у вигляді

$$x_\varphi = y_\psi, \quad x_\psi = -y_\varphi, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad -\varphi_*^* \leq \psi \leq \varphi_*^0, \\ f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad -\varphi_*^* \leq \psi \leq 0, \\ f_0(x(\varphi_0, \psi), y(\varphi_0, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq \varphi_*^0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x(\varphi, -\varphi_*^*) = x(\varphi, \varphi_*^0), \quad y(\varphi, -\varphi_*^*) = y(\varphi, \varphi_*^0), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_0, \\ x(\varphi, -\varphi_*^*) = x(\varphi, 0), \quad y(\varphi, -\varphi_*^*) = y(\varphi, 0), \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ \Delta x = 0, \quad \Delta y = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Зауважимо, що цю задачу далі доповнюватимемо ще й вимогами виконання рівнянь Лапласа для функцій $x(\varphi, \psi)$, $y(\varphi, \psi)$ на обидвох образах «берегів» лінії розділу перетоків ABC для врахування її «роздвоєння» при переході від області G_z до G_ω .

Алгоритм чисельного розв'язування сформульованої задачі. Різнице-ві аналоги рівнянь (4), умов (3) та додаткових умов для граничних і приграничних вузлів у сітковій області $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j)\}$, де

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi_1, & i = \overline{0, n_1 - 1}, \\ \varphi_0 + (i - n_1) \cdot \Delta\varphi_2, & i = \overline{n_1, n}, \end{cases}$$

$$\psi_j = \begin{cases} -\varphi_*^* + j \cdot \Delta\psi_1, & j = \overline{0, m_1 - 1}, \\ (j - m_1) \cdot \Delta\psi_2, & j = \overline{m_1, m}, \end{cases}$$

$$\Delta\varphi_1 = (\varphi_0 - \varphi_*) / n_1, \quad \Delta\varphi_2 = (\varphi^* - \varphi_0) / n_2,$$

$$\Delta\psi_1 = \varphi_*^* / m_1, \quad \Delta\psi_2 = \varphi_*^0 / m_2,$$

$$n = n_1 + n_2, \quad m = m_1 + m_2, \quad n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N},$$

запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= x(\varphi_i, \psi_j) = \\ &= \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} x_{i-1,j} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} x_{i+1,j} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} x_{i,j-1} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} x_{i,j+1} \right), \\ y_{i,j} &= y(\varphi_i, \psi_j) = \\ &= \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} y_{i-1,j} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} y_{i+1,j} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} y_{i,j-1} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} y_{i,j+1} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Delta\varphi = (\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+)/2, \quad \Delta\psi = (\Delta\psi_- + \Delta\psi_+)/2,$$

$$\alpha = 2\Delta\varphi\Delta\psi\left(\Delta\varphi_-^{-1}\Delta\varphi_+^{-1} + \Delta\psi_-^{-1}\Delta\psi_+^{-1}\right),$$

де значення $\Delta\varphi_-$, $\Delta\varphi_+$, $\Delta\psi_-$, $\Delta\psi_+$ вибираються з табл. 1 залежно від належності вузла (φ_i, ψ_j) тій чи іншій підобласті $G_\omega^{\ell\gamma}$ сіткової області G_ω^γ ;

$$\begin{aligned} f_0(x_{n_1,j}, y_{n_1,j}) &= 0, & j &= \overline{m_1, m}, \\ f_*(x_{0,j}, y_{0,j}) &= 0, & j &= \overline{0, m}, & f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) &= 0, & j &= \overline{0, m_1}, \\ x_{i,0} &= x_{i,m}, & y_{i,0} &= y_{i,m}, & i &= \overline{0, n_1}, \\ x_{i,0} &= x_{i,m_1}, & y_{i,0} &= y_{i,m_1}, & i &= \overline{n_1, n}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f^*(x_{n,j}, y_{n,j})}{\partial y} (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j}) - \\ &\quad - \frac{\partial f^*(x_{n,j}, y_{n,j})}{\partial x} (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) = 0, & j &= \overline{0, m_1}, \\ &\frac{\partial f_*(x_{0,j}, y_{0,j})}{\partial y} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j}) - \\ &\quad - \frac{\partial f_*(x_{0,j}, y_{0,j})}{\partial x} (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) = 0, & j &= \overline{0, m}, \\ &\frac{\partial f_0(x_{n_1,j}, y_{n_1,j})}{\partial y} (3x_{n_1,j} + x_{n_1-2,j} - 4x_{n_1-1,j}) - \\ &\quad - \frac{\partial f_0(x_{n_1,j}, y_{n_1,j})}{\partial x} (3y_{n_1,j} + y_{n_1-2,j} - 4y_{n_1-1,j}) = 0, \\ & & j &= \overline{m_1 + 1, m - 1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Таблиця 1

$G_\omega^{\ell\gamma} / L_\ell$	i_0	j_0	n_0	m_0	m_-	$\Delta\varphi_-$	$\Delta\varphi_+$	$\Delta\psi_-$	$\Delta\psi_+$
$G_\omega^{1\gamma}$	0	m_1	n_1	m_2	0	$\Delta\varphi_1$		$\Delta\psi_2$	
$G_\omega^{2\gamma}$	0	0	n_1	m_1	0	$\Delta\varphi_1$		$\Delta\psi_1$	
$G_\omega^{3\gamma}$	n_1	0	n_2	$m_1 + 1$	m_1	$\Delta\varphi_2$		$\Delta\psi_1$	
$D'B'_1$	0	$m_1 - 1$	n_1	2	0	$\Delta\varphi_1$		$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_2$
$B'_1B'_3$	$n_1 - 1$	0	2	m_1	0	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_1$	
$A'_2B'_2$	0	$m - 1$	n_1	2	m	$\Delta\varphi_1$		$\Delta\psi_2$	$\Delta\psi_1$

Формули для знаходження невідомих величин Q_*^0 , Q_*^* і φ_0 одержуємо на підставі умов «конформної подібності» елементарних сіткових чотирикутників [1-4] двох областей:

$$\begin{aligned} Q_*^* &= m_1 \Delta \Psi_1, & Q_*^0 &= m_2 \Delta \Psi_2, & \varphi_0 &= \varphi_* + n_1 \Delta \varphi_1, \\ \Delta \Psi_1 &= \gamma_2 \Delta \varphi_1, & \Delta \Psi_2 &= \gamma_1 \Delta \varphi_1, & \Delta \varphi_1 &= \gamma_3 (\varphi_*^* - \varphi_*) / (n_2 \gamma_2 + n_1 \gamma_3), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\gamma_\ell = \frac{1}{n_0 m_0} \sum_{i=i_0^\ell}^{i_0^\ell + n_0^\ell - 1} \sum_{j=j_0^\ell}^{j_0^\ell + m_0^\ell - 1} \gamma_{i,j},$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}}{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}},$$

де $\ell = \overline{1, 3}$, а компоненти вектора $(i_0^\ell, j_0^\ell, n_0^\ell, m_0^\ell)$ вибираються зі стовпців 2–5 відповідного підобласті $G_\omega^{\ell\gamma}$ рядка табл. 1.

Задавши кількість вузлів n_1, n_2, m_1, m_2 розбиття області G_ω , параметри $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, що характеризують точність роботи алгоритму розв'язування відповідної (2), (3) різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)}, x_{n,j}^{(0)}, y_{n,j}^{(0)}$ (так, щоб виконувались умови (6)) та початкові наближення координат всіх внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, визначаємо за формулою (8) початкові наближення величин Q_*^0, Q_*^* і φ_0 . Далі уточнюємо координати внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ із заданою точністю ε_1 (де k – номер загальної ітерації) за допомогою ітераційних схем (9) типу «хрест» у кожній із підобластей $G_\omega^{\ell\gamma}$ при $i = \overline{i_0 + 1, i_0 + n_0 - 1}, j = \overline{j_0 + 1, j_0 + m_0 - 1}$ (див. табл. 1):

$$\begin{aligned} x_{i,j}^{(k)} &= \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta \varphi}{\Delta \Psi_-} x_{i-1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta \varphi}{\Delta \Psi_+} x_{i+1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta \Psi}{\Delta \varphi_-} x_{i,j-1}^{(k-1)} + \frac{\Delta \Psi}{\Delta \varphi_+} x_{i,\{j+1\}}^{(k-1)} \right), \\ y_{i,j}^{(k)} &= \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta \varphi}{\Delta \Psi_-} y_{i-1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta \varphi}{\Delta \Psi_+} y_{i+1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta \Psi}{\Delta \varphi_-} y_{i,j-1}^{(k-1)} + \frac{\Delta \Psi}{\Delta \varphi_+} y_{i,\{j+1\}}^{(k-1)} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Delta \varphi = (\Delta \varphi_- + \Delta \varphi_+) / 2, \quad \Delta \Psi = (\Delta \Psi_- + \Delta \Psi_+) / 2,$$

$$\alpha = 2 \Delta \varphi \Delta \Psi \left(\Delta \varphi_-^{-1} \Delta \varphi_+^{-1} + \Delta \Psi_-^{-1} \Delta \Psi_+^{-1} \right),$$

де $\{j\} = \begin{cases} j, & j \neq j + m_0, \\ j - m_-, & j = j + m_0, \end{cases}$ m_- – параметр корекції індексів, уведений

для врахування «роздвоєння» лінії розділу перетоків ABC при переході від області G_z до G_ω .

Після цього, як і в [4], «підправляємо» граничні вузли, розв'язуючи наближено систему рівнянь (7), наприклад, методом Ньютона. Якщо величина зміщення граничних вузлів за проведену k -ту загальну ітерацію

$$S = \max_{i,j} \sqrt{\left(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)} \right)^2 + \left(y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)} \right)^2} \quad (\text{тут } (i, j) \text{ – індекси координат}$$

граничних вузлів) є більшою, ніж ε_2 , то повертаємось до уточнення внут-

рішніх вузлів. В іншому випадку знаходимо нові наближення величин Q_*^0 , Q_*^* і φ_0 за формулами (8). Якщо найбільша зі змін за абсолютною величиною шуканих величин за останню проведену ітерацію є більшою, ніж ε_3 , то знову повертаємося до уточнення внутрішніх вузлів, у протилежному випадку – обчислюємо нев'язку $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ «конформності» отриманої сітки, де δ_1 , δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь (2) у G_ω :

$$\delta_1 = \max_{(i,j) \in G_\omega^\gamma} |\gamma_\ell(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|,$$

$$\delta_2 = \max_{(i,j) \in G_\omega^\gamma} |\gamma_\ell(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|.$$

Якщо потрібно підвищити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку δ), збільшуємо параметри розбиття області n_1 , n_2 , m_1 , m_2 і розв'язуємо задачу повторно (оптимальність співвідношення між ними досягається аналогічно, як [1–5], шляхом оптимізації відповідних функціоналів).

Як і в [1–4], обґрунтування побудованого алгоритму, що базується на почерговому «замороженні» шуканих параметра конформності, внутрішніх та граничних вузлів криволінійної області, проводиться з використанням ідей методу блочної ітерації [1–4, 10].

Якщо контури L_* та L^* не є еквіпотенціальними лініями (наприклад, коли $\varphi_*^* = \varphi_*^*(M)$, де M – біжуча точка відповідного контуру, $\varphi_*^*(M)$ – малозмінна неперервно диференційовна та періодична функція), безпосередньо скористатись перевагами запропонованого нами підходу не можна (відповідна область комплексного потенціалу не є канонічною). У цьому випадку можливим є комбінований підхід із використанням методу скінченних елементів і методу мажорантних областей Г. М. Положія [9, 11–12].

Програмна реалізація алгоритму та чисельні приклади. Описаний вище алгоритм чисельного розв'язування сформульованої задачі реалізований у вигляді програми для ПК IBM PC/AT. Для перевірки його коректності проведено серію чисельних експериментів на тестовому прикладі, коли

$$L_* = \{x + iy : x = x_*(t) = -2 + \cos t, \quad y = y_*(t) = \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi\},$$

$$L^* = \{x + iy : x = x^*(t) = 4 \cos t, \quad y = y^*(t) = 4 \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi\},$$

$$L_0 = \{x + iy : x = x_0(t) = 1 + \cos t, \quad y = y_0(t) = \sin t / 2, \quad 0 \leq t < 2\pi\},$$

$\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$. Основні результати розв'язання цієї задачі (значення потенціалу керування і перетоків) для різних значень n_1 наведено в табл. 2 (при цьому m_1 і m_2 вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до квадратної, $n_2 = 2$).

Отриману динамічну сітку у випадку $n_1 \times n_2 \times m_1 \times m_2 = 80 \times 2 \times 428 \times 96$ зображено на рис. 3, де пунктирною лінією виділено «застійну зону» (область великих нев'язок рівнянь Коші – Рімана в околі особливої точки $B = B_1 = B_2 = B_3 : \delta_{i,j} > \delta_* = 0.05$). Розподіл швидкості на найближчій до контуру $A_1 A_2$ еквіпотенціальній лінії зображено на рис. 4.

Таблиця 2

n_1	m_1	m_2	φ_0	Q_*^0	Q_*^*	δ
5	33	6	0.854	0.942	5.570	0.255
10	61	12	0.895	1.030	5.454	0.195
15	89	17	0.912	1.012	5.394	0.192
20	115	24	0.926	1.098	5.339	0.162
40	219	50	0.958	1.205	5.234	0.131
80	428	92	0.981	1.122	5.245	0.093

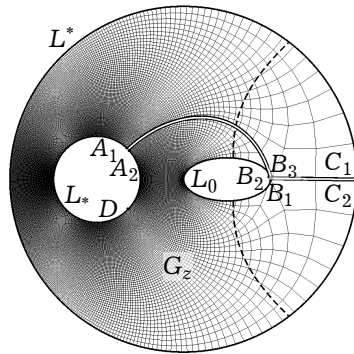


Рис.3

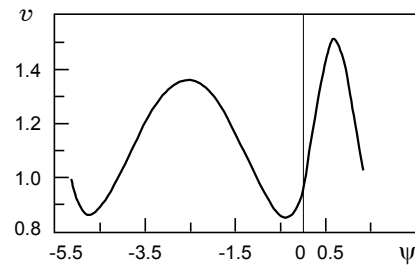


Рис.4

Висновки.

1. Розв'язок сформульованої задачі з керуванням зводиться до розв'язування відповідної виродженої (при $G_i \rightarrow B_i$, $i = 1, 3$) задачі на конформне відображення областей, зображених на рис. 2, що включає знаходження тих значень параметрів φ_0 , Q_*^0 , Q_*^* , які забезпечують його існування та єдиність.

2. Запропонований алгоритм є особливо ефективним у випадках, коли:

а) внутрішні контури L_* та L_0 є малими (наприклад, свердловини) і важко побудувати рівномірну динамічну сітку у фізичній області;

б) при вивченні різних процесів на такого типу ідеальних конвективних фонах, коли є сенс переходити від області G_z до відповідної області комплексного потенціалу.

У перспективі планується реалізація розробленого універсального алгоритму розв'язання такого типу модельних задач, що охоплює усі можливі варіанти формування течії залежно від значень потенціалу керування φ_0 ($-\infty < \varphi_0 < +\infty$), та його модифікація стосовно моделювання відповідних нелінійних процесів у неоднорідних та анізотропних середовищах з урахуванням взаємовпливу градієнтів напору та характеристик середовища.

1. Бомба А. Я., Кацтан С. С. Нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення з потенціалом керування // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – 45, № 3. – С. 69–76.
2. Бомба А. Я., Кацтан С. С. Нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення у многозв'язних областях з потенціалом керування // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2003. – Вип. 6. – С. 18–27.
3. Бомба А. Я., Кацтан С. С. Про нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення у многозв'язних областях // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2000. – Вип. 2. – С. 3–15.

4. Бомба А. Я., Пригорницький Д. О. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення в двозв'язних областях // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2001. – Вип. 3. – С. 188–195.
5. Власюк А. П., Михальчук В. Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трехсвязных областей. – Киев, 1991. – 56 с. – (Препр. / АН Украины. Ин-т математики, № 91.57).
6. Годунов С. К., Прокопов Г. П. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1967. – 7, № 5. – С. 1031–1059.
7. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. – М.: Наука, 1994. – 437 с.
8. Ильинский Н. Б., Поташев А. В., Таюрская Г. Р. Построение прямой однородной решетки профилей методом квазирешений обратных краевых задач // Изв. вузов. Авиац. техника. – 1989. – № 3. – С. 35–38.
9. Ляшко И. И., Великоованенко И. М., Лаврик В. И., Мистецкий Г. Е. Метод мажорантных областей в теории фильтрации. – Киев: Наук. думка, 1974. – 200 с.
10. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с.
11. Савула Я. Г., Шинкаренко Г. А., Вовк В. Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. – Львов: Ред.-изд. группа Львов. ун-та, 1981. – 88 с.
12. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.

**ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ОБРАТНЫХ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ
В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ С УПРАВЛЯЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ**

Разработан новый алгоритм численного решения обратных нелинейных краевых задач на конформные отображения с потенциалом управления в трехсвязных областях, ограниченных эквипотенциальными линиями, при условии минимума внутреннего перетока.

**APPROXIMATION OF SOLUTIONS TO ONE CLASS OF INVERSE
BOUNDARY-VALUE PROBLEMS ON CONFORMAL MAPPINGS
IN MULTIPLY CONNECTED AREAS WITH CONTROL POTENTIAL**

New algorithm for numerical solution of inverse nonlinear boundary-value problems on conformal mappings with control potential in triply-connected areas, bounded by equipotential lines, is developed under condition of minimum internal flow.

Рівн. держ. гуманіт. ун-т, Рівне

Одержано
28.03.03