

## УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ. I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

*В геометрически линейной постановке сформулирована задача квазистатического термоупругопластического изгиба слоистых пластин регулярной структуры. Механическое поведение изотропных слоев описывается соотношениями термоупругопластичности деформационного типа при учете их разносопротивляемости растяжению и сжатию. Линеаризованные определяющие соотношения слоистой среды получены с использованием метода переносных параметров упругости. Выведенные уравнения позволяют с разной степенью точности описывать напряженно-деформированное состояние таких пластин при учете их ослабленного сопротивления поперечным сдвигам. Из этих уравнений, как частные случаи, получаются соотношения традиционных неклассических теорий Рейсснера и Редди. В рамках построенных уточненных теорий и теории Редди удовлетворяются силовые граничные условия по касательным напряжениям на лицевых поверхностях. Граничные условия по нормальным напряжениям на этих поверхностях не выполняются. Изменяемость прогиба по толщине конструкции не учитывается. Трехмерные уравнения равновесия и граничные условия на торцевой поверхности пластины приводятся к двумерным соотношениям методом взвешенных невязок. В качестве весовых функций использованы однородные полиномы от поперечной координаты.*

**Ключевые слова:** слоистая композитная пластина, регулярная структура, термоупругопластичность деформационного типа, изгибаемая пластина, теория Рейсснера, теория Редди, уточненная теория изгиба.

В настоящее время в инженерной практике все более широко используются тонкостенные элементы типа пластин и оболочек, выполненные из композиционных материалов (КМ) [16, 25, 30], в том числе и слоистой структуры [24, 26, 36, 37]. В случае сильно выраженной анизотропии КМ при исследовании изгибного поведения линейно-упругих пластин необходимо учитывать их ослабленное сопротивление поперечному сдвигу [2, 3, 7, 13, 33, 38]. Однако в [20, 21] было продемонстрировано, что при упругопластическом изгибном деформировании слоистых пластин регулярной структуры также следует учитывать их ослабленное сопротивление поперечным сдвигам, даже если при линейно-упругом поведении КМ проявляет слабо выраженную анизотропию (например, является металлокомпозитным). Эта проблема осложняется, в частности, тем, что некоторые материалы фаз композиции (например, некоторые марки сталей) обладают слабой термочувствительностью в достаточно широком диапазоне изменения температур [5], а другие материалы (полимеры или сплавы легких металлов) весьма термочувствительны, причем, как правило, прочностные и жесткостные характеристики таких материалов резко ухудшаются при повышении температуры [5, 18]. Такая специфика поведения материалов слоев композиции при высоких температурах может привести к тому, что композитное изделие при интенсивном термосиловом нагружении поведет себя не так, как принято традиционно считать в условиях умеренных температур.

Исследования изгибного деформирования слоистых пластин в рамках классической теории, не учитывающей поперечные сдвиги в них, проводились, например, в [11, 39]. Ослабленное сопротивление КМ-пластин поперечному сдвигу обычно учитывают в рамках теории Рейсснера – Миндлина [7, 29, 34, 35] или второго варианта теории Тимошенко [2, 3, 13, 21] (или, согласно англоязычной литературе, теории Редди [31, 33]), а также в рамках

✉ lab4nemir@rambler.ru

теории Г. М. Куликова, основанной на гипотезе ломаной линии [10, 15], реже используются асимптотические методы расчета [14, 17]. В случае изгиба линейно-упругих КМ-пластин и оболочек в [2, 3] показано, что решения, полученные на базе теории Редди, не требуют дальнейшего уточнения, т. е. при этом не требуется привлечения теорий более высокого порядка точности [1, 27, 28, 31, 32, 36]. Однако открытым остается вопрос о том, являются ли достаточно точными с инженерной точки зрения решения, полученные в рамках теории Редди при упругопластическом или нелинейно-упругом изгибе слоистых пластин регулярной структуры, особенно при высоких температурах, или требуется их уточнение, в частности являются ли достаточно точными решения, полученные в [21]. Кроме того, интерес вызывает и точность теории Рейсснера в указанных случаях изгиба КМ-пластин, так как из всех неклассических теорий она наиболее часто используется в расчетной практике [1, 7, 13]. В работе [22] на примере слоистой балки-стенки регулярной структуры было показано, что уточнение соответствующих неклассических теорий действительно требуется, если балка имеет достаточно большую относительную высоту (порядка 1/7 и более). При этом следует учитывать, что в балках-стенках реализуется обобщенное плоское напряженное состояние, а в изгибаемых пластинах – сложное напряженно-деформированное состояние (НДС). Последнее может привести к специфическим особенностям деформирования таких тонкостенных элементов конструкций, которые не проявляются в балках-стенках. Кроме того, в [22] не учитывалось влияние теплового воздействия.

В связи с этим настоящее исследование посвящено построению уточненной модели изгиба слоистых пластин регулярной структуры, из которой как частные случаи вытекают классическая теория, теория Рейсснера и теория Редди, а также проведению сравнительного анализа решений, полученных на базе этих теорий и более точных соотношений как при термоупругом, так и термоупругопластическом деформировании изгибаемых пластин. Проведение этих исследований необходимо, в частности, для выяснения вопроса: позволяют ли современные конечные элементы, построенные на основе теории Рейсснера [1, 4] или Редди [23], адекватно рассчитывать механическое поведение слоистых элементов тонкостенных конструкций регулярной структуры?

### 1. Уточненная модель изгибного деформирования слоистой пластины регулярной структуры.

В прямоугольной декартовой системе координат  $x_i$  рассмотрим пластину толщиной  $2h$ , состоящую из регулярно чередующихся слоев малой толщины, параллельных отсчетной плоскости  $Ox_1x_2$ , которую совместим со срединной плоскостью тонкостенного элемента, а ось  $Ox_3$  сориентируем в поперечном направлении (см. рис. 1).

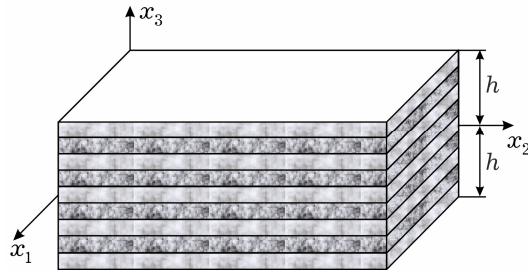


Рис. 1

Для описания ослабленного сопротивления такой пластины поперечным сдвигам деформации  $\varepsilon_{i3}$  представим в виде конечных сумм степенных рядов по переменной  $x_3$ :

$$\varepsilon_{i3}(\mathbf{r}) = \beta \left[ \frac{x_3 + h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(+)}(\mathbf{x}) - \frac{x_3 - h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(-)}(\mathbf{x}) \right] + \frac{h^2 - \beta x_3^2}{h^2} \sum_{k=0}^K x_3^k \varepsilon_{i3}^{(k)}(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(k)}$  – функции только двух переменных  $x_1$  и  $x_2$  (задача рассматривается в квазистатической постановке), подлежащие определению и имеющие следующий смысл:  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$  – деформации поперечных сдвигов на верхней и нижней ( $x_3 = \pm h$ ) лицевых поверхностях пластины; при  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$  функции  $\varepsilon_{i3}^{(0)}$  определяют деформации поперечных сдвигов в срединной плоскости  $x_3 = 0$ ;  $\varepsilon_{i3}^{(k)}$ ,  $1 \leq k \leq K$ , – неизвестные коэффициенты разложений, имеющие размерность  $1/m^k$ ;  $K$  – количество слагаемых, удерживаемых в частичных суммах степенных рядов;  $G$  – область, занимаемая пластиной в плане;  $\beta$  – параметр переключения.

Если  $\beta = 0$  и  $\varepsilon_{i3}^{(k)}(\mathbf{x}) \equiv 0$ ,  $0 \leq k \leq K$ ,  $i = 1, 2$ , то далее получим соотношения, основанные на гипотезах классической теории [11, 39]. Если же  $K = 0$  и  $\beta = 1$ , то из (1) вытекают соотношения, соответствующие теории Редди [2, 3, 13, 21, 33]. При  $K \geq 1$  и  $\beta = 1$  получаются уточнения теории Редди, а при  $K = 0$  и  $\beta = 0$  из (1) следуют соотношения, соответствующие теории Рейсснера [1, 7, 34, 35].

Согласно традиционному для тонкостенных элементов конструкций кинематическому допущению, изменяемостью прогиба  $u_3$  в поперечном направлении  $x_3$  пренебрегаем [2, 3, 7, 11, 13, 21, 29, 34, 35, 39]:

$$u_3(\mathbf{r}) = u_3^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h. \quad (2)$$

Используя дифференциальные соотношения Коши [2, 7, 21], с учетом (1), (2) получим

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{r}) = & u_i^0(\mathbf{x}) - x_3 \partial_i u_3^0(\mathbf{x}) + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) \varepsilon_{i3}^{(k)}(\mathbf{x}) + \\ & + \frac{\beta x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) \varepsilon_{i3}^{(+)}(\mathbf{x}) - \frac{\beta x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) \varepsilon_{i3}^{(-)}(\mathbf{x}), \\ & \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{2} (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) = \frac{1}{2} (\partial_1 u_2^0 + \partial_2 u_1^0) - x_3 \partial_1 \partial_2 u_3^0 + \\ & + \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(k)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(k)}) + \frac{\beta x_3}{2h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) \times \\ & \times (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(+)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(+)}) - \frac{\beta x_3}{2h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(-)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(-)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii}(\mathbf{r}) = & \partial_i u_i = \partial_i u_i^0 - x_3 \partial_i^2 u_3^0 + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) \partial_i \varepsilon_{i3}^{(k)} + \\ & + \frac{\beta x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) \partial_i \varepsilon_{i3}^{(+)} - \frac{\beta x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) \partial_i \varepsilon_{i3}^{(-)}, \\ & \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $u_i$  – перемещения точек пластины в тангенциальных направлениях  $x_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $u_i^0$  – перемещения точек срединной плоскости  $x_3 = 0$ ;  $\partial_i$  – оператор дифференцирования по переменной  $x_i$ .

Таким образом, в соотношениях (1)–(4) неизвестными являются функции  $u_i^0$ ,  $u_3^0$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(k)}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $0 \leq k \leq K$ , зависящие только от двух переменных  $x_1$  и  $x_2$ .

Как и в [20], предполагаем, что материалы всех слоев изотропны и однородны, а термоупругопластическое поведение их описывается обобщенными квазилинейными уравнениями деформационного типа [8, 9]

$$\begin{aligned}\sigma_{ii}^{(n)} - \sigma_0^{(n)} &= 2g_n(\varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n, \Theta)(\varepsilon_{ii}^{(n)} - \varepsilon_0^{(n)}), \\ \sigma_{ij}^{(n)} &= 2g_n(\varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n, \Theta)\varepsilon_{ij}^{(n)}, \quad j \neq i, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ \sigma_0^{(n)} &= K_n(\varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n, \Theta)(\varepsilon_0^{(n)} - \alpha_n(\Theta - \Theta_0)), \\ T_n &= g_n(\varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n, \Theta)\Gamma_n, \quad 1 \leq n \leq N.\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь  $\sigma_0^{(n)}$ ,  $\varepsilon_0^{(n)}$  – среднее нормальное напряжение и средняя линейная деформация в материале  $n$ -й фазы слоистой композиции;  $T_n$ ,  $\Gamma_n$  – интенсивность касательных напряжений и интенсивность деформаций сдвига в  $n$ -м компоненте композиции (см. (4) в [20]);  $g_n(\varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n, \Theta)$  – известная из эксперимента функция, являющаяся коэффициентом пропорциональности между  $T_n$  и  $\Gamma_n$ ;  $K_n(\varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n, \Theta)$  – известный из эксперимента, утроенный модуль объемного расширения материала  $n$ -й фазы композиции;  $\alpha_n = \alpha_n(\Theta)$  – коэффициент линейного теплового расширения материала  $n$ -го компонента композиции;  $\Theta$  – температура слоистой композиции;  $\Theta_0$  – температура естественного состояния композиции;  $N$  – количество семейств регулярно чередующихся слоев. Зависимость функций  $g_n$ ,  $K_n$  в (5) от аргумента  $\varepsilon_0^{(n)}$  в общем случае позволяет учесть эффект разносопротивляемости материала  $n$ -й фазы композиции [9], а от  $\Theta$  – его термочувствительность.

Соотношения (5) целесообразно записать в матричной форме

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{A}_n \boldsymbol{\varepsilon}_n + \mathbf{p}_n, \quad n = 1, 2, \dots, N,\tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_n &= \{\sigma_{11}^{(n)}, \sigma_{22}^{(n)}, \sigma_{33}^{(n)}, \sigma_{23}^{(n)}, \sigma_{31}^{(n)}, \sigma_{12}^{(n)}\}^*, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_n &= \{\varepsilon_{11}^{(n)}, \varepsilon_{22}^{(n)}, \varepsilon_{33}^{(n)}, \varepsilon_{23}^{(n)}, \varepsilon_{31}^{(n)}, \varepsilon_{12}^{(n)}\}^*, \\ \mathbf{p}_n &= p^{(n)}\{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^*, \\ p^{(n)} &= -K_n(\varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n, \Theta)\alpha_n(\Theta - \Theta_0), \quad 1 \leq n \leq N,\end{aligned}\tag{7}$$

$\mathbf{A}_n = (a_{ij}^{(n)})$  – симметричные  $6 \times 6$ -матрицы, ненулевые компоненты которых, согласно (5), определяются по формулам (7) из [20]. Звездочкой обозначена операция транспонирования.

Предполагаем, что соотношения (5) (а значит, и (6) с учетом (7)) удовлетворяют достаточным условиям сходимости метода последовательных приближений (см. [9, с. 199]), аналогичного методу переменных параметров упругости [12]. Согласно этому допущению, далее соотношения (5) и (6) считаем линеаризованными, при этом компоненты вектора  $\mathbf{p}_n$  (см. (7)) на каждой итерации можно трактовать как известные начальные (а точнее, температурные) напряжения. Линеаризованные матричные равенства (6) формально полностью совпадают с соотношениями (8) из [19], поэтому, повторяя рассуждения из [19, 20], на каждой итерации получим линейные

эффективные определяющие уравнения для слоистой композитной среды регулярной структуры, которые в матричной форме имеют вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{p}, \quad (8)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – шестикомпонентные вектор-столбцы осредненных напряжений и деформаций, имеющие структуру, аналогичную (7);  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  – известная  $6 \times 6$ -матрица, которую на каждой итерации можно трактовать как матрицу эффективных жесткостей слоистой композиции;  $\mathbf{p} = \{p_i\}$  – известный на текущей итерации шестикомпонентный вектор-столбец осредненных температурных напряжений, причем его компоненты  $p_1 = p_2 \neq 0$ ,  $p_3 \neq 0$ ,  $p_j \equiv 0$ ,  $j = 4, 5, 6$ .

Компоненты матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора  $\mathbf{p}$  в (8) определяются матричными равенствами (10) из [19]. Если из решения соответствующей граничной задачи для композитного слоистого тела (в частности, пластины), механическое поведение которого характеризуется определяющим уравнением (8), известны осредненные деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , то по матричным формулам (13), (14) из [19] можно определить и деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}_n$  в  $n$ -м компоненте слоистой композиции (см. (6), (7)). Тогда, согласно методу последовательных приближений, можем уточнить значения коэффициентов  $g_n$ ,  $K_n$  в (5) (или, что то же самое, значения компонентов матриц  $\mathbf{A}_n$  и векторов  $\mathbf{p}_n$  в (6) с учетом (7)) и по описанной выше и в [19, 20] схеме построить следующее приближение решения и т.д., пока итерационный процесс не сойдется с требуемой точностью.

Используем традиционную для тонкостенных элементов конструкций статическую гипотезу  $\sigma_{33}(\mathbf{r}) \approx 0$  [1–3, 7, 11, 13, 21, 29, 34, 35, 39]. Тогда систему шести алгебраических равенств (8) можно преобразовать к следующему виду, исключив из рассмотрения деформацию  $\varepsilon_{33}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= b_{i1}\varepsilon_{11} + b_{i2}\varepsilon_{22} + p_{ii}, & \sigma_{12} &= b_{33}\varepsilon_{12}, & \sigma_{i3} &= b_{jj}\varepsilon_{i3}, \\ & j = i + 3, & i &= 1, 2, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$b_{ij} \equiv a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{3j}}{a_{33}}, \quad p_{ii} \equiv p_i - \frac{a_{i3}p_3}{a_{33}}, \quad \varepsilon_{33} = -\frac{1}{a_{33}}(a_{31}\varepsilon_{11} + a_{32}\varepsilon_{22} + p_3),$$

$$i, j = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= b_{22}, & b_{21} &= b_{12}, & b_{44} &= b_{55}, \\ b_{33} &\equiv a_{66}, & b_{44} &\equiv a_{55}, & b_{55} &\equiv a_{44}, \end{aligned} \quad (10)$$

$a_{ij}$  – компоненты матрицы  $\mathbf{A}$  в (8), которая имеет такую же диагонально-блочную структуру, как и матрицы  $\mathbf{A}_n$  в (6) (см. (5));  $p_i$  – ненулевые компоненты вектора  $\mathbf{p}$  в (8);  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты осредненных напряжений и деформаций композиции (компоненты векторов  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  в (8)). Согласно (10), величины  $b_{ij}$  и  $p_{ii}$  в (9) предполагаются известными из решения рассматриваемой задачи на предыдущей итерации метода последовательных приближений.

На основании соотношений (9) с учетом (1), (4), (10) на текущей итерации можем определить все внутренние силовые факторы в пластине:

$$\begin{aligned}
M_{jj}^{(\ell)}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^2 \left( a_{ji}^{(\ell)} \partial_i u_i^0 - b_{ji}^{(\ell)} \partial_i^2 u_3^0 + 2 \sum_{k=0}^K c_{ji}^{(\ell,k)} \partial_i \varepsilon_{i3}^{(k)} + \right. \\
&\quad \left. + 2d_{ji}^{(\ell)} \partial_i \varepsilon_{i3}^{(+)} - 2e_{ji}^{(\ell)} \partial_i \varepsilon_{i3}^{(-)} \right) + P_{jj}^{(\ell)}(\mathbf{x}), \\
M_{12}^{(\ell)}(\mathbf{x}) &= \frac{a_{33}^{(\ell)}}{2} (\partial_1 u_2^0 + \partial_2 u_1^0) - b_{33}^{(\ell)} \partial_1 \partial_2 u_3^0 + \sum_{k=0}^K c_{33}^{(\ell,k)} (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(k)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(k)}) + \\
&\quad + d_{33}^{(\ell)} (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(+)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(+)} - e_{33}^{(\ell)} (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(-)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(-)}), \\
M_{j3}^{(\ell)}(\mathbf{x}) &= \sum_{k=0}^K g_{j+3,j+3}^{(\ell,k)} \varepsilon_{j3}^{(k)} + h_{j+3,j+3}^{(\ell)} \varepsilon_{j3}^{(+)} - f_{j+3,j+3}^{(\ell)} \varepsilon_{j3}^{(-)}, \\
&\quad j = 1, 2, \quad \ell = 0, 1, \dots, \frac{2}{3}K + 1, \quad \mathbf{x} \in G, \quad (11)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
P_{jj}^{(\ell)}(\mathbf{x}) &= \int_{-h}^h p_{jj}(\mathbf{r}) x_3^\ell dx_3, & M_{ji}^{(\ell)}(\mathbf{x}) &= \int_{-h}^h \sigma_{ji}(\mathbf{r}) x_3^\ell dx_3, \\
a_{ji}^{(\ell)}(\mathbf{x}) &= \int_{-h}^h b_{ji}(\mathbf{r}) x_3^\ell dx_3, & b_{ji}^{(\ell)}(\mathbf{x}) &= \int_{-h}^h b_{ji}(\mathbf{r}) x_3^{\ell+1} dx_3, \\
d_{ji}^{(\ell)}(\mathbf{x}) &= \beta \int_{-h}^h b_{ji}(\mathbf{r}) \frac{x_3^{\ell+1}}{2h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) dx_3, \\
e_{ji}^{(\ell)}(\mathbf{x}) &= \beta \int_{-h}^h b_{ji}(\mathbf{r}) \frac{x_3^{\ell+1}}{2h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) dx_3, \\
c_{ji}^{(\ell,k)}(\mathbf{x}) &= \int_{-h}^h b_{ji}(\mathbf{r}) \frac{x_3^{\ell+k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) dx_3, \\
g_{ii}^{(\ell,k)}(\mathbf{x}) &= \int_{-h}^h b_{ii}(\mathbf{r}) \frac{x_3^{\ell+k}}{h^2} (h^2 - \beta x_3^2) dx_3, \\
h_{ii}^{(\ell)}(\mathbf{x}) &= \beta \int_{-h}^h b_{ii}(\mathbf{r}) \frac{x_3^\ell}{2h} (x_3 + h) dx_3, \\
f_{ii}^{(\ell)}(\mathbf{x}) &= \beta \int_{-h}^h b_{ii}(\mathbf{r}) \frac{x_3^\ell}{2h} (x_3 - h) dx_3, \\
c_{ji}^{(\ell,k)} &= c_{ji}^{(k,\ell)} = c_{ij}^{(\ell,k)} = c_{ij}^{(k,\ell)}, & g_{ii}^{(\ell,k)} &= g_{ii}^{(k,\ell)} \\
a_{ji}^{(\ell)} &= a_{ij}^{(\ell)}, & b_{ji}^{(\ell)} &= b_{ij}^{(\ell)}, & d_{ji}^{(\ell)} &= d_{ij}^{(\ell)}, & e_{ji}^{(\ell)} &= e_{ij}^{(\ell)}, & b_{ji}^{(\ell)} &= a_{ji}^{(\ell+1)}, \\
&\quad 0 \leq \ell \leq \frac{2}{3}K + 1, & 0 \leq k \leq K. & (12)
\end{aligned}$$

Здесь и далее принимаем, что число  $K$  кратно трем. Согласно (12),  $M_{ij}^{(0)} \equiv F_{ij}$ ,  $M_{ij}^{(1)} \equiv M_{ij}$  – мембранные усилия и изгибающие и крутящие

моменты в пластине;  $M_{i3}^{(0)} \equiv F_{i3}$ ,  $i, j = 1, 2$ , – поперечные силы; остальные силовые факторы – математические моменты высших порядков. Величины  $P_{jj}^{(\ell)}$  в (11) можно трактовать как начальные (точнее, температурные) силовые факторы.

На основании дифференциальных уравнений равновесия для элемента сплошной среды [2, 7, 8, 12]

$$\partial_1 \sigma_{i1} + \partial_2 \sigma_{i2} + \partial_3 \sigma_{i3} = -X_i(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad (13)$$

где  $X_i$  – компоненты объемной нагрузки, действующей на материал слоистой композиции, можем выписать все необходимые уравнения равновесия пластины, которым должны удовлетворять силовые факторы (11). Для этого умножим (13) на  $x_3^\ell$  и результат проинтегрируем по толщине пластины. Тогда с учетом (12) получим

$$\begin{aligned} \partial_1 M_{i1}^{(\ell)} + \partial_2 M_{i2}^{(\ell)} - \ell M_{i3}^{(\ell-1)} &= -X_i^{(\ell)} - h^\ell [\sigma_{i3}^{(+)} - (-1)^\ell \sigma_{i3}^{(-)}], \\ 0 \leq \ell &\leq \frac{2}{3}K + 1, \quad i = 1, 2, \\ \partial_1 M_{13}^{(\ell)} + \partial_2 M_{23}^{(\ell)} &= -X_3^{(\ell)} + \ell \int_{-h}^h x_3^{\ell-1} \sigma_{33} dx_3 - h^\ell [\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^\ell \sigma_{33}^{(-)}], \\ 0 \leq \ell &\leq \frac{2}{3}K, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$X_i^{(\ell)}(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h X_i(\mathbf{r}) x_3^\ell dx_3, \quad \sigma_{i3}^{(\pm)}(\mathbf{x}) = \sigma_{i3}(\mathbf{x}, \pm h), \quad i = 1, 2, 3. \quad (15)$$

(При выводе равенств (14) использовались формулы интегрирования по частям.)

В уравнения (14) не входят моменты наивысших порядков  $M_{13}^{(\ell)}$  и  $M_{23}^{(\ell)}$  при  $\ell = \frac{2}{3}K + 1$ , поэтому их можно не вычислять по формулам (11). Напряжения  $\sigma_{i3}^{(\pm)}$  (см. (15)) известны из статических граничных условий, заданных на лицевых поверхностях пластины  $x_3 = \pm h$ . Напряжение же  $\sigma_{33}(\mathbf{r})$  в последнем равенстве (14) предполагается известным из решения на предыдущей итерации метода последовательных приближений (как и  $P_{jj}^{(\ell)}$ , и все коэффициенты в правых частях соотношений (11)), поэтому интеграл в этом соотношении перенесен вправо.

В силу того, что толщина пластины много меньше ее характерного размера в плане, напряжение  $\sigma_{33}$  можно аппроксимировать по переменной  $x_3$  полиномами Эрмита. В качестве начального приближения можно взять кубический полином, построенный по известным значениям  $\sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x})$  и

$$\partial_3 \sigma_{33} \Big|_{x_3 = \pm h} = -X_3(\mathbf{x}, \pm h) - \partial_1 \sigma_{13}^{(\pm)}(\mathbf{x}) - \partial_2 \sigma_{23}^{(\pm)}(\mathbf{x})$$

(см. равенство (13) при  $i = 3$ ). В частности, при  $X_3 \equiv 0$  и  $\sigma_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$ ,  $i = 1, 2$ , получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(\mathbf{r}) &= -\frac{\sigma_{33}^{(+)}(\mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(\mathbf{x})}{4h^3} x_3(x_3^2 - 3h^2) + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(\mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(\mathbf{x})}{2}, \\ \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| &\leq h. \end{aligned} \quad (16)$$

Последующее уточнение напряжения  $\sigma_{33}(\mathbf{r})$  возможно за счет полиномов Эрмита более высоких порядков, использующих не только значения  $\sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x})$  и  $\partial_3 \sigma_{33}|_{x_3=\pm h}$  (как в (16)), но и дополнительные значения  $\partial_3 \sigma_{33}$ , известные из решения на предыдущей итерации во внутренних точках пластины  $x_3 \in (-h, h)$ . Эти дополнительные значения также получаются из уравнения (13) ( $i = 3$ ) при замене напряжений  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  их предыдущими приближениями, вычисленными по формулам (9) с учетом (10). Чем больше используется по толщине пластины промежуточных значений  $\partial_3 \sigma_{33}$ , тем точнее будет аппроксимация напряжения  $\sigma_{33}(\mathbf{r})$  полиномами Эрмита высоких порядков.

Подставив полученную аппроксимацию функции  $\sigma_{33}(\mathbf{r})$  в равенство (14) (в частности, подставив (16) в (14)), на текущей итерации с учетом (15) получим требуемую систему дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять силовые факторы (11), причем правые части в этих уравнениях известны. К этой системе следует добавить четыре статических граничных условия на лицевых поверхностях пластины (см. (9) с учетом (1)):

$$b_{j+3, j+3} \left( \frac{h^2 - \beta x_3^2}{h^2} \sum_{k=0}^K x_3^k \varepsilon_{j3}^{(k)} + \beta \frac{x_3 + h}{2h} \varepsilon_{j3}^{(+)} - \beta \frac{x_3 - h}{2h} \varepsilon_{j3}^{(-)} \right) \Big|_{x_3=\pm h} = \sigma_{j3}^{(\pm)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad j = 1, 2, \quad (17)$$

где правые части и коэффициенты  $b_{ii}$ ,  $i = j + 3$ , известны на текущей итерации.

В случае использования теории Редди или ее уточнений ( $\beta = 1$ ,  $K \geq 0$ ) из уравнений (17) можем однозначно определить приближения функций  $\varepsilon_{j3}^{(\pm)}(\mathbf{x})$ ,  $j = 1, 2$ , на текущей итерации. В случаях же использования теории Рейсснера ( $\beta = 0$ ,  $K = 0$ ) или классической теории ( $\beta = 0$ ,  $\varepsilon_{j3}^{(k)} \equiv 0$ ) статические граничные условия (17) в общем случае удовлетворить не удастся.

Напомним, что температурные напряжения  $p_{ii}$  в (9), согласно (10), были получены в предположении, что  $\sigma_{33} \approx 0$ . Величины  $p_{ii}$  в соотношениях (9) можно уточнить, если для них вместо (10) использовать выражения

$$p_{ii} \equiv p_i - \frac{a_{i3}(p_3 - \sigma_{33})}{a_{33}}, \quad i = 1, 2,$$

где  $\sigma_{33}$  уже известно на основании аппроксимации полиномами Эрмита (например, из (16)). На первой же итерации здесь по-прежнему следует использовать  $\sigma_{33} \approx 0$ .

Подставив (11) в равенства (14), получим уравнения равновесия, записанные в разрешающем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \partial_j \left( a_{ji}^{(\ell)} \partial_i u_i^0 - b_{ji}^{(\ell)} \partial_i^2 u_3^0 + 2 \sum_{k=0}^K c_{ji}^{(\ell, k)} \partial_i \varepsilon_{i3}^{(k)} + 2d_{ji}^{(\ell)} \partial_i \varepsilon_{i3}^{(+)} - 2e_{ji}^{(\ell)} \partial_i \varepsilon_{i3}^{(-)} \right) + \\ + \partial_{3-j} \left[ \frac{a_{33}^{(\ell)}}{2} (\partial_1 u_2^0 + \partial_2 u_1^0) - b_{33}^{(\ell)} \partial_1 \partial_2 u_3^0 + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^K c_{33}^{(\ell, k)} (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(k)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(k)}) \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + d_{33}^{(\ell)} (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(+)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(+)} - e_{33}^{(\ell)} (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(-)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(-)}) \Big] - \\
& - \ell \left( \sum_{k=0}^K g_{j+3, j+3}^{(\ell-1, k)} \varepsilon_{j3}^{(k)} + h_{j+3, j+3}^{(\ell-1)} \varepsilon_{j3}^{(+)} - f_{j+3, j+3}^{(\ell-1)} \varepsilon_{j3}^{(-)} \right) = \\
& = -X_j^{(\ell)} - h^\ell [\sigma_{j3}^{(+)} - (-1)^\ell \sigma_{j3}^{(-)}] - \partial_j P_{jj}^{(\ell)}, \\
& \qquad \qquad \qquad j = 1, 2, \qquad 0 \leq \ell \leq \frac{2}{3} K + 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( \sum_{k=0}^K g_{j+3, j+3}^{(\ell, k)} \varepsilon_{j3}^{(k)} + h_{j+3, j+3}^{(\ell)} \varepsilon_{j3}^{(+)} - f_{j+3, j+3}^{(\ell)} \varepsilon_{j3}^{(-)} \right) = \\
& = -X_3^{(\ell)} + \ell \int_{-h}^h x_3^{\ell-1} \sigma_{33} dx_3 - h^\ell [\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^\ell \sigma_{33}^{(-)}], \\
& \qquad \qquad \qquad 0 \leq \ell \leq \frac{2}{3} K, \qquad \mathbf{x} \in G. \tag{18}
\end{aligned}$$

Здесь нужно учесть соотношения (15). При  $K$ , кратном трем, получим замкнутую систему  $2K + 9$  уравнений (17), (18), содержащую  $2K + 9$  неизвестных кинематических переменных  $u_i^0$ ,  $u_3^0$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(k)}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $0 \leq k \leq K$ , зависящих только от двух координат  $x_1$  и  $x_2$ .

Для однозначного интегрирования этой системы уравнений нужно получить соответствующие ей граничные условия. Предположим, что на одной части торцевой поверхности пластины (обозначим ее через  $G_\sigma$ ) заданы статические граничные условия:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + 2\sigma_{12} n_1 n_2 = \sigma_{nn}, \\
& (\sigma_{22} - \sigma_{11}) n_1 n_2 + \sigma_{12} (n_1^2 - n_2^2) = \sigma_{n\tau}, \\
& \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = \sigma_{n3}, \\
& n_1 = \cos \gamma, \qquad n_2 = \sin \gamma, \qquad \mathbf{r} \in G_\sigma, \tag{19}
\end{aligned}$$

а на другой части торцевой поверхности (обозначим ее через  $G_u$ ) заданы кинематические граничные условия (см. (2), (3))

$$u_3^0(\mathbf{x}) = u_{30}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \tag{20}$$

$$u_i(\mathbf{r}) = u_{i0}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in G_u, \quad i = 1, 2, \tag{21}$$

где  $\sigma_{nn}$ ,  $\sigma_{n\tau}$ ,  $\sigma_{n3}$  – нормальная, касательная (в плоскости  $x_3 = \text{const}$ ) и поперечная (в направлении  $x_3$ ) внешние поверхностные нагрузки, заданные на  $G_\sigma$ ;  $\Gamma_u$  – проекция части торцевой поверхности  $G_u$  на отсчетную плоскость  $x_3 = 0$  (т. е.  $\Gamma_u$  – часть контура  $\Gamma$ , ограничивающего область  $G$ , занимаемую пластиной в плане);  $u_{30}(\mathbf{x})$  – заданный на  $\Gamma_u$  прогиб;  $u_{i0}$  – заданные на торцевой поверхности  $G_u$  перемещения в тангенциальных направлениях  $x_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\gamma$  – угол, задающий направление внешней нормали к контуру  $\Gamma$  (или, что то же самое, к торцевой поверхности  $G_\sigma \cup G_u$ ) и отсчитываемый от направления  $x_1$ .

Статические граничные условия, записанные в силовых факторах (см. (11)), получим умножением (19) на  $x_3^\ell$  с последующим интегрированием результата по толщине пластины, тогда с учетом (12) будем иметь

$$\begin{aligned} M_{11}^{(\ell)} n_1^2 + M_{22}^{(\ell)} n_2^2 + 2M_{12}^{(\ell)} n_1 n_2 &= M_{nn}^{(\ell)}, \\ (M_{22}^{(\ell)} - M_{11}^{(\ell)}) n_1 n_2 + M_{12}^{(\ell)} (n_1^2 - n_2^2) &= M_{n\tau}^{(\ell)}, \quad 0 \leq \ell \leq \frac{2}{3}K + 1, \\ M_{13}^{(\ell)} n_1 + M_{23}^{(\ell)} n_2 &= M_{n3}^{(\ell)}, \quad 0 \leq \ell \leq \frac{2}{3}K, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} M_{nn}^{(\ell)} &\equiv \int_{-h}^h \sigma_{nn} x_3^\ell dx_3, & M_{n\tau}^{(\ell)} &\equiv \int_{-h}^h \sigma_{n\tau} x_3^\ell dx_3, \\ M_{n3}^{(\ell)} &\equiv \int_{-h}^h \sigma_{n3} x_3^\ell dx_3, \end{aligned} \quad (23)$$

$\Gamma_\sigma$  – проекция части торцевой поверхности  $G_\sigma$  на отсчетную плоскость  $x_3 = 0$ ,  $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$ ;  $M_{nn}^{(\ell)}$ ,  $M_{n\tau}^{(\ell)}$ ,  $M_{n3}^{(\ell)}$  – заданные на контуре  $\Gamma_\sigma$  силовые факторы, причем, согласно (23),  $M_{nn}^{(0)}$ ,  $M_{n\tau}^{(0)}$  – заданные нормальная и касательная к  $\Gamma_\sigma$  мембранные силы,  $M_{n3}^{(0)}$  – заданная поперечная сила,  $M_{nn}^{(1)}$ ,  $M_{n\tau}^{(1)}$  – заданные на  $\Gamma_\sigma$  изгибающий и крутящий моменты (остальные величины в правых частях равенств (22) являются заданными математическими моментами высших порядков).

В силу использования лишь частичных сумм степенного ряда в (3) ( $K < \infty$ ) кинематические граничные условия (21) нельзя удовлетворить в каждой точке  $\mathbf{r}$  торцевой поверхности пластины  $G_u$  при произвольной зависимости функций  $u_{i0}$  от поперечной координаты  $x_3$ , поэтому, как и статические граничные условия (см. (19), (22), (23)), кинематические условия (21) будем удовлетворять в интегральном смысле на соответствующей кромке пластины, т. е. проинтегрируем (21) по толщине пластины с весами  $x_3^\ell$ . Тогда на основании (3) получим

$$\begin{aligned} &\frac{h^{\ell+1}}{\ell+1} (1 - (-1)^{\ell+1}) u_i^0 - \frac{h^{\ell+2}}{\ell+2} (1 - (-1)^{\ell+2}) \partial_i u_3^0 + 2 \sum_{k=0}^K h^{k+\ell+2} (1 - (-1)^{\ell+k+2}) \times \\ &\quad \times \left( \frac{1}{(k+1)(\ell+k+2)} - \frac{\beta}{(k+3)(\ell+k+4)} \right) \varepsilon_{i3}^{(k)} + \\ &\quad + \beta h^{\ell+2} \left[ \frac{1}{2(\ell+3)} (1 - (-1)^{\ell+3}) + \frac{1}{\ell+2} (1 - (-1)^{\ell+2}) \right] \varepsilon_{i3}^{(+)} - \\ &\quad - \beta h^{\ell+2} \left[ \frac{1}{2(\ell+3)} (1 - (-1)^{\ell+3}) - \frac{1}{\ell+2} (1 - (-1)^{\ell+2}) \right] \varepsilon_{i3}^{(-)} = \\ &= u_{i0}^{(\ell)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq \ell \leq K + 1, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$u_{i0}^{(\ell)}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h u_{i0}(\mathbf{r}) x_3^\ell dx_3, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad \mathbf{r} \in G_u, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq \ell \leq K + 1. \quad (25)$$

Подставив соотношения (11) в уравнения (22), получим статические граничные условия на кромке пластины в разрешающем виде:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^2 n_j^2 \sum_{i=1}^2 \left( a_{ji}^{(\ell)} \partial_i u_i^0 - b_{ji}^{(\ell)} \partial_i^2 u_3^0 + \right. \\
& \quad \left. + 2 \sum_{k=0}^K c_{ji}^{(\ell,k)} \partial_i \varepsilon_{i3}^{(k)} + 2d_{ji}^{(\ell)} \partial_i \varepsilon_{i3}^{(+)} - 2e_{ji}^{(\ell)} \partial_i \varepsilon_{i3}^{(-)} \right) + \\
& \quad + n_1 n_2 \left[ a_{33}^{(\ell)} (\partial_1 u_2^0 + \partial_2 u_1^0) - 2b_{33}^{(\ell)} \partial_1 \partial_2 u_3^0 + \right. \\
& \quad \left. + 2 \sum_{k=0}^K c_{33}^{(\ell,k)} (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(k)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(k)}) + \right. \\
& \quad \left. + 2d_{33}^{(\ell)} (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(+)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(+)} - 2e_{33}^{(\ell)} (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(-)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(-)}) \right] = \\
& \quad = M_{nm}^{(\ell)} - \sum_{j=1}^2 n_j^2 P_{jj}^{(\ell)}, \\
& n_1 n_2 \sum_{j=1}^2 (-1)^j \sum_{i=1}^2 \left( a_{ji}^{(\ell)} \partial_i u_i^0 - b_{ji}^{(\ell)} \partial_i^2 u_3^0 + \right. \\
& \quad \left. + 2 \sum_{k=0}^K c_{ji}^{(\ell,k)} \partial_i \varepsilon_{i3}^{(k)} + 2d_{ji}^{(\ell)} \partial_i \varepsilon_{i3}^{(+)} - 2e_{ji}^{(\ell)} \partial_i \varepsilon_{i3}^{(-)} \right) + \\
& \quad + \frac{1}{2} (n_1^2 - n_2^2) \left[ a_{33}^{(\ell)} (\partial_1 u_2^0 + \partial_2 u_1^0) - 2b_{33}^{(\ell)} \partial_1 \partial_2 u_3^0 + \right. \\
& \quad \left. + 2 \sum_{k=0}^K c_{33}^{(\ell,k)} (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(k)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(k)}) + 2d_{33}^{(\ell)} \times \right. \\
& \quad \left. \times (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(+)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(+)} - 2e_{33}^{(\ell)} (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(-)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(-)}) \right] = \\
& \quad = M_{n\tau}^{(\ell)} - n_1 n_2 \sum_{j=1}^2 (-1)^j P_{jj}^{(\ell)}, \quad 0 \leq \ell \leq \frac{2}{3} K + 1, \\
& \sum_{j=1}^2 n_j \left( \sum_{k=0}^K g_{j+3,j+3}^{(\ell,k)} \varepsilon_{j3}^{(k)} + h_{j+3,j+3}^{(\ell)} \varepsilon_{j3}^{(+)} - f_{j+3,j+3}^{(\ell)} \varepsilon_{j3}^{(-)} \right) = \\
& \quad = M_{n3}^{(\ell)}, \quad 0 \leq \ell \leq \frac{2}{3} K, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \tag{26}
\end{aligned}$$

где следует учесть равенства (23).

Таким образом, для однозначного интегрирования системы разрешающих уравнений (17), (18) в каждой точке контура  $\Gamma$  должны быть заданы статические граничные условия (26) или кинематические граничные условия (20), (24) с учетом (25). Возможно задание и смешанных из (20), (24), (26) граничных условий, например в случае свободного опирания кромки.

В рамках теории Редди и ее уточнений (при  $\beta = 1$ ) на текущей итерации метода последовательных приближений в уравнениях (18) и равенствах (26) функции  $\varepsilon_{j3}^{(\pm)}$ ,  $j = 1, 2$ , можно считать известными из предварительного решения системы уравнений (17). В рамках же теории Рейсснера и классической теории ( $\beta = 0$ ) в соотношениях (18), (26) эти функции отсутствуют (см. (12) при  $\beta = 0$ ).

На основании известных формул перехода от декартовой прямоугольной системы координат к цилиндрической системе [6] с использованием приведенных выше соотношений можно получить систему разрешающих уравнений и соответствующие ей граничные условия в полярной системе координат, что удобно, когда область  $G$ , занимаемая пластиной в плане, является кругом, кольцом или сектором круга или кольца.

**Заключение.** Разложение деформаций поперечных сдвигов в слоистой пластине регулярной структуры по полиномам разного порядка от поперечной координаты позволило построить уточненные теории термоупругопластического изгиба таких конструкций, с разной степенью точности учитывающие их ослабленное сопротивление поперечным сдвигам и позволяющие удовлетворить силовые граничные условия по касательным напряжениям на лицевых поверхностях. В первом приближении из полученных соотношений вытекают уравнения традиционной неклассической теории Редди, сложность реализации которой такая же, как у теории Рейсснера. Однако в рамках последней теории нельзя удовлетворить граничные условия по касательным напряжениям на лицевых поверхностях пластины. Использование более точных, чем в теории Редди, кинематических соотношений приводит к существенному усложнению граничных задач по сравнению с уравнениями теорий Рейсснера и Редди.

1. *Абросимов Н. А., Баженов В. Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2002. – 400 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. – Москва: Наука, 1987. – 360 с.
3. *Андреев А. Н., Немировский Ю. В.* Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.
4. *Баженов В. А., Кривенко О. П., Соловей Н. А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – Москва: Книжный дом «Либроком», 2013. – 336 с.
5. *Безухов Н. И., Бажанов В. Л., Гольденблат И. И., Николаенко Н. А., Синюков А. М.* Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Под ред. И. И. Гольденבלата. – Москва: Машиностроение, 1965. – 567 с.
6. *Бидерман В. Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. – Москва: Машиностроение, 1977. – 488 с.
7. *Васильев В. В.* Механика конструкций из композиционных материалов. – Москва: Машиностроение, 1988. – 272 с.
8. *Зубчанинов В. Г.* Механика процессов пластических сред. – Москва: Физматлит, 2010. – 352 с.
9. *Ильюшин А. А.* Труды. Т. 3: Теория термовязкоупругости / Составители: Е. А. Ильюшина, В. Г. Тунгускова. – Москва: Физматлит, 2007. – 288 с.
10. *Куликов Г. М.* Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1994. – № 2. – С. 33–42.
11. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. – Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1947. – 355 с.
12. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – Москва: Машиностроение, 1968. – 400 с.
13. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.* Сопротивление жестких полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1972. – 498 с.
14. *Немировский Ю. В., Горынин Г. Л.* Метод жесткостных функций в задачах расчета многослойных стержней и плит // Вестн. Нижегород. ун-та. Механика деформируемого твердого тела. – 2011. – № 4 (4). – С. 1654–1656.
15. *Пикуль В. В.* Механика оболочек. – Владивосток: Дальнаука, 2009. – 536 с.
16. *Полимерные композиционные материалы: структура, свойства, технология: Учеб. пособие / Под ред. А. А. Берлина.* – Санкт-Петербург: Профессия, 2009. – 560 с.
17. *Савенкова М. И., Шешенин С. В., Закалюкина И. М.* Применение метода осреднения в задаче упругопластического изгиба пластины // Вестн. Моск. гос. строит. ун-та. – 2012. – № 9. – С. 156–164.

18. *Справочник по композитным материалам*: В 2 кн. Кн. 1 / Под ред. Дж. Любина. – Москва: Машиностроение, 1988. – 448 с.  
То же: *Handbook of composites* / Ed. G. Lubin. – New York: Van Nostrand Reinhold, 1982. – xi+786 p.
19. Янковский А. П. Исследование неустановившейся ползучести слоистых пластин регулярной структуры из нелинейно-наследственных материалов с учетом ослабленного сопротивления поперечным сдвигам // *Механика композиц. материалов и конструкций*. – 2015. – **21**, № 3. – С. 412–433.
20. Янковский А. П. Моделирование упругопластического изгиба металлокомпозитных слоистых пластин регулярной структуры. 1. Структурная модель // *Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния*. – 2012. – № 2 (12). – С. 102–111.
21. Янковский А. П. Моделирование упругопластического изгиба металлокомпозитных слоистых пластин регулярной структуры. 2. Уточненная модель деформирования // *Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния*. – 2012. – № 3 (13). – С. 38–56.
22. Янковский А. П. Уточненная модель изгибного деформирования слоистых балок-стенок регулярной структуры из нелинейно-упругих материалов // *Конструкции из композиц. материалов*. – 2016. – № 1. – С. 18–29.
23. Belkaid K., Tati A., Boumaraf R. A simple finite element with five degrees of freedom based on Reddy's third-order shear deformation theory // *Mech. Compos. Mater.* – 2016. – **52**, No. 2. – P. 257–270.
24. Fazzolari F. A. A refined dynamic stiffness element for free vibration analysis of cross-ply laminated composite cylindrical and spherical shallow shells // *Compos. Part B: Eng.* – 2014. – **62**. – P. 143–158.
25. Gill S. K., Gupta M., Satsangi P. S. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastic composite // *Front. Mech. Eng.* – 2013. – **8**, No. 2. – P. 187–200.
26. Lissenden C. J. Experimental investigation of initial and subsequent yield surfaces for laminated metal matrix composites // *Int. J. Plasticity*. – 2010. – **26**, No. 11. – P. 1606–1628.
27. Lo K. H., Christensen R. M., Wu E. M. A high-order theory of plate deformation – Part 1: Homogeneous plates // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1977. – **44**, No. 4. – P. 663–668.
28. Mau S. T. A refined laminated plates theory // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1973. – **40**, No. 2. – P. 606–607.
29. Mindlin R. D. Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates // *J. Appl. Phys.* – 1951. – **22**, No. 3. – P. 316–323.  
– <https://doi.org/10.1063/1.1699948>.
30. Mouritz A. P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // *Compos. Struct.* – 2001. – **53**, No. 1. – P. 21–42.
31. Reddy J. N. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation // *Int. J. Solids Struct.* – 1984. – **20**, No. 9-10. – P. 881–896.
32. Reddy J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1984. – **51**, No. 4. – P. 745–752.
33. Reddy J. N. *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. – New York: J. Wiley & Sons, 1984. – 608 p.
34. Reissner E. A consistent treatment of transverse shear deformations in laminated anisotropic plates // *AIAA Journal*. – 1972. – **10**, No. 5. – P. 716–718.
35. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates // *J. Math. & Phys.* – 1944. – **23**, No. 1-4. – P. 184–191.
36. Thai C. H., Tran L. V., Tran D. T., Nguyen-Thoi T., Nguyen-Xuan U. Analysis of laminated composite plates using higher-order shear deformation plate theory and mode-based smoother discrete shear gap method // *Appl. Math. Model.* – 2012. – **36**, No. 11. – P. 5657–5677.
37. Verchery G. Design rules for the laminate stiffness // *Mech. Compos. Mater.* – 2011. – **47**, No. 1. – P. 47–58.
38. Whitney J. M. The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates // *J. Compos. Mater.* – 1969. – **3**, No. 3. – P. 534–547.
39. Whitney J. M., Leissa A. W. Analysis of heterogeneous anisotropic plates // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1969. – **36**, No. 2. – P. 261–266.

## УТОЧНЕНА МОДЕЛЬ ТЕРМОПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ЗГИНУ ШАРУВАТИХ ПЛАСТИН РЕГУЛЯРНОЇ СТРУКТУРИ. I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У геометрично лінійній постановці сформульовано задачу квазістатичного термопружнопластичного згину шаруватих пластин регулярної структури. Механічна поведінка ізотропних шарів описується співвідношеннями термопружнопластичності деформаційного типу з урахуванням їх різного опору розтягу і стиску. Лінеаризовані визначальні співвідношення шаруватого середовища отримано з використанням методу змінних параметрів пружності. Виведені рівняння дозволяють з різним ступенем точності описувати напружено-деформований стан таких пластин при врахуванні їх ослабленого опору поперечним зсувам. Із цих рівнянь, як окремі випадки, отримано співвідношення традиційних неklasичних теорій Рейсснера і Редді. У рамках побудованих уточнених теорій і теорії Редді задовольняються силові граничні умови для дотичних напружень на лицьових поверхнях. Граничні умови для нормальних напружень на цих поверхнях не виконуються. Змінність прогину по товщині конструкції не враховується. Тривимірні рівняння рівноваги і граничні умови на торцевій поверхні пластини зводяться до двовимірних співвідношень методом зважених нев'язок. Як вагові функції використано однорідні поліноми від поперечної координати.

**Ключові слова:** шарувата композитна пластинка, регулярна структура, термопружнопластичність деформаційного типу, згинна пластинка, теорія Рейсснера, теорія Редді, уточнена теорія згину.

## REFINED MODEL OF THERMO-ELASTIC-PLASTIC BENDING OF LAYERED PLATES OF REGULAR STRUCTURE. I. PROBLEM STATEMENT

The problem of quasi-static thermos-elastic bending is formulated in a geometrically linear formulation for layered plates of regular structure. The mechanical behavior of isotropic layers is described by the relations of thermo-elastic-plasticity of deformation type taking into account their different resistance to tension and compression. The linearized governing relations of the layered medium are obtained using the method of variable parameters of elasticity. The obtained equations allow describing the stress-strain state of such plates with different degree of accuracy, taking into account their weakened resistance to transverse shear. From these equations the relations of traditional non-classical Reissner and Reddy theories follow as special cases. Within the framework of the refined theories and Reddy theory, the boundary conditions for shear stresses on the front surfaces are satisfied. Boundary conditions for normal stresses on these surfaces are not satisfied. Three-dimensional equilibrium equations and boundary conditions on the end surface of the plate are reduced to two-dimensional relations by the method of weighted residuals. The homogeneous polynomials from the transverse coordinate are used as weight functions.

**Key words:** laminated composite plate, regular structure, thermo-elastic-plasticity of deformation type, bending plate, Reissner theory, Reddy theory, refined theory of bending.

Ин-т теорет. и прикл. механики  
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено  
09.01.18