УДК 517.946

А. С. Гупало, Г. П. Лопушанская

РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СИЛЬНОЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В ряде работ [1, 2, 5, 6, 8, 9, 11—13] доказана разрешимость граничных задач для эллиптических уравнений и систем в различных пространствах обобщенных функций, а в отдельных работах получено представление решений рассматриваемых задач в некоторых функциональных пространствах с помощью фундаментальных решений, функций или матриц Грина [1, 2, 5, 6, 8, 9, 13]. В данной работе развит подход к граничным задачам для эллиптических уравнений и систем в пространствах обобщенных функций в смысле работ [2, 5, 6, 13] и удалось доказать единственность и получить представления решений внутренней и внешней задач Дирихле для неоднородной сильноэллиптической системы второго порядка вариационного типа

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u \equiv \sum_{k,l=1}^{n} A_{kl}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = F \tag{1}$$

($A_{kl} = A_{lk} = A'_{kl}$ — действительные постоянные квадратные матрицы порядка p, штрих означает транспонирование) в достаточно широких классах обобщенных функций. Классические граничные задачи для этой системы исследованы в работах [3, 4].

Пусть Ω — область в R^n, $n \geqslant 3$, ограниченная замкнутой n — 1-мерной поверхностью S класса C^∞; $[D(\bar\Omega)]^p$, $[D(S)]^p$ — пространства бесконечно дифференцируемых (основных) вектор-функций φ в $\bar\Omega = \Omega \cup S$ и на S соответственно; $[D_0(\bar\Omega)]^p$ — пространство бесконечно дифференцируемых вектор-функций в $\bar\Omega$, обращающихся в нуль на поверхности S; $[D'(\bar\Omega)]^p$, $[D'(S)]^p$, $[D_0'(\bar\Omega)]^p$ — пространства линейных непрерывных функционалов (обобщенных вектор-функций) над $[D(\bar\Omega)]^p$, $[D(S)]^p$, $[D_0(\bar\Omega)]^p$ соответственно; (φ, F) — действие обобщенной вектор-функции $F \in [D'(\bar\Omega)]^p$ ($F \in [D_0'(\bar\Omega)]^p$) на основную вектор-функцию $\varphi \in [D(\bar\Omega)]^p$ ($\varphi \in [D_0(\bar\Omega)]^p$); $\langle\varphi, F\rangle$ — действие $F \in [D'(S)]^p$ на $\varphi \in [D(S)]^p$.

Постановка задачи. Пусть $F \in [D_0'(\bar\Omega)]^p$, $B \in [D'(S)]^p$. Найти решение $u(x)$ системы (1) в области Ω, которое удовлетворяет условию

$$u = B \tag{2}$$

на поверхности S.

Вектор-функцию $u \in [D'(\bar\Omega)]^p$ называем решением задачи (1), (2), если

$$\left(A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x),\, u\right) - (\psi, F) = \frac{1}{2}\left\langle C^{(\nu)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x),\, B\right\rangle \tag{3}$$

для каждой $\psi \in [D_0(\bar\Omega)]^p$. Здесь $C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = -2\sum_{k,l=1}^{n} \tilde A'_{kl}\nu_l(y)\,\frac{\partial}{\partial x_k}$ — граничный оператор типа Неймана [3]; матрицы $\tilde A_{kl} = \tilde A'_{lk}$ определяются единственным образом матрицами A_{kl}; $\nu_l(y)$ — компоненты единичного вектора $\nu(y)$ внутренней нормали к S в точке y.

Лемма 1. Решение задачи (1), (2) в смысле (3) единственно.

Действительно, предполагая, что существуют два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ задачи, для вектор-функции $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ из формулы (3) получаем

$$\left(A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x), u\right) = 0 \quad \forall \psi \in [D_0(\bar{\Omega})]^p. \tag{4}$$

Из работы [4] следует существование единственного решения $\psi(x)$ уравнения $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) = \varphi(x)$, удовлетворяющего условию $\psi|_S = 0$, для каждой $\varphi \in [D(\bar{\Omega})]^p$. Можно показать, используя методы работы [7], что $\psi \in [D_0(\bar{\Omega})]^p$. Тогда из выражения (4) получаем $(\varphi, u) = 0$ для каждой $\varphi \in [D(\bar{\Omega})]^p$, т. е. $u = 0$ в $[D'(\bar{\Omega})]^p$.

Будем говорить, что определенная в области Ω вектор-функция $u(x)$ принимает на поверхности S обобщенные граничные значения $B \in [D'(S)]^p$, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi'(x_\varepsilon)\, u(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = \langle \varphi, B\rangle \quad \forall \varphi \in [D(S)]^p. \tag{5}$$

Здесь S_ε — параллельная к S поверхность; $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(x)$, если $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x)$, $x \in S$, $x_\varepsilon \in S_\varepsilon$.

Лемма 2. Пусть $F = 0$. Если вектор-функция $u(x)$ удовлетворяет системе (1) в области Ω, принимает на S обобщенные граничные значения $B \in [D'(S)]^p$, то она является также решением задачи (1), (2) в смысле (3), т. е. удовлетворяет соотношению

$$\left(A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x), u\right) = \frac{1}{2}\left\langle C^{(\nu)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x), B\right\rangle \quad \forall \psi \in [D_0(\bar{\Omega})]^p. \tag{6}$$

Доказательство. В случае $F = 0$ вектор-функция $u(x)$, удовлетворяющая однородной системе (1) и условию (5), является решением внутренней обобщенной задачи Дирихле, изученной в работе [2]. Ее решение имеет вид

$$u(x) = \langle G(x, y), P\rangle, \quad x \in \Omega, \tag{7}$$

где $G(x, y) = -2\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial\omega(x, y)}{\partial y_k}\tilde{A}_{kl}\nu_l(y)$ — ядро потенциала задачи Дирихле для системы (1) [3]; $\omega(x, y)$ — фундаментальная матрица системы (1); P — обобщенная вектор-функция из $[D'(S)]^p$, определяемая формулами (8), (9) из работы [2]. При этом

$$\langle \varphi, B\rangle = \left\langle \varphi(y) + \int_S C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\omega(y, x)\,\varphi(x)\, dS, P\right\rangle \quad \forall \varphi \in [D(S)]^p. \tag{8}$$

Преобразуем левую часть равенства (6) с учетом гладкости вектор-функции $u(x)$ внутри Ω, ее представления (7) и свойств матрицы $G(x, y)$. Получим

$$\left\langle \int_\Omega C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\omega(y, x)\, A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)\, dx, P\right\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\left\langle C^{(\nu)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x), B\right\rangle \quad \forall \psi \in [D_0(\bar{\Omega})]^p. \tag{9}$$

Из формулы Грина [3, 10] для системы (1) получаем представление в области Ω вектор-функции $\psi \in [D_0(\bar{\Omega})]^p$:

$$\psi(z) = \int_\Omega \omega(z, x)\, A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)\, dx - \frac{1}{2}\int_S \omega(z, x)\, C^{(\nu)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)\, dS, \quad z \in \Omega. \tag{10}$$

Применяем к равенству (10) оператор $C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, $y \in S$, $z \in \Omega$, а затем переходим к пределу, когда $z \to y$. Используя известные [3] формулы предельных значений потенциалов для системы (1), находим

$$\frac{1}{2} C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \psi(y) = \int\limits_{\Omega} C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega(y, x) A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x)\, dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{S} C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega(y, x) C^{(\nu)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x)\, dS, \quad y \in S.$$

Отсюда и из формулы (8) при замене в ней $\varphi(y)$ на $C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \psi(y)$ получаем формулу (9), что и требовалось доказать.

Пусть $\Gamma(x, y)$ — матрица Грина задачи Дирихле для системы (1) в области Ω, построенная в работе [4]. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Вектор-функция u, определенная равенством

$$(\varphi, u) = \left(\int\limits_{\Omega} \Gamma(y, x) \varphi(x)\, dx, F\right) + \frac{1}{2}\left\langle \int\limits_{\Omega} C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \Gamma(y, x) \varphi(x)\, dx, B \right\rangle \quad (11)$$

для каждой $\varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p$, является решением задачи (1), (2) в смысле (3).

Доказательство. Используя основные свойства матрицы Грина и методы работы [7], можно показать, что для каждой $\varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p$

$$\int\limits_{\Omega} \Gamma(y, x) \varphi(x)\, dx \in [D_0(\overline{\Omega})]^p, \quad \int\limits_{\Omega} C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \Gamma(y, x) \varphi(x)\, dx \in [D(S)]^p,$$

так что правая часть равенства (11) имеет смысл для каждой $F \in [D_0'(\overline{\Omega})]^p$ и каждой $B \in [D'(S)]^p$. Равенство (11) определяет однозначно обобщенную вектор-функцию $u \in [D'(\overline{\Omega})]^p$. Остается показать справедливость равенства (3), т. е. показать, что

$$\left(\int\limits_{\Omega} \Gamma(y, x) A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x)\, dx, F\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\langle \int\limits_{\Omega} C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \Gamma(y, x) A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x)\, dx, B \right\rangle =$$

$$= (\psi, F) + \frac{1}{2}\left\langle C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \psi(y), B \right\rangle \quad \forall \psi \in [D_0(\overline{\Omega})]^p. \quad (12)$$

Из формулы Грина для дифференциального оператора $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ [3, 10] для каждой $\psi \in [D_0(\overline{\Omega})]^p$ получаем

$$\int\limits_{\Omega} \Gamma(z, x) A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x)\, dx = \psi(z), \quad z \in \overline{\Omega}, \quad (13)$$

а также

$$\int\limits_{\Omega} C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \Gamma(y, x) A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x)\, dx = C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \psi(y), \quad y \in S. \quad (14)$$

Из формул (13), (14) следует равенство (12). Так же решается внешняя обобщенная задача Дирихле.

Пусть $\Omega_e = R^n \setminus \overline{\Omega}$, $[D(\overline{\Omega}_e)]^p$ — пространство бесконечно дифференцируемых вектор-функций φ в $\overline{\Omega}_e$, стремящихся к нулю на бесконечности, для которых существует $\int\limits_{\Omega_e} \omega(x, y) \varphi(y)\, dy$, $x \in R^n$; $[D_0(\overline{\Omega}_e)]^p$ — пространство бесконечно дифференцируемых вектор-функций в $\overline{\Omega}_e$, равных нулю на S и имеющих на бесконечности порядок нормальной фундаментальной матрицы; $[D'(\overline{\Omega}_e)]^p$, $[D_0'(\overline{\Omega}_e)]^p$ — пространства линейных непрерывных функционалов над $[D(\overline{\Omega}_e)]^p$ и $[D_0(\overline{\Omega}_e)]^p$ соответственно.

Постановка внешней задачи Дирихле. Пусть $F \in [D_0'(\overline{\Omega}_e)]^p$, $B \in [D'(S)]^p$. Найти вектор-функцию $u \in [D'(\overline{\Omega}_e)]^p$, удовлетворяющую условию

$$\left(A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x), u\right) = (\psi, F) - \frac{1}{2}\left\langle C^{(\nu)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x), B\right\rangle \qquad (15)$$

для каждой $\psi \in [D_0(\overline{\Omega}_e)]^p$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Решение внешней задачи Дирихле для системы (1) существует, единственно и определяется по формуле

$$(\varphi, u) = \left(\int_{\Omega_e}\Gamma_e(y, x)\varphi(x)\,dx, F\right) - \frac{1}{2}\left\langle\int_{\Omega_e}C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\Gamma_e(y, x)\varphi(x)\,dx, B\right\rangle$$

$$\forall\varphi \in [D(\overline{\Omega}_e)]^p,$$

где $\Gamma_e(x, y)$ — матрица Грина внешней задачи Дирихле для системы (1). Если $F = 0$, $u(x)$ — решение системы дифференциальных уравнений в области Ω_e, имеющее на бесконечности порядок нормальной фундаментальной матрицы и удовлетворяющее граничному условию

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{-\varepsilon}}\varphi'(x_{-\varepsilon})\,u(x_{-\varepsilon})\,dS_{-\varepsilon} = \langle\varphi, B\rangle \quad \forall\varphi \in [D(S)]^p$$

($S_{-\varepsilon}$ — поверхность в Ω_e, параллельная S; $x_{-\varepsilon} = x - \varepsilon\nu(x)$, если $x_{-\varepsilon} \in S_{-\varepsilon}$, $x \in S$; $\varphi(x_{-\varepsilon}) = \varphi(x)$), то $u(x)$ является решением внешней задачи Дирихле в смысле (15).

Аналогичные результаты справедливы для сильноэллиптической системы уравнений второго порядка вариационного типа с переменными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами при условии существования для нее фундаментальной матрицы во всем пространстве R^n.

1. *Березанский Ю. М., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических задач.— Укр. мат. журн., 1967, **19**, № 5, с. 3—32.
2. *Бойко Г. П., Волошина М. С., Гупало А. С.* Обобщенная задача Дирихле для одного класса сильно эллиптических систем второго порядка.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 37—42.
3. *Волошина М. С.* Про деякі граничні задачі для сильно еліптичних систем диференціальних рівнянь другого порядку.— Доп. АН УРСР, 1959, № 4, с. 364—368.
4. *Волошина М. С.* Розв'язки задач Діріхле і Неймана для деяких систем диференціальних рівнянь за допомогою матриць Гріна.— Вісн. Львів. політехн. ін-ту, 1973, № 75, с. 69—75.
5. *Гупало Г. С.* Про узагальнену задачу Діріхле.— Доп. АН УРСР, 1966, № 7, с. 843—846.
6. *Гупало Г.-В. С.* Задача Діріхле для рівняння Пуассона.— Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1976, вип. 11, с. 21—25.
7. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики.— М. : Гостехиздат, 1953.— 416 с.
8. *Данко С. П., Рогожин В. С.* О трех подходах к решению обобщенных задач Дирихле и Неймана для эллиптических уравнений второго порядка.— Дифференц. уравнения, 1971, 7, № 3, с. 501—509.
9. *Коваленко И. П., Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Функция Грина общих неоднородных граничных задач для систем, эллиптических по Дуглису — Ниренбергу.— Укр. мат. журн., 1978, **30**, № 5, с. 664—668.
10. *Лаврук Б. Р.* Про одну граничну задачу для системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку еліптичного типу.— Доп. АН УРСР, 1956, № 3, с. 214—219.
11. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М. : Мир, 1971.— 371 с.
12. *Ройтберг Я. А.* Эллиптические граничные задачи в обобщенных функциях для систем уравнений.— Тр. Всесоюз. конф. по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию со дня рождения акад. И. Г. Петровского (М., 27—31 янв. 1976). М., Наука, 1978, с. 426—427.
13. *Szmydt Z.* Sui problemi Di Dirichlet e di Neumann con dati al contorno generalizzati.— Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1962, 32, p. 867—872.

Львов. ун-т

Получено 23.06.83