

## ДОСЛІДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ І СТІЙКОСТІ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ТРИШАРОВИХ ПЛАСТИН ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРІЇ R-ФУНКЦІЙ І ВАРІАЦІЙНИХ МЕТОДІВ

Запропоновано чисельно-аналітичний метод дослідження вільних коливань і стійкості функціонально-градієнтних пластин типу «сендвіч» із застосуванням уточненої теорії пластин першого порядку типу Тимошенка. Розглянуто різні схеми розташування шарів: 1) наповнювач є функціонально-градієнтним матеріалом, а верхній і нижній шари виготовлено з ізотропних матеріалів і 2) навпаки, наповнювач виготовлено з ізотропного матеріалу, а верхній і нижній шари – з функціонально-градієнтних матеріалів. В основу розробленого підходу покладено використання теорії R-функцій і варіаційного методу Рітца. Запропонований метод і створене програмне забезпечення враховують наявність неоднорідного докритичного стану пластини. Одержано аналітичні вирази для обчислення пружних сталей і густини матеріалу за припущення, що значення коефіцієнтів Пуассона є однаковими для складових функціонально-градієнтних матеріалів. Виконано порівняння одержаних числових результатів для власних частот і критичного навантаження з відомими результатами та одержано їхнє добре узгодження. Для ілюстрації можливостей запропонованого підходу виконано розрахунок пластин складної геометричної форми, навантажених у серединній площині. Вивчено вплив різних геометричних і механічних параметрів на динамічну поведінку пластини, критичне навантаження і зони динамічної нестійкості.

**Ключові слова:** вільні коливання, стійкість пластин типу «сендвіч», функціонально-градієнтні пластини, теорія R-функцій.

Широке використання функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) для виготовлення багатьох елементів тонкостінних конструкцій пов'язано з унікальними властивостями цих матеріалів. ФГМ відносяться до гетерогенних композитів, матеріальні властивості яких змінюються гладко та неперервно від однієї поверхні об'єкту до іншої. Ці властивості композита суттєво зменшують можливості виникнення тріщин на поверхні, розшарування шарів, стрибки напружень, а також сприяють уникненню корозії покриття та використовуються як термічний бар'єр матеріалів. Незважаючи на те, що ФГМ було створено в 1984 році [8], більшість робіт, присвячених вивченню динамічної і статичної поведінки ФГМ пластин та оболонок, опубліковано в останні два десятиліття. Детальний огляд цих публікацій наведено в роботах [9, 21, 22] та ін.

Однією з актуальних проблем сучасної нелінійної механіки є дослідження параметричних коливань багатошарових композитних пластин і оболонок. Цій проблемі присвячено багато робіт [5, 7, 14, 16, 17, 19, 20]. Особливістю такого класу задач є можлива втрата стійкості при відповідних значеннях параметрів навантаження, що призводить до небажаних наслідків і навіть до руйнування конструкції. З огляду на широке застосування багатошарових функціонально-градієнтних (ФГ) структур розроблено багато теорій і методів для дослідження їхньої стійкості та параметричних коливань. Серед них – метод Релея, Релея – Рітца, Гальборкіна, методи скінченних різниць, скінченних елементів, диференціальних квадратур, диференціальних перетворень, граничних інтегральних рівнянь, колокацій та ін. [11–13, 15, 18, 23]. Огляд публікацій, в яких застосовано метод Релея – Рітца, наведено в роботі [9]. З аналізу цих робіт можемо зробити висновок, що метод Релея – Рітца було застосовано для дослідження параметричних коливань багатошарових ФГМ пластин і пологих оболонок з прямокутною

<sup>✉</sup> ktv\_ua@yahoo.com

формою плану [11–13, 22]. Слід відмітити, що роботи, в яких досліджено стійкість і параметричні коливання ФГ пластин типу «сендвіч» зі складною геометричною формою плану та за наявності неоднорідного стану, майже відсутні.

У роботах [2, 3, 6, 10] запропоновано метод дослідження стійкості і параметричних коливань багат шарових пластин симетричної будови зі складною формою плану. Цей метод базується на використанні теорії  $R$ -функцій і варіаційних методах, тому його було названо методом  $R$ -функцій ( $RFM$ ).

У цій роботі вперше розроблено  $RFM$  для дослідження стійкості та параметричних коливань тришарових ФГ пластин, які навантажені в серединній площині та можуть мати складну форму плану і різні види закріплення. Представлено аналітичні вирази для обчислення ефективних властивостей матеріалів структур для різних схем розподілу матеріалу вздовж товщини об'єкту. Одержано варіаційні постановки задач для обчислення докритичного стану пластини, критичного навантаження і власних частот пластин, навантажених у серединній площині. Для вивчення геометрично нелінійних коливань невідомі функції представлено в спеціальному вигляді, внаслідок чого вихідну систему нелінійних диференціальних рівнянь зведено до звичайного нелінійного диференціального рівняння Мат'є. В аналітичному вигляді одержано вирази для коефіцієнтів цього рівняння. До розв'язання одержаного рівняння застосовано метод Рунге – Кутта. Розроблений метод і створене програмне забезпечення протестовано на прикладах «сендвіч»-пластин з прямокутною формою плану та застосовано для розрахунку об'єктів зі складною геометричною формою.

**1. Математична постановка задачі.** Розглянемо тришарову пластину постійної товщини  $h$ , яка навантажена в серединній площині зусиллями  $p_N$ , що визначаються як

$$p_N = p_{st} + p_{dyn} \cos \theta t, \quad (1)$$

де  $p_{st}$  – статична складова навантаження,  $p_{dyn}$  – амплітуда періодичної частини навантаження,  $\theta$  – частота діючого навантаження. Припустимо, що шари пластини виготовлені з ізотропного матеріалу (метал, кераміка) або із суміші металу та кераміки, тобто з функціонально-градієнтного матеріалу. На рис. 1 показано різні схеми розташування шарів вздовж товщини пластини.

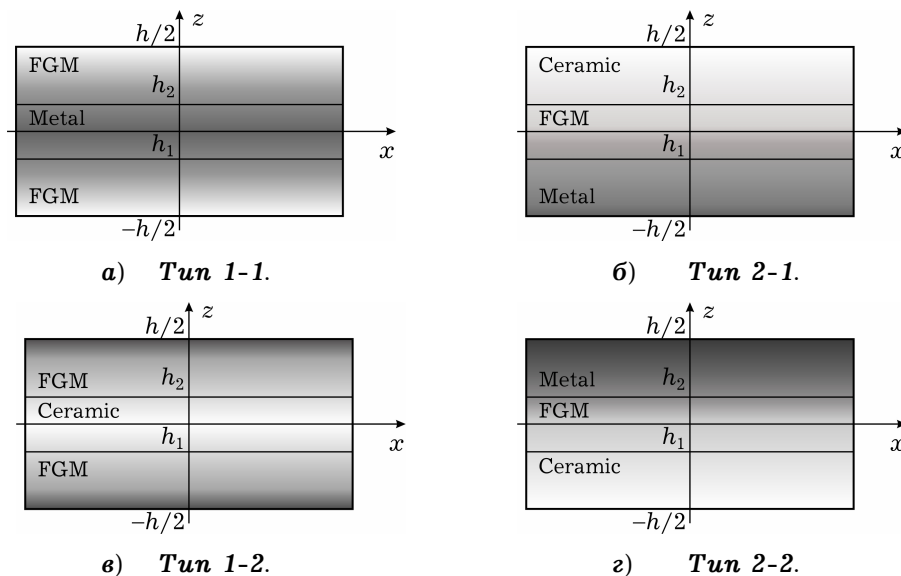


Рис. 1

Ефективні властивості ФГМ будемо обчислювати за степеневим законом:

$$\begin{aligned} E^{(r)} &= (E_u^{(r)} - E_\ell^{(r)})V_1^{(r)} + E_\ell^{(r)}, \\ v^{(r)} &= (v_u^{(r)} - v_\ell^{(r)})V_1^{(r)} + v_\ell^{(r)}, \\ \rho^{(r)} &= (\rho_u^{(r)} - \rho_\ell^{(r)})V_1^{(r)} + \rho_\ell^{(r)}, \end{aligned}$$

де  $E_u^{(r)}$ ,  $v_u^{(r)}$ ,  $\rho_u^{(r)}$  та  $E_\ell^{(r)}$ ,  $v_\ell^{(r)}$ ,  $\rho_\ell^{(r)}$  співпадають зі значенням модуля Юнга, коефіцієнта Пуассона та густини маси на верхній і нижній поверхнях  $r$ -го функціонально-градієнтного шару відповідно, а  $V_1^{(r)}$  – об'ємна частка матеріалу  $M_1$ , який є складовою частиною суміші (ФГМ). Наприклад, для розміщення шарів пластини за схемою, показаною на рис. 1а (Тун 1-1), значення  $V_1^{(r)}$  обчислюємо як

$$\begin{aligned} V_1^{(1)} &= \left( \frac{z + h/2}{h_1 + h/2} \right)^{p_1}, & z \in [-h/2, h_1], \\ V_1^{(2)} &= 1, & z \in [h_1, h_2], \\ V_1^{(3)} &= \left( \frac{z - h/2}{h_2 - h/2} \right)^{p_3}, & z \in [h_2, h/2]. \end{aligned}$$

Величини  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  – значення показників степеневого закону для об'ємних часток складових ФГМ, які можуть бути різними на різних шарах. Товщина пластини також може бути різною для кожного шару. Надалі відношення товщин шарів будемо позначати як відношення трьох величин  $h^{(1)} : h^{(2)} : h^{(3)}$ , де  $h^{(1)}$ ,  $h^{(2)}$ ,  $h^{(3)}$  – товщини нижнього, середнього та верхнього шарів відповідно (див. рис. 1):

$$h^{(1)} = h_1 + h/2, \quad h^{(2)} = h_2 - h_1, \quad h^{(3)} = h/2 - h_2.$$

Для розв'язання задачі будемо використовувати двовимірну уточнену теорію пластин першого порядку типу Тимошенка, яка враховує деформації зсуву. Згідно з цією теорією компоненти переміщень  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  в точці  $(x, y, z)$  обчислюються як функції переміщень серединної поверхні  $u$ ,  $v$  та  $w$  відповідно в напрямках осей  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  та кутів  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  обертання нормалі до координатної поверхні відносно осей  $Ox$  та  $Oy$ :

$$u_1 = u + z\psi_x, \quad u_2 = v + z\psi_y, \quad u_3 = w.$$

Деформації  $\{\varepsilon\} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})^\top$ ,  $\{\chi\} = (\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12})^\top$  у довільній точці пластин визначаються як

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, & \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_{13} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, & \varepsilon_{23} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \chi_{11} &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, & \chi_{22} &= \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, & \chi_{12} &= \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}. \end{aligned}$$

Зусилля  $\{N\} = (N_{11}, N_{12}, N_{22})^\top$  і моменти  $\{M\} = (M_{11}, M_{12}, M_{22})^\top$  на координатній площині визначаються за формулами [18]:

$$\{N\} = [\mathbf{A}]\{\varepsilon\} + [\mathbf{B}]\{\chi\}, \quad \{M\} = [\mathbf{B}]\{\varepsilon\} + [\mathbf{D}]\{\chi\},$$

де  $[\mathbf{A}]$ ,  $[\mathbf{B}]$ ,  $[\mathbf{D}]$  – квадратні матриці третього порядку, елементи яких  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 6$ , обчислюються за формулами

$$A_{ij} = \sum_{r=1}^3 \int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}^{(r)} dz, \quad B_{ij} = \sum_{r=1}^3 \int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}^{(r)} z dz, \quad D_{ij} = \sum_{r=1}^3 \int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}^{(r)} z^2 dz,$$

де  $z_1 = -h/2$ ,  $z_2 = h_1$ ,  $z_3 = h_2$ ,  $z_4 = h/2$ .

Величини  $Q_{ij}^{(r)}$ ,  $i, j = 1, 2, 6$ , визначаються так:

$$Q_{11}^{(r)} = Q_{22}^{(r)} = \frac{E^{(r)}}{1 - (v^{(r)})^2}, \quad Q_{12}^{(r)} = \frac{v^{(r)} E^{(r)}}{1 - (v^{(r)})^2}, \quad Q_{66}^{(r)} = \frac{E^{(r)}}{2(1 + v^{(r)})}.$$

Перерізуючі сили  $Q_x$ ,  $Q_y$  обчислюємо за формулами

$$Q_x = K_s^2 A_{33} \varepsilon_{13}, \quad Q_y = K_s^2 A_{33} \varepsilon_{23},$$

де  $K_s^2$  – коефіцієнт зсуву. У цій роботі значення для цього коефіцієнта приймаємо рівним  $5/6$ .

Далі будемо розглядати матеріали, які мають однаковий коефіцієнт Пуассона для металу та кераміки, тобто  $\nu_m = \nu_c$ . Для цього класу матеріалів можна одержати аналітичні вирази для обчислення коефіцієнтів  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$ . Для пластин **Tuniv 1-1**, **1-2**, **2-1** та **2-2** наведемо ці аналітичні формули.

**Tun 1-1:**

$$A_{11} = \nu_0 \left( E_{cm} \left( \frac{as1}{p_1 + 1} - \frac{as2}{p_3 + 1} \right) + E_m (h - as21) + E_c as21 \right), \quad (2)$$

$$B_{11} = \nu_0 E_{cm} \left( \frac{as1}{p_1 + 2} \left( h_1 - \frac{h}{2(p_1 + 1)} \right) - \frac{as2}{p_3 + 2} \left( h_2 + \frac{h}{2(p_3 + 1)} \right) + \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} \right), \quad (3)$$

$$D_{11} = \nu_0 \left( E_{cm} \left( as1 \left( \frac{(as1)^2}{p_1 + 3} - \frac{as1}{p_1 + 2} h - \frac{h^2}{4(p_1 + 1)} \right) - as2 \left( \frac{(as2)^2}{p_3 + 3} - \frac{as2}{p_3 + 2} h + \frac{h^2}{4(p_3 + 1)} \right) + \frac{h_2^3 - h_1^3}{3} \right) + \frac{E_m}{12} h^3 \right). \quad (4)$$

**Tun 1-2:**

$$A_{11} = \nu_0 \left( E_{cm} \left( \frac{as1}{p_1 + 1} - \frac{as2}{p_3 + 1} \right) + E_m h \right), \quad (5)$$

$$B_{11} = \nu_0 E_{cm} \left( as1 \left( \frac{h_1}{p_1 + 1} - \frac{as1}{p_1 + 2} \right) - as2 \left( \frac{h_2}{p_3 + 1} - \frac{as2}{p_3 + 2} \right) \right), \quad (6)$$

$$D_{11} = \nu_0 \left( E_{cm} \left( as1 \left( \frac{h_1^2}{p_1 + 1} - \frac{2as1}{p_1 + 2} h_1 + \frac{as1^2}{p_1 + 3} \right) - as2 \left( \frac{as2^2}{p_3 + 3} + 2h_2 \frac{as2}{p_3 + 2} h + \frac{h_2^2}{p_3 + 1} \right) \right) + \frac{E_m}{12} h^3 \right). \quad (7)$$

**Tun 2-1:**

$$A_{11} = \nu_0 \left( E_{cm} \left( \frac{as21}{p_2 + 1} - h_2 \right) + \frac{h}{2} (E_c + E_m) \right), \quad (8)$$

$$B_{11} = \nu_0 E_{cm} \left( \frac{as21}{p_2 + 2} \left( h_1 + \frac{h_2}{p_2 + 1} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - h_2^2 \right) \right), \quad (9)$$

$$D_{11} = v_0 \left( E_{cm} \left( as21 \left( \frac{h_2^2}{p_2 + 1} + \frac{2as21}{p_2 + 2} h_2 + \frac{(as21)^2}{p_2 + 3} \right) - \frac{h_2^3}{3} \right) + \frac{E_m + E_c}{24} h^3 \right). \quad (10)$$

**Тун 2-2:**

$$A_{11} = v_0 \left( E_{cm} \left( \frac{as21}{p_2 + 1} - h_2 \right) + \frac{h}{2} (E_c + E_m) \right), \quad (11)$$

$$B_{11} = v_0 E_{cm} \left( \frac{as21}{p_2 + 2} \left( h_2 + \frac{h_1}{p_2 + 1} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - h_2^2 \right) \right), \quad (12)$$

$$D_{11} = v_0 \left( E_{cm} \left( as21 \left( \frac{h_1^2}{p_2 + 1} + \frac{2as21}{p_2 + 2} h_1 + \frac{as21^2}{p_2 + 3} \right) - \frac{h_2^3}{3} \right) + \frac{E_m + E_c}{24} h^3 \right),$$

$$v_0 = \frac{1}{1 - v^2}, \quad E_{cm} = E_c - E_m,$$

$$as1 = \frac{h}{2} + h_1, \quad as2 = h_2 - \frac{h}{2}, \quad as21 = h_2 - h_1. \quad (13)$$

Зауважимо, що величини  $A_{12}$ ,  $A_{66}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{66}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{66}$  для всіх **Тунів** розташування шарів визначаються за формулами

$$R_{12} = vR_{11}, \quad R_{22} = vR_{11}, \quad R_{66} = \frac{1-v}{2} R_{11},$$

де  $R$  є загальним позначенням для відповідних коефіцієнтів  $A$ ,  $B$ ,  $D$ .

Рівняння руху пластини, яка стиснута силами в серединній поверхні, можна представити у вигляді

$$A_{11}(L_{11}u + L_{12}v) + B_{11}(L_{14}\Psi_x + L_{15}\Psi_y) = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2} + N\ell_1(w), \quad (14)$$

$$A_{11}(L_{21}u + L_{22}v) + B_{11}(L_{24}\Psi_x + L_{25}\Psi_y) = I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2} + N\ell_2(w), \quad (15)$$

$$L_{33}w + L_{34}\Psi_x + L_{35}\Psi_y = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N\ell_3(w), \quad (16)$$

$$B_{11}(L_{41}u + L_{42}v) + L_{43}w + (D_{11}L_{44} - K_s A_{66})\Psi_x + (D_{11}L_{45} - K_s A_{66})\Psi_y = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2} + N\ell_4(w), \quad (17)$$

$$B_{11}(L_{51}u + L_{52}v) + L_{53}w + D_{11}L_{54}\Psi_x + (D_{11}L_{55} - K_s A_{66})\Psi_y = I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2} + N\ell_5(w), \quad (18)$$

де

$$(I_0, I_1, I_2) = \sum_{r=1}^3 \int_{z_r}^{z_{r+1}} (\rho^{(r)})(1, z, z^2) dz,$$

$\rho^{(r)}$  – густина маси  $r$ -го шару. Аналітичні вирази для обчислення  $I_0$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  при умові  $v_m = v_c$  мають вигляд, подібний до формул (2)–(13), якщо замінити вирази  $E_{cm}$ ,  $E_c$ ,  $E_m$  на  $\rho_{cm}$ ,  $\rho_c$ ,  $\rho_m$  відповідно, а  $v_0$  покласти рівним одиниці:  $v_0 = 1$ .

Лінійні оператори  $L_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, 5$ , визначаються за такими формулами:

$$L_{11} = L_{14} = L_{41} = L_{44} = \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (19)$$

$$L_{22} = L_{25} = L_{52} = L_{55} = \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (20)$$

$$L_{12} = L_{21} = L_{24} = L_{42} = L_{45} = L_{54} = L_{15} = L_{51} = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad (21)$$

$$L_{13} = L_{31} = L_{32} = L_{23} = 0, \quad L_{33} = K_s A_{66} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad (22)$$

$$L_{34} = K_s A_{66} \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_{35} = K_s A_{66} \frac{\partial}{\partial y}, \quad L_{43} = -L_{34}, \quad L_{53} = -L_{35}. \quad (23)$$

Нелінійні вирази  $Nl_1(w)$ ,  $Nl_2(w)$ ,  $Nl_3(w)$ ,  $Nl_4(w)$ ,  $Nl_5(w)$  у правих частинах системи рівнянь (14)–(18) визначаються як

$$Nl_1(w) = -L_{11}(w) \frac{\partial w}{\partial x} - L_{12}(w) \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (24)$$

$$Nl_2(w) = -L_{12}(w) \frac{\partial w}{\partial x} - L_{22}(w) \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (25)$$

$$Nl_3(w) = - \left( N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad (26)$$

$$Nl_4(w) = -L_{41}(w) \frac{\partial w}{\partial x} - L_{42}(w) \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (27)$$

$$Nl_5(w) = -L_{42}(w) \frac{\partial w}{\partial x} - L_{44}(w) \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (28)$$

## 2. Метод розв'язування.

**2.1. Визначення неоднорідного докритичного стану ФГ тришарової пластини, стиснутої силами в серединній площині.** Для зручності в подальшому подамо деформації у вигляді суми лінійних і нелінійних доданків:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}^{(L)} + \{\varepsilon\}^{(N)},$$

де

$$\{\varepsilon\}^{(L)} = (\varepsilon_{11}^{(L)}, \varepsilon_{22}^{(L)}, \varepsilon_{12}^{(L)})^\top = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^\top,$$

$$\{\varepsilon\}^{(N)} = (\varepsilon_{11}^{(N)}, \varepsilon_{22}^{(N)}, \varepsilon_{12}^{(N)})^\top = \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right)^\top.$$

Тоді зусилля та моменти можна також записати як суму

$$\{N\} = \{N\}^{(L)} + \{N\}^{(N)},$$

де

$$\{N\}^{(L)} = (N_{11}^{(L)}, N_{22}^{(L)}, N_{12}^{(L)})^\top = [\mathbf{A}]\{\varepsilon\}^{(L)} + [\mathbf{B}]\{\chi\},$$

$$\{N\}^{(N)} = [\mathbf{A}]\{\varepsilon\}^{(N)},$$

$$\{M\}^{(L)} = (M_{11}^{(L)}, M_{22}^{(L)}, M_{12}^{(L)})^\top = [\mathbf{B}]\{\varepsilon\}^{(L)} + [\mathbf{D}]\{\chi\},$$

$$\{M\}^{(N)} = [\mathbf{B}]\{\varepsilon\}^{(N)}.$$

Зусилля, які виникають при стисненні пластини статичним навантаженням у серединній площині, в загальному випадку можна визначити як розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь, яка відповідає системі (14)–(18) і доповнена відповідними неоднорідними крайовими умовами для невідомих функцій  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\psi_x$ ,  $\psi_y$ . Зауважимо, що в цій роботі вважаємо, що статичне навантаження змінюється пропорційно деякому параметру  $\lambda$  і рівномірно розподілене вздовж навантаженої частини границі області. Таким чином, на навантаженої частині контуру ці крайові умови мають вигляд

$$N_n^{(L)}(u, v, w, \psi_x, \psi_y) = -1, \quad T_n^{(L)}(u, v, w, \psi_x, \psi_y) = 0,$$

де

$$N_n^{(L)}(u, v, w, \psi_x, \psi_y) = N_{11}^{(L)}\ell^2 + N_{22}^{(L)}m^2 + 2N_{12}^{(L)}\ell m,$$

$$T_n^{(L)}(u, v, w, \psi_x, \psi_y) = N_{12}^{(L)}(\ell^2 - m^2) + (N_{11}^{(L)} - N_{22}^{(L)})\ell m,$$

$\ell = \cos \alpha$ ,  $m = \cos \beta$  – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до границі області. Варіаційна постановка цієї задачі зводиться до знаходження мінімуму функціонала

$$\begin{aligned} I(u, v, w, \psi_x, \psi_y) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_{11}^{(L)}\varepsilon_{11}^{(L)} + N_{22}^{(L)}\varepsilon_{22}^{(L)} + N_{12}^{(L)}\varepsilon_{12}^{(L)} + \\ & + M_{11}^{(L)}\chi_{11} + M_{22}^{(L)}\chi_{22} + M_{12}^{(L)}\chi_{12} + Q_x\varepsilon_{13} + Q_y\varepsilon_{23}) d\Omega + \\ & + \int_{\partial\Omega_1} N_n^{(L)}(u\ell + vm) d\Omega_1. \end{aligned} \quad (29)$$

Мінімум функціонала (29) будемо шукати на множині функцій, які задовольняють головні (кінематичні) граничні умови. Систему базисних функцій побудовано за допомогою теорії  $R$ -функцій. Внаслідок розв'язання поставленої задачі знаходимо функції  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$ ,  $\psi_{x1}$ ,  $\psi_{y1}$ , а також зусилля  $\{N_0\}^{(L)} = (N_{11}^0, N_{22}^0, N_{12}^0)^\top$  і моменти  $\{M_0\}^{(L)} = (M_{11}^0, M_{22}^0, M_{12}^0)^\top$ , що визначаються як

$$\{N_0\}^{(L)} = [\mathbf{A}]\{\varepsilon_0\}^{(L)} + [\mathbf{B}]\{\chi_0\}, \quad \{M_0\}^{(L)} = [\mathbf{B}]\{\varepsilon_0\}^{(L)} + [\mathbf{D}]\{\chi_0\},$$

де

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_0\}^{(L)} = (\varepsilon_{11}^0, \varepsilon_{22}^0, \varepsilon_{12}^0)^\top &= \left( \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial v_1}{\partial y}, \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^\top, \\ \{\chi_0\} = (\chi_{11}^0, \chi_{22}^0, \chi_{12}^0)^\top &= \left( \frac{\partial \psi_{x1}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_{y1}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_{y1}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{x1}}{\partial y} \right)^\top. \end{aligned}$$

**2.2. Визначення критичного навантаження.** Для визначення критичного навантаження застосуємо динамічний підхід, згідно з яким розв'язання цієї задачі можна звести до еквівалентної варіаційної задачі про знаходження мінімуму функціонала

$$\begin{aligned} I(u, v, w, \psi_x, \psi_y) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [N_{11}^{(L)}\varepsilon_{11}^{(L)} + N_{22}^{(L)}\varepsilon_{22}^{(L)} + N_{12}^{(L)}\varepsilon_{12}^{(L)} + \\ & + M_{11}^{(L)}\chi_{11} + M_{22}^{(L)}\chi_{22} + M_{12}^{(L)}\chi_{12} + Q_x\varepsilon_{13} + Q_y\varepsilon_{23} + \\ & + p_{st}(N_{11}^0(w_{,x})^2 + N_{22}^0(w_{,y})^2 + N_{12}^0w_{,x}w_{,y})] d\Omega - \\ & - \frac{1}{2} \omega_L^2 \iint_{\Omega} (I_0(u^2 + v^2 + w^2) + I_1(\psi_x^2 + \psi_y^2)) d\Omega. \end{aligned} \quad (30)$$

У цьому випадку статична складова діючого навантаження  $p_{st}$  варіюється. Значення цього параметра збільшується, коли частота  $\omega_L$  коливань є дійсним числом, тобто пластина коливається біля положення рівноваги. Якщо частота має нульове значення або є комплексним числом, то положення пластини є нестійким. Таким чином, значення параметра  $p_{st}$ , яке відповідає найменшому невід'ємному значенню власної частоти і визначає величину критичного навантаження  $N_{cr}$ .

**2.3. Визначення власних частот та форм лінійних коливань ФГ пластин під дією сил в серединній площині.** Власні значення пластини під дією статичного навантаження, яке є деякою частиною критичного навантаження, можна також знайти з умов мінімуму функціонала (30) за умови задання конкретного значення  $p_{st}$ .

Як і раніше, мінімізацію функціонала (30) виконуємо на множині базисних функцій, побудованих за допомогою *RFM*.

**2.4. Дослідження геометрично нелінійних коливань.** При розв'язанні задачі про геометрично нелінійні коливання стиснутої пластини будемо нехтувати інерційними членами в рівняннях (14), (15), (17), (18). Невідомі функції  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  подамо у вигляді

$$w(x, y, t) = y(t)w_1^{(e)}, \quad (31)$$

$$u(x, y, t) = y(t)u_1^{(e)} + y^2(t)u_{11}, \quad v(x, y, t) = y(t)v_1^{(e)} + y^2(t)v_{11}, \quad (32)$$

$$\psi_x(x, y, t) = y(t)\psi_{x1}^{(e)} + y^2(t)\psi_{x11}, \quad \psi_y(x, y, t) = y(t)\psi_{y1}^{(e)} + y^2(t)\psi_{y11}, \quad (33)$$

де  $w_1^{(e)}(x, y)$ ,  $u_1^{(e)}(x, y)$ ,  $v_1^{(e)}(x, y)$ ,  $\psi_{x1}^{(e)}(x, y)$ ,  $\psi_{y1}^{(e)}(x, y)$  – власні функції, які відповідають основній власній частоті лінійних коливань пластини під дією навантаження  $p_{st}$ , а функції  $u_{11}$ ,  $v_{11}$ ,  $\psi_{x11}$ ,  $\psi_{y11}$  задовольняють систему рівнянь

$$\begin{aligned} L_{11}u_{11}(x, y) + L_{12}v_{11}(x, y) + L_{14}\psi_{x11}(x, y) + L_{15}\psi_{y11}(x, y) &= NL_1(w_1^{(e)}), \\ L_{21}u_{11}(x, y) + L_{22}v_{11}(x, y) + L_{24}\psi_{x11}(x, y) + L_{25}\psi_{y11}(x, y) &= NL_2(w_1^{(e)}), \\ L_{41}u_{11}(x, y) + L_{42}v_{11}(x, y) + L_{44}\psi_{x11}(x, y) + L_{45}\psi_{y11}(x, y) &= NL_4(w_1^{(e)}), \\ L_{51}u_{11}(x, y) + L_{52}v_{11}(x, y) + L_{54}\psi_{x11}(x, y) + L_{55}\psi_{y11}(x, y) &= NL_5(w_1^{(e)}), \end{aligned} \quad (34)$$

яка доповнена граничними умовами на навантаженій частині

$$\begin{aligned} N_n^{(L)}(u_{11}, v_{11}, \psi_{x1}, \psi_{y1}) &= -N_n^{(N)}(w_1^{(e)}), \\ T_n^{(L)}(u_{11}, v_{11}, \psi_{x1}, \psi_{y1}) &= -T_n^{(N)}(w_1^{(e)}). \end{aligned} \quad (35)$$

На інших частинах контуру геометричні граничні умови для функцій  $u_{11}$ ,  $v_{11}$ ,  $\psi_{x11}$ ,  $\psi_{y11}$  такі самі, як і в лінійній задачі, а статичні граничні умови мають вигляд (35), але є однорідними.

Лінійні оператори  $L_{rs}$ ,  $r, s = 1, \dots, 5$ , в системі (34) визначаємо за формулами (19)–(23). Праві частини  $NL_1(w_1^{(e)})$ ,  $NL_2(w_1^{(e)})$ ,  $NL_4(w_1^{(e)})$ ,  $NL_5(w_1^{(e)})$  рівнянь (34) визначаємо за формулами (24)–(28) за умови, що  $w = w_1^{(e)}$ . Можна довести, що варіаційна постановка задачі (34), (35) зводиться до знаходження стаціонарної точки функціонала



$$\begin{aligned}
I(u_{11}, v_{11}, \Psi_{x11}, \Psi_{y11}) = & \iint_{\Omega} \left( N_{11}^{(L)} \varepsilon_{11}^{(L)} + N_{22}^{(L)} \varepsilon_{22}^{(L)} + N_{12}^{(L)} \varepsilon_{12}^{(L)} + \right. \\
& + M_{11}^{(L)} \chi_{11}^{(L)} + M_{22}^{(L)} \chi_{22}^{(L)} + M_{12}^{(L)} \chi_{12}^{(L)} + K_s^2 A_{33} (\Psi_{x11}^2 + \Psi_{y11}^2) - \\
& - 2(NL_1(w_1^{(e)}))u_{11} + NL_2(w_1^{(e)})v_{11} + \\
& + NL_4(w_1^{(e)})\Psi_{x11} + NL_5(w_1^{(e)})\Psi_{y11} \left. \right) d\Omega - \\
& - 2 \int_{\partial\Omega} (F_1 u_{11}^{(n)} + F_2 v_{11}^{(n)} + F_3 \Psi_{x11}^{(n)} + F_4 \Psi_{y11}^{(n)}) ds, \tag{36}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
u_{11}^{(n)} &= u_{11} \ell + v_{11} m, & v_{11}^{(n)} &= -u_{11} m + v_{11} \ell, \\
\Psi_{x11}^{(n)} &= \Psi_{x11} \ell + \Psi_{y11} m, & \Psi_{y11}^{(n)} &= -\Psi_{x11} m + \Psi_{y11} \ell.
\end{aligned}$$

Вигляд функцій  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , в (36) залежить від заданих граничних умов. Наприклад, якщо пластина жорстко закріплена, або на границі задані умови нерухомого шарніру, то контурний інтеграл у (36) буде відсутнім.

Варіаційну задачу (36) розв'язуємо методом Рітца. Як і раніше, системи базисних функцій будуємо з використанням *RFM*.

Легко переконатися, що після підстановки виразів (31)–(33) у початкову систему (14)–(18), рівняння (14), (15), (17), (18) будуть задовольнятися то-тожню, а рівняння (16) після спрощення і застосування методу Бубнова – Гальборкіна (відносно власної функції  $w_1$ ) набуде вигляду

$$\ddot{y}(t) + (\omega_L^2 - p_N \alpha) y(t) + y^2(t) \beta + y^3(t) \gamma = 0. \tag{37}$$

Коефіцієнти рівняння (37) визначаємо за формулами

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{m_1 \|w_1^{(e)}\|^2} \iint_{\Omega} (N_{11}^0 w_{1,xx}^{(e)} + N_{22}^0 w_{1,yy}^{(e)} + 2N_{12}^0 w_{1,xy}^{(e)}) w_1^{(e)} dx dy, \\
\beta &= -\frac{1}{m_1 \|w_1^{(e)}\|^2} \iint_{\Omega} \left( L_{34} \Psi_{x2} + L_{35} \Psi_{y2} + N_{11}^{L_1} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x^2} + \right. \\
& \quad \left. + N_{22}^{L_1} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial y^2} + 2N_{12}^{L_1} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x \partial y} \right) w_1^{(e)} dx dy, \\
\gamma &= -\frac{1}{m_1 \|w_1^{(e)}\|^2} \iint_{\Omega} \left( NL_{33} w_1^{(e)} + N_{11}^{L_2} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x^2} + \right. \\
& \quad \left. + N_{22}^{L_2} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial y^2} + 2N_{12}^{L_2} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x \partial y} w_{1,xy}^{(e)} \right) w_1^{(e)} dx dy,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
NL_{33}(w) &= -\frac{1}{2} A_{11} \left( \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \\
& \quad - \frac{1}{2} \left( \nu \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (1 - \nu) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}$$

Вирази для  $N_{ij}^{L_1}$ ,  $N_{ij}^{L_2}$ ,  $i, j = 1, 2$ , мають вигляд

$$\begin{aligned}
\{N^{L_1}\} &= (N_{11}^{L_1}, N_{22}^{L_1}, N_{12}^{L_1})^\top = [\mathbf{A}]\{\varepsilon^{L_1}\} + [\mathbf{B}]\{\chi^{(e)}\}, \\
\{\varepsilon^{L_1}\} &= \left( \frac{\partial u_1^{(e)}}{\partial x}, \frac{\partial v_1^{(e)}}{\partial y}, \frac{\partial u_1^{(e)}}{\partial y} + \frac{\partial v_1^{(e)}}{\partial x} \right)^\top,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\chi^{(e)}\} &= \left( \frac{\partial \Psi_{x1}^{(e)}}{\partial x}, \frac{\partial \Psi_{y1}^{(e)}}{\partial y}, \frac{\partial \Psi_{y1}^{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_{x1}^{(e)}}{\partial y} \right)^{\top}, \\ \{N^{L_2}\} &= (N_{11}^{L_2}, N_{22}^{L_2}, N_{12}^{L_2})^{\top} = [\mathbf{A}]\{\varepsilon^{L_2}\} + [\mathbf{B}]\{\chi^{(11)}\}, \\ \{\varepsilon^{L_2}\} &= \left( \frac{\partial u_{11}}{\partial x}, \frac{\partial v_{11}}{\partial y}, \frac{\partial u_{11}}{\partial y} + \frac{\partial v_{11}}{\partial x} \right)^{\top}, \\ \{\chi^{(11)}\} &= \left( \frac{\partial \Psi_{x11}}{\partial x}, \frac{\partial \Psi_{y11}}{\partial y}, \frac{\partial \Psi_{y11}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_{x11}}{\partial y} \right)^{\top}. \end{aligned}$$

Враховуючи вираз (1) для  $p_N$ , рівняння (37) запишемо у вигляді

$$\ddot{y}(t) + \Omega_L^2(1 - 2k \cos \theta t)y(t) + y^2(t)\beta + y^3(t)\gamma = 0, \quad (38)$$

де

$$\Omega_L^2 = \omega_L^2 - \alpha p_{st}, \quad 2k = \frac{\alpha p_{dyn}}{\Omega_L^2}.$$

Якщо врахувати демпфування пластини з коефіцієнтом  $\varepsilon$ , то рівняння (38) набуде вигляду

$$\ddot{y}(t) + 2\varepsilon\dot{y}(t) + \Omega_L^2(1 - 2k \cos \theta t)y(t) + y^2(t)\beta + y^3(t)\gamma = 0. \quad (39)$$

У випадку дії на пластину періодичного навантаження виникає потреба визначення зон динамічної нестійкості системи. Для дослідження стійкості, як показано в [1], достатньо розглянути лінеаризоване рівняння (39), тобто, покладаючи  $\beta = 0$  і  $\gamma = 0$ , одержимо рівняння

$$\ddot{y}(t) + \varepsilon\dot{y}(t) + \Omega_L^2(1 - 2k \cos(\theta t))y(t) = 0. \quad (40)$$

Відомо, що для рівняння (40) (рівняння Матьє) головна область нестійкості (поблизу  $\theta = 2\Omega_L$ ) обмежена кривими [1]:

$$2\Omega_L \sqrt{1 - \sqrt{k^2 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2}} \leq \theta \leq 2\Omega_L \sqrt{1 + \sqrt{k^2 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2}},$$

де через  $\Delta = \frac{\pi\varepsilon}{\Omega}$  позначено декремент затухання [1]. При  $\varepsilon = 0$  маємо

$$\theta_1 = 2\Omega_L \sqrt{1 - k},$$

$$\theta_2 = 2\Omega_L \sqrt{1 + k}.$$

В цьому інтервалі виникає головний параметричний резонанс.

### 3. Числові результати

**3.1. Розв'язання тестових задач.** Для підтвердження вірогідності запропонованого алгоритму та розробленого програмного забезпечення наведемо порівняння одержаних числових результатів з відомими для декількох задач.

**Задача 1.** Розглянемо квадратну пластину, що виготовлена з ФГ матеріалу  $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ , фізичні характеристики якого наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Матеріал	Фізичні властивості складових компонентів ФГМ		
	$E$ , ГПа	$\nu$	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Aluminum (Al)	70	0.3	2707
Alumina ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ )	380	0.3	3800

Вважаємо, що пластина вільно оперта і стискається рівномірно вздовж сторін  $x = \pm a$ . Відношення товщини пластини до довжини сторони дорівнює 0.1, тобто  $h/2a = 0.1$ .

У табл. 2 для різних значень показника степеневого закону  $p$ , який визначає розподіл складових матеріалу, наведено порівняння значень безрозмірного частотного параметра  $\Lambda = \omega_L h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}$  і критичного навантаження  $N_{cr} = \frac{N_x^{(0)}}{E_c}$  ФГ пластини з результатами, представленими в роботі [12].

Таблиця 2

	Метод	Значення індексу $p$ у степеневому законі розподілу матеріалу				
		$p = 0$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 4$	$p = 10$
$\Lambda$	<i>RFM</i>	0.05769	0.04996	0.04419	0.03823	0.03658
	[12]	0.05777	0.04917	0.04426	0.03829	0.03642
$N_{cr}$	<i>RFM</i>	0.03421	0.02228	0.01723	0.01157	0.00975
	[12]	0.03381	0.02214	0.01698	0.01131	0.00990

Наведені результати свідчать про їх добре узгодження.

**Задача 2.** Розглянемо тришарову квадратну пластину *Tunyu 1-1*, нижній і верхній шари якої виготовлені із суміші  $Al/Al_2O_3$ , а заповнювач – з металу. Схеми розподілу товщини шарів вважаються різними, але значення індексів степеневого закону для всіх шарів приймаються однаковими, тобто  $p_1 = p_2 = p_3 = p$ . Припустимо, що пластина вільно оперта по всій границі та стискається рівномірно вздовж сторін  $x = \pm a$  та  $y = \pm b$ . Відносна товщина пластини дорівнює  $h/2a = 0.1$ .

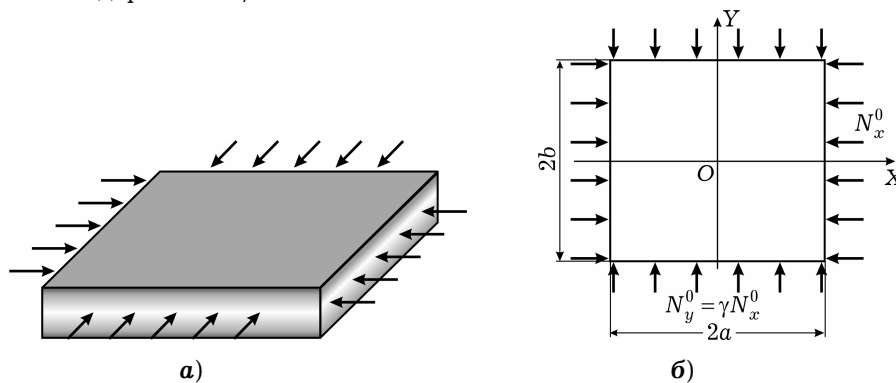


Рис. 2

Подібна задача розв'язана в роботах [11, 13, 15, 23] у рамках різних теорій. У табл. 3 – табл. 4 наведено порівняння обчислених безрозмірних власних частот  $\Lambda = \frac{\omega_L (2a)^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}$  і критичного навантаження  $\hat{N}_{cr} = \frac{N_{cr}}{100E_0 h^3}$  із заданими значеннями  $E_0 = 1$  ГПа,  $\rho_0 = 1$  кг/м<sup>3</sup>. Представлені результати одержано при апроксимації невизначених компонент у структурних формулах степеневими поліномами до 14-го та 11-го степенів для функції  $w$  і функцій  $u$ ,  $v$ ,  $\psi_x$ ,  $\psi_y$ , що відповідає збереженню 36-ти та 21-ї координатних функцій відповідно. Для обчислення інтегралів у матриці Рітца було використано десятиточкові формули Гаусса та інтегрування здійснено по чверті області.

Таблиця 3

Безрозмірні власні частоти $\Lambda = \omega_L(2a)^2 \sqrt{\rho_0/E_0}/h$							
p	Метод	Відношення товщин шарів $h^{(1)} : h^{(2)} : h^{(3)}$					
		1:0:1	2:1:2	2:1:1	1:1:1	2:2:1	1:2:1
0	<i>RFM</i>	1.8286	1.8286	1.8286	1.8286	1.8286	1.8286
	[23]	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245
	[13]	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245
	[11]	1.8268	1.8268	1.8268	1.8268	1.8268	1.8268
0.5	<i>RFM</i>	1.4443	1.4841	1.5070	1.5197	1.5481	1.5757
	[23]	1.4444	1.4842	1.5126	1.5193	1.5520	1.5745
	[13]	1.4442	1.4840	1.5064	1.5192	1.5471	1.5746
	[11]	1.4461	1.4861	–	1.5213	1.5493	1.5767
1	<i>RFM</i>	1.2422	1.2991	1.3330	1.3528	1.3956	1.4396
	[23]	1.2433	1.3002	1.3489	1.3534	1.4079	1.4393
	[13]	1.2431	1.3000	1.3333	1.3533	1.3956	1.4394
	[11]	1.2447	1.3018	–	1.3552	1.3976	1.4414
5	<i>RFM</i>	0.9439	0.9798	1.0292	1.0430	1.1078	1.1731
	[23]	0.9463	0.9821	1.0744	1.0448	1.1474	1.1740
	[13]	0.9457	0.9817	1.0303	1.0445	1.1087	1.1740
	[11]	0.9448	0.9810	–	1.0453	1.1098	1.1757
10	<i>RFM</i>	0.9266	0.9407	0.9906	0.9936	1.0597	1.1220
	[23]	0.9287	0.9433	1.0456	0.9952	1.0415	1.1346
	[13]	0.9281	0.9427	0.9918	0.9954	1.0608	1.1231
	[11]	0.9273	0.9408	–	0.9952	1.0610	1.1247

Таблиця 4

Безрозмірні критичні навантаження $\hat{N}_{cr} = \frac{N_{cr}}{100E_0h^3}$							
p	Метод	Відношення товщин шарів $h^{(1)} : h^{(2)} : h^{(3)}$					
		1:0:1	2:1:2	2:1:1	1:1:1	2:2:1	1:2:1
0	<i>RFM</i>	6.5000	6.5000	6.5000	6.5000	6.5000	6.5000
	[23]	6.5030	6.5030	6.5030	6.5030	6.5030	6.5030
	[13]	6.5028	6.5028	6.5028	6.5028	6.5028	6.5028
	[11]	6.4765	6.4765	6.4765	6.4765	6.4765	6.4765
0.5	<i>RFM</i>	3.667	3.958	4.101	4.205	4.392	4.597
	[23]	3.6828	3.9709	4.1127	4.2186	4.4052	4.6083
	[13]	3.6819	3.9702	4.1124	4.2182	4.4051	4.6088
	[11]	3.5809	3.8581	3.9948	4.0964	4.2759	4.4711
1	<i>RFM</i>	2.572	2.906	3.086	3.219	3.462	3.742
	[23]	2.5842	2.9206	3.0973	3.2327	3.4749	3.7531
	[13]	2.5831	2.9197	3.0968	3.2322	3.4748	3.7536
	[11]	2.5306	2.8556	3.0273	3.1575	3.3921	3.6601
5	<i>RFM</i>	1.319	1.512	1.692	1.780	2.048	2.355
	[23]	1.3300	1.5220	1.7022	1.7903	2.0564	2.3674
	[13]	1.3284	1.5207	1.7014	1.7894	2.0558	2.3673
	[11]	1.3183	1.5041	1.6813	1.7651	2.0253	2.3235
10	<i>RFM</i>	1.235	1.363	1.537	1.589	1.844	2.131
	[23]	1.2447	1.3742	1.5672	1.5973	1.5729	2.1909
	[13]	1.2429	1.3725	1.5456	1.5969	1.8534	2.1398
	[11]	1.2360	1.3604	1.5304	1.5789	1.8308	2.1027

Порівняння даних у табл. 3 і табл. 4 свідчить про добре узгодження одержаних результатів з відомими в літературі.

**3.2. Дослідження стійкості та коливань тришарових ФГ пластин зі складною формою плану.** Для ілюстрації ефективності та універсальності запропонованого підходу застосуємо його для дослідження тришарової пластини зі складною геометричною формою плану.

**Задача 1.** Розглянемо рівномірно стиснуту тришарову ФГ пластину, форму плану якої зображено на рис. 3а.

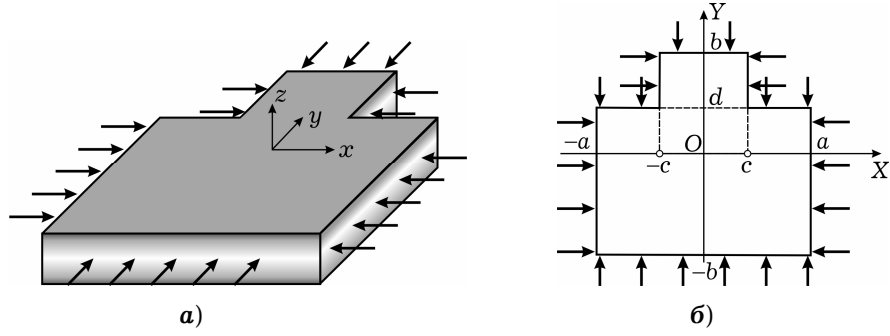


Рис. 3

Припустимо, що ФГ матеріал пластини виготовлено із суміші  $Al/Al_2O_3$ . Геометричні параметри вибрано такими:

$$b/a = 1, \quad c/2a = 0.3, \quad d/2a = 0.25, \quad h/2a = 0.1.$$

Нехай пластина вільно оперта вздовж всієї границі. Тоді граничні умови мають такий вигляд:

$$w = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega,$$

$$u = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega^{(u)},$$

$$\partial\Omega^{(u)} = \{(x, y) \mid (y = -b, |x| \leq a) \cup$$

$$(y = d, x \in [-a, -c] \cup [c, a]) \cup (y = b, |x| \leq c)\},$$

$$v = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega^{(v)},$$

$$\partial\Omega^{(v)} = \{(x, y) \mid (x = \pm a, -b \leq y \leq d) \cup (x = \pm c, d \leq y \leq b)\},$$

$$\psi_x = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega^{(\psi_x)},$$

$$\partial\Omega^{(\psi_x)} = \{(x, y) \mid (y = -b, |x| \leq a) \cup$$

$$(y = d, x \in [-a, -c] \cup [c, a]) \cup (y = b, |x| \leq c)\},$$

$$\psi_y = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega^{(\psi_y)},$$

$$\partial\Omega^{(\psi_y)} = \{(x, y) \mid (x = \pm a, -b \leq y \leq d) \cup (x = \pm c, d \leq y \leq b)\}.$$

Згідно з методом  $R$ -функцій, для того щоб побудувати послідовність координатних функцій, треба, перш за все, побудувати структуру розв'язку, яка задовольняє задані граничні умови. Очевидно, що таку структуру можна вибрати у вигляді

$$w = \omega^{(w)}\Phi_1, \quad u = \omega^{(u)}\Phi_2, \quad v = \omega^{(v)}\Phi_3,$$

$$\psi_x = \omega^{(\psi_x)}\Phi_4, \quad \psi_y = \omega^{(\psi_y)}\Phi_5, \quad (41)$$

де  $\Phi_i, i = 1, \dots, 5$ , – невизначені компоненти структури розв'язку [3, 4, 10].

Функції  $\omega^{(u)}, \omega^{(v)}, \omega^{(w)}, \omega^{(\psi_x)}, \omega^{(\psi_y)}$  побудовано за допомогою теорії  $R$ -функцій таким чином, щоб вони були нульовими на тій частині границі, де відповідні невідомі функції  $u, v, w, \psi_x, \psi_y$  повинні дорівнювати нулеві.

Нижче наведено вирази для цих функцій:

$$\begin{aligned}
\omega^{(w)} &= (f_3 \vee_0 f_4) \wedge_0 (f_1 \wedge_0 f_2), \\
\omega^{(v)} &= \omega^{(\psi_y)} = (f_3 \vee_0 f_4) \vee_0 (f_5 \vee_0 f_6) \vee_0 f_1, \\
\omega^{(u)} &= \omega^{(\psi_x)} = (f_3 \vee_0 f_4) \vee_0 (f_7 \vee_0 f_8) \vee_0 f_2,
\end{aligned} \tag{42}$$

де  $\wedge_0, \vee_0$  – символи  $R$ -операцій [4] з системи  $R_0$ , що визначаються формулами:

$$\begin{aligned}
x_1 \wedge_0 x_2 &\equiv x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\
x_1 \vee_0 x_2 &\equiv x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.
\end{aligned}$$

Функції  $f_i, i = 1, \dots, 8$ , у виразах (42) мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
f_1 &= (a^2 - x^2) / 2a \geq 0, \quad f_2 = (b^2 - y^2) / 2b \geq 0, \\
f_3 &= (d - y) / 2d \geq 0, \quad f_4 = (c^2 - x^2) / 2d \geq 0, \\
f_5 &= (r_1^2 - (x - c_2)^2 - (y - d)^2) / 2r_1 \geq 0, \\
f_6 &= (r_1^2 - (x + c_2)^2 - (y - d)^2) / 2r_1 \geq 0, \\
f_7 &= (r_2^2 - (x - c)^2 - (y - d_2)^2) / 2r_2 \geq 0, \\
f_8 &= (r_2^2 - (x + c)^2 - (y - d_2)^2) / 2r_2 \geq 0, \\
r_1 &= (a - c) / 2, \quad r_2 = (b - d) / 2, \quad c_2 = (a + c) / 2, \quad d_2 = (b + d) / 2.
\end{aligned}$$

Невизначені компоненти  $\Phi_i, i = 1, \dots, 5$ , у структурних формулах (41) представлено у вигляді усіченого ряду за деякою повною системою функцій. У цій роботі використовуємо систему степеневих поліномів. Враховуючи симетрію області відносно осі  $Oy$ , вибираємо таку систему:

$$\begin{aligned}
&\Phi_1, \Phi_3, \Phi_5: \\
&1, y, x^2, y^2, x^2y, y^3, x^4, x^2y^2, y^4, x^4y, x^2y^3, y^5, x^6, x^4y^2, x^2y^4, y^6, \dots, \\
&\Phi_2, \Phi_4: \\
&x, xy, x^3, xy^2, x^3y, xy^3, x^5, x^3y^2, xy^4, x^5y, x^3y^3, xy^5, \dots
\end{aligned}$$

При формуванні матриці Рітца для обчислення інтегралів використано десятиточкові квадратурні формули Гауса. Внаслідок проведеного обчислювального експерименту встановлено, що для досягнення збіжності результатів у третьому знаку досить обмежитися 13-м степенем поліномів для компоненти  $\Phi_1$  та 11-м степенем для невизначених компонент  $\Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5$ , що відповідає використанню 56-ти координатних функцій для прогину  $w$  і 42-х – для переміщень  $u, v$  і кутів повороту  $\psi_x, \psi_y$ . Для перевірки вірогідності отриманих результатів у випадку складної геометрії розміри геометричної форми змінювали таким чином, щоб вибрана область практично не відрізнялась від квадратної, наприклад, приймаючи такі значення для  $c$  і  $d$ , щоб  $c/2a = 0.48$  і  $d/2a = 0.48$ .

У табл. 5 наведено порівняння значень одержаного критичного навантаження  $\hat{N}_{cr} = \frac{N_{cr}}{100E_0h^3}$  для пластин **Тупу 1-1** при  $p = 0.5$  з аналогічними результатами для квадратної пластини.

Таблиця 5

Значення критичного навантаження $\hat{N}_{cr} = \frac{N_{cr}}{100E_0h^3}$							
$c/a = d/a$	Метод	Відношення товщин шарів $h^{(1)} : h^{(2)} : h^{(3)}$					
		1:0:1	2:1:2	2:1:1	1:1:1	2:2:1	1:2:1
0.96	<i>RFM</i>	3.673	3.961	4.104	4.210	4.398	4.6028
1	<i>RFM</i>	3.667	3.958	4.101	4.205	4.392	4.597
	[23]	3.6828	3.9709	4.1127	4.2185	4.4052	4.6083
	[13]	3.6783	3.9676	1.1000	4.2162	4.4030	4.6076
	[11]	3.5810	3.8581	3.9948	4.0964	4.2759	4.4711

Аналіз даних з табл. 5 свідчить, що результати практично співпадають з несуттєвим збільшенням для складної форми, що відповідає фізичному змісту задачі.

У табл. 6 наведено залежності безрозмірних значень критичного навантаження  $\hat{N}_{cr} = \frac{N_{cr}}{100E_0h^3}$  і власної частоти  $\Lambda = \frac{\omega_L(2a)^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}$  від значень показника  $p$  у степеневому законі розподілу матеріалу для тришарових  $\Phi\Gamma$  пластин різних **Tuniv** (1-1, 1-2, 2-2) з геометричними параметрами  $c/2a = 0.3$ ,  $d/2a = 0.25$ ,  $h/2a = 0.1$ . Розподіл товщин шарів приймаємо за схемою  $h^{(1)} : h^{(2)} : h^{(3)} = 1 : 2 : 1$ .

Таблиця 6

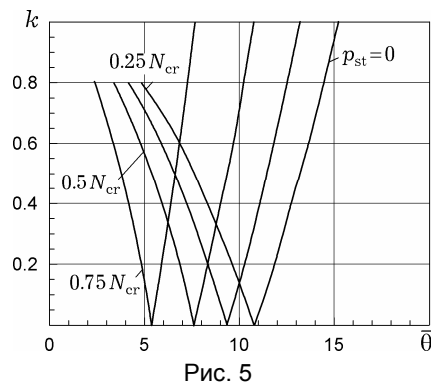
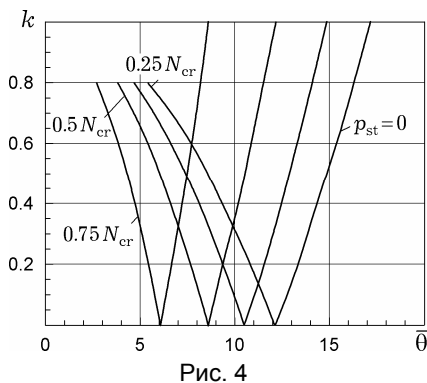
Критичне навантаження $\hat{N}_{cr}$ і власні частоти $\Lambda$							
<b>Tun</b>		$p = 0$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 10$	$p = 100$
1-1	$\hat{N}_{cr}$	9.915	7.205	5.966	3.905	3.560	3.245
	$\Lambda$	2.375	2.080	1.919	1.599	1.537	1.477
1-2	$\hat{N}_{cr}$	8.215	6.537	5.597	3.343	2.705	1.931
	$\Lambda$	2.330	2.138	2.009	1.603	1.454	1.240
2-2	$\hat{N}_{cr}$	5.864	4.841	4.381	3.754	3.685	3.625
	$\Lambda$	1.902	1.773	1.709	1.624	1.619	1.617

Як видно з табл. 6, тип матеріалу шарів пластини суттєво впливає на власні частоти та критичне навантаження. Для всіх значень параметра  $p$  значення критичного навантаження для пластин **Tuniv** 1-1 перебільшує відповідне значення для пластин **Tuniv** 1-2. Що стосується пластин **Tuniv** 2-2, то для  $0 \leq p \leq 5$  критичні навантаження та власні частоти для таких пластин менші порівняно з пластинами **Tuniv** 1-1 та 1-2. Але якщо  $p > 5$ , то, навпаки, значення критичного навантаження та значення власних частот для цього типу пластин починають перевищувати відповідні значення для пластин **Tuniv** 1-1 та 1-2 для даної схеми розподілу товщини шарів.

На рис. 3 і рис. 4 показано області динамічної нестійкості пластин **Tuniv** 1-1 (рис. 3) і **Tuniv** 2-2 (рис. 4) для різних значень статичного навантаження. Відношення товщин шарів в обох випадках прийнято як  $h^{(1)} : h^{(2)} : h^{(3)} = 1 : 2 : 1$ . Значення показника степеневому закону  $p$ , який визначає розподіл складових матеріалу, прийнято рівним одиниці ( $p=1$ ). Безрозмірні значення збуджуючих частот  $\bar{\theta}$  визначаються за формулою

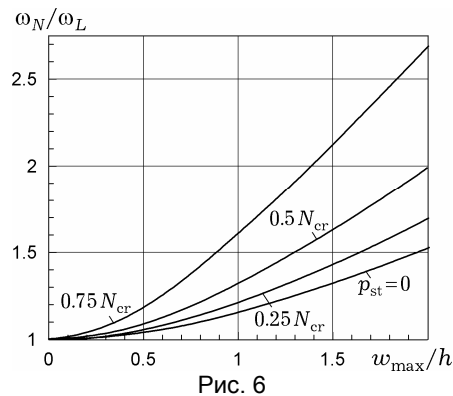
$$\bar{\theta} = 2\Lambda\sqrt{1 \pm k},$$

де  $\bar{\Lambda} = \Omega_L (2a)^2 \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c h^2}}$ ,  $\Omega_L$  – власна частота, яка відповідає заданому статичному навантаженню  $p_{st}$ .



Як бачимо на рис. 4, рис. 5, значення статичної складової істотно впливає на розмір і розміщення області динамічної нестійкості. Збільшення  $p_{st}$  зумовлює зсув областей нестійкості в бік менших значень збуджуючої частоти. При збільшенні статичної складової зони динамічної нестійкості звужуються і відповідають меншим значенням частоти збуджуючого навантаження.

На рис. 6 зображено скелетні криві, одержані для різних значень статичної складової для пластин **Типу 1-1** зі схемою відношення товщин шарів 1:2:1 і значенням показника  $p = 1$ . Для пластин **Типу 2-2** поведінка скелетних кривих є подібною до поведінки кривих для пластин **Типу 1-1**, наведених на рис. 6. Аналізуючи ці криві, можна зробити висновок, що при зростанні статичної складової залежність від прогину відношення нелінійної частоти до лінійної суттєво збільшується для обох типів пластин: **Типів 1-1** та **2-2**.



**Висновки.** У роботі запропоновано метод дослідження параметричних коливань та стійкості тришарових функціонально-градієнтних пластин зі складною формою плану. Математичну постановку задачі виконано в рамках уточненої теорії пластин першого порядку типу Тимошенка. Метод дозволяє враховувати неоднорідний докритичний стан пластини, різні крайові умови, схеми розташування шарів і базується на використанні теорії  $R$ -функцій і варіаційних методів. Ефективні властивості ФГМ обчислюються за степеневим законом. На основі розробленого програмного забезпечення виконано тестування запропонованого підходу та порівняння одержаних результатів з відомими. Для ілюстрації можливостей методу розглянуто тришарову пластину складної геометричної форми, яка знаходиться під дією статичного та динамічного навантаження. Обчислено власні частоти та критичні навантаження, побудовано області динамічної нестійкості пластини та скелетні криві для деяких типів розташування шарів. Одержані результати можуть бути використані як перше наближення для дослідження геометрично нелінійних коливань пластини, оскільки враховано тільки одну моду. В подальшому планується розвинути підхід з урахуванням багатомодової апроксимації невідомих функцій.



1. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – Москва: Гостехиздат, 1956. – 600 с.  
Te same: *Bolotin V. V.* The dynamic stability of elastic systems. – San Francisco: Holden-Day, 1964. – xii+451 p.
2. *Курпа Л. В., Мазур О. С., Ткаченко В. В.* Параметричні коливання багатошарових пластин складної форми // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2013. – **56**, № 2. – С. 136–150.  
Te same: *Kurpa L. V., Mazur O. S., Tkachenko V. V.* Parametric vibration of multilayer plates of complex shape // *J. Math. Sci.* – 2014. – **203**, No. 2. – P. 165–184. – <https://doi.org/10.1007/s10958-014-2098-2>.
3. *Курпа Л. В., Мазур О. С., Шматко Т. В.* Применение теории  $R$ -функций к решению нелинейных задач динамики многослойных пластин. – Харьков: ООО «В деле», 2016. – 492 с.
4. *Рвачев В. Л.* Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
5. *Argento A., Scott R. A.* Dynamic instability of layered anisotropic circular cylindrical shells. Part II: Numerical results // *J. Sound Vib.* – 1993. – **162**, No. 2. – P. 323–332. – <https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1121>.
6. *Awrejcewicz J., Kurpa L., Mazur O.* Dynamical instability of laminated plates with external cutout // *Int. J. Nonlin. Mech.* – 2016. – **81**. – P. 103–114. – <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2016.01.002>.
7. *Dash S., Asha A. V., Sahu S. K.* Stability of laminated composite curved panels with cutout using finite element method // *Proc. 3rd Int. Conf. Theor., Appl. Comput. & Exp. Mech. (ICTACEM-2004)*, Dec. 28–31, 2004, IIT Kharagpur, India. – <http://hdl.handle.net/2080/316>.
8. *Koizumi M.* The concept of FGM // *Ceramic Transactions.* – 1993. – **34**. – P. 3–10.
9. *Kumar Y.* The Rayleigh – Ritz method for linear dynamic, static and buckling behavior of beams, shells and plates: A literature review // *J. Vib. Control.* – 2017. – **24**, No. 7. – P. 1205–1227. – <https://doi.org/10.1177/1077546317694724>.
10. *Kurpa L., Mazur O., Tkachenko V.* Dynamical stability and parametrical vibrations of the laminated plates with complex shape // *Lat. Am. J. Solids Struct.* – 2013. – **10**, № 1. – P. 175–188.
11. *Li Q., Iu V. P., Kou K. P.* Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates // *J. Sound Vib.* – 2008. – **311**, No. 1-2. – P. 498–515. – <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.09.018>.
12. *Matsunaga H.* Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory // *Compos. Struct.* – 2008. – **84**, No. 2. – P. 132–146. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.07.006>.
13. *Meiche N. E., Tounsi A., Ziane N., Mechab I., Adda Bedia E. A.* A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate // *Int. J. Mech. Sci.* – 2011. – **53**, No. 4. – P. 237–247. – <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.01.004>.
14. *Nemeth M. P.* Buckling and postbuckling behavior of laminated composite plates with a cutout. – NASA Technical Paper 3587, 1996. – 23 p.
15. *Neves A. M. A., Ferreira A. J. M., Carrera E., Cinefra M., Jorge R. M. N., Soares C. M. M.* Buckling analysis of sandwich plates with functionally graded skins using a new quasi-3D hyperbolic sine shear deformation theory and collocation with radial basis functions // *ZAMM. – Z. Angew. Math. Mech.* – 2012. – **92**, No. 9. – P. 749–766. – <https://doi.org/10.1002/zamm.201100186>.
16. *Ng T. Y., Lam K. Y., Reddy J. N.* Dynamic stability of cross-ply laminated composite cylindrical shells // *Int. J. Mech. Sci.* – 1998. – **40**, No. 8. – P. 805–823. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(97\)00143-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(97)00143-4).
17. *Sahu S. K., Datta P. K.* Research advances in the dynamic stability behavior of plates and shells: 1987–2005. – Part 1: Conservative systems // *Appl. Mech. Rev.* – 2007. – **60**, No. 2. – P. 65–75. – <https://doi.org/10.1115/1.2515580>.
18. *Shen H. S.* Functionally graded materials of plates and shells. – Boca Raton, FL: CRC Press. – 2009. – 280 p.
19. *Simitses G. J.* Instability of dynamically loaded structures // *Appl. Mech. Rev.* – 1987. – **40**, No. 10. – P. 1403–1408. – <https://doi.org/10.1115/1.3149542>.
20. *Singha M. K., Daripa R.* Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates // *J. Sound Vib.* – 2009. – **328**, No. 4-5. – P. 541–554.

- <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.08.020>.
21. Swaminathan K., Naveenkumar D. T., Zenkour A. M., Carrera E. Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates – A state-of-the-art review // Compos. Struct. – 2015. – **120**. – P. 10–31. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.09.070>.
  22. Thai H.-T., Kim S.-E. A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells // J. Compos. Struct. – 2015. – **128**. – P. 70–86. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.03.010>.
  23. Zencour A. M. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2 – Buckling and free vibration // Int. J. Solids Struct. – 2005. – **42**, No. 18–19. – P. 5243–5258. – <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.016>.

#### ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ R-ФУНКЦИЙ И ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Предложен численно-аналитический метод исследования свободных колебаний и устойчивости функционально-градиентных пластин типа «сэндвич» с использованием уточненной теории первого порядка типа Тимошенко. Рассмотрены разные схемы расположения слоев: 1) наполнитель является функционально-градиентным материалом, а верхний и нижний слои изготовлены из изотропных материалов, и 2) наоборот, наполнитель изготовлен из изотропного материала, а верхний и нижний слои – из функционально-градиентных материалов. В основу разработанного метода положено использование теории R-функций и вариационного метода Ритца. Предложенный метод и созданное программное обеспечение учитывают наличие неоднородного докритического состояния пластины. Получены аналитические выражения для вычисления упругих постоянных и плотности материала при условии, что значения коэффициентов Пуассона являются одинаковыми для составляющих функционально-градиентных материалов. Выполнено сравнение полученных числовых результатов для собственных частот и критической нагрузки с известными результатами. В качестве демонстрации возможностей предложенного подхода выполнены расчеты пластин сложной геометрической формы, нагруженные в срединной плоскости. Изучено влияние различных геометрических и механических параметров на динамическое поведение пластины, критическую нагрузку и зоны динамической неустойчивости.

**Ключевые слова:** свободные колебания, устойчивость пластин типа «сэндвич», функционально-градиентные пластины, теория R-функций.

#### INVESTIGATION OF FREE VIBRATIONS AND STABILITY OF FUNCTIONALLY GRADED THREE-LAYER PLATES BY MEANS OF THE R-FUNCTIONS AND VARIATIONAL METHODS

A numerical-analytical method for studying free vibrations and stability of functionally graded sandwich plates using the refined first-order theory of Timoshenko type is proposed. Different layouts of layers are considered: 1) the filler is a functionally graded material, and the upper and lower layers are made of isotropic materials, and 2) vice versa, the filler is made of isotropic material, and the upper and lower layers are made of functionally graded materials. The developed method is based on the use of the theory of R-functions and the Ritz variational method. The proposed method and the software created take into account the presence of an inhomogeneous subcritical state of the plate. Analytical expressions are obtained for calculating the elastic constants and the density of the material under the condition that Poisson's ratio values are the same for the constituents of functionally graded material. The numerical results obtained for the natural frequencies and critical loads are compared with known results. As a demonstration of the possibilities of the proposed approach, the calculations of the plates of a complex geometric shape, loaded in the middle surface analyzed. The influence of various geometric and mechanical parameters on the dynamic behavior of the plate, the critical load, and the zones of dynamic instability has been studied.

**Key words:** free vibrations, stability of sandwich plates, functionally graded plates, theory of R-functions.