УДК 517.946

Б. И. Пташник, В. В. Фиголь

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Данная статья является развитием работы [5] на случай уравнений с переменными по x коэффициентами.

В области $D = [0, T]\times\Omega$, где $\Omega = \{x : 0 \leqslant x_j \leqslant \pi,\ j = \overline{1, m}\}$, рассмотрим задачу

$$\sum_{|s|\leqslant n} A_s \frac{\partial^{2s_0}}{\partial t^{2s_0}} L_1^{s_1} \ldots L_m^{s_m} u(t, x) = f(t, x) + \mu \int_\Omega K(t, x, y)\, F(t, y, \bar{u})\, dy; \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\left[\alpha_j L_j^q u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x_j}(L_j^q u(t, x))\right]_{x_j=0} = 0, \quad q = \overline{0, n-1}, \\ &\left[\beta_j L_j^q u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x_j}(L_j^q u(t, x))\right]_{x_j=\pi} = 0, \quad j = \overline{1, m}; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\sum_{|s|\leqslant n-1} B_s^{(l)} \frac{\partial^{2s_0}}{\partial t^{2s_0}} L_1^{s_1} \ldots L_m^{s_m} u(t, x)\Big|_{\substack{t=0,\\ t=T}} = 0, \quad l = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_m)$; $s = (s_0, s_1, \ldots, s_m) = (s_0, s')$; $|s| = 2s_0 + s_1 + \cdots + s_m$; $u = \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_p)$; $\bar{u} = \left\{\dfrac{\partial^{|s|} u_j(t, y)}{\partial t^{s_0} \partial y_1^{s_1} \ldots \partial y_m^{s_m}},\ |s| \leqslant 2n,\ j = \overline{1, p}\right\}$; A_s, $B_s^{(l)}$ — $(p \times p)$-матрицы с постоянными действительными элементами;

$$(\det A_{n,(0)} \neq 0),\ \alpha_j,\ \beta_j,\ \mu \in \mathbb{R}; \quad L_j \equiv -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(p_j(x_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + q_j(x_j),$$

$L_j^k = L_j L_j^{k-1}$, $L_j^0 u \equiv u$; функции $p_j(x_j) > 0$, $q_j(x_j) \geqslant 0$ достаточно гладкие на $[0, \pi]$; $K(t, x, y)$ — $(p \times p)$-матрица-функция, а $f(t, x)$, $F(t, y, \bar{u})$ — p-мерные вектор-функции, которые определены и непрерывны соответственно в областях $D_1 = D \times \Omega$, D, $D_2 = \{(t, u) \in D,\ \|u - u^0\|_{C^{(2n,2n)}(D)} \leqslant R\}$, $\max\limits_{D_2} \sum\limits_{j=1}^{p} |F_j(t, y, \bar{u})| = M$, где $u^0 = u^0(t, x)$ — решение задачи (1)—(3) при $\mu = 0$; $C^{(r,q)}(D)$ $(r \leqslant q)$ — банахово пространство вектор-функции $u(t, x)$ с нормой

$$\|u(t, x)\|_{C^{(r,q)}(D)} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{\substack{|s|\leqslant q\\ s_0\leqslant r}} \max_D \left|\frac{\partial^{|s|} u_j(t, x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_m^{s_m}}\right|.$$

Решение задачи (1) — (3) ищем в шаре $\bar{S}[u^0, R] \subset C^{(2n,2n)}(D)$.

Решение невозмущенной задачи (1) — (3) $(\mu = 0)$ ищем в виде векторного ряда

$$u^0 = \sum_{k\in\mathbb{N}^m} u_k^0(t) X_k(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^m} u_k^0(t) X_{k_1}(x_1) \ldots X_{k_m}(x_m). \quad (4)$$

Здесь $X_{k_j}(x_j)$ $(k_j \in \mathbb{N})$ — собственные функции задачи

$$L_j X(x_j) = \lambda X(x_j), \quad (5)$$

$$\alpha_j X(0) + X'(0) = 0, \quad \beta_j X(\pi) + X'(\pi) = 0. \quad (6)$$

Известно [3, 4], что все собственные значения λ_{k_j} задачи (5), (6) простые, действительные и неотрицательные (в дальнейшем будем считать, что $\lambda_{k_j} > 0$, $k_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, m}$), а функции $\{X_k(x)\}$ образуют полную систему ортогональных функций в $L_2(\Omega)$; при этом справедливы оценки

$$\tilde{C} k_j^2 \leqslant \lambda_{k_j} \leqslant C k_j^2, \quad k_j \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

$$|X_k^{(p)}(x_j)| \leqslant C_1 k_j^p, \quad p = \overline{1, 2n}. \quad (8)$$

Каждая из вектор-функции $u_k^0(t)$ определяется как решение краевой задачи

$$\sum_{|s|\leqslant n} A_s \prod_{\nu=1}^{m} \lambda_{k_\nu}^{s_\nu} \frac{d^{2s_0} u_k^0(t)}{dt^{2s_0}} = f_k(t), \tag{9}$$

$$\sum_{|s|\leqslant n-1} B_s^{(l)} \prod_{\nu=1}^{m} \lambda_{k_\nu}^{s_\nu} \frac{d^{2s_0} u_k^0(t)}{dt^{2s_0}} \Bigg|_{\substack{t=0\\ t=T}} = 0, \quad l = \overline{1, n}, \tag{10}$$

где $f_k(t)$ — коэффициенты разложения $f(t, x)$ в ряд Фурье по системе $\{X_k(x)\}$. Предположим, что все корни $\mu(\lambda_k)$ уравнения

$$\det \left\{ \sum_{|s|\leqslant n} A_s \mu^{2s_0} \lambda_k^{s'} \right\} = 0, \quad \lambda_k = (\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_m}) \tag{11}$$

имеют равномерно ограниченные по λ_k действительные части и различны для всех векторов λ_k (случай кратных корней связан только с более громоздкими построениями).

Исследование краевой задачи (9), (10) проводится по методике, изложенной в работах [6, 7]. Определитель $\Delta(\mu(\lambda_k))$ этой задачи представляется в виде

$$\Delta(\mu(\lambda_k)) = (-2)^{np} \prod_{j=1}^{np} \operatorname{sh}(\mu_j T) \prod_{r,l=1}^{np} (\mu_r^2 - \mu_l^2)^2 A(\lambda_k) B(\lambda_k).$$

Здесь $A(\lambda_k) \neq 0$ — определитель порядка np, элементы которого являются полиномами переменных λ_k степени не выше $2n(p-1)$ с коэффициентами $a_{s'}^{i,j}$ $(i, j = \overline{1, np}, |s'| \leqslant 2n(p-1))$, которые явно выражаются через элементы матриц A_s;

$$B(\lambda_k) = \det \left\| \sum_{|s'|\leqslant n-2s_0-1} B_s^{(l)} \lambda_k^{s'} \right\|_{\substack{l=\overline{1,n}\\ s_0=\overline{0,n-1}}}.$$

Теорема 1. Для единственности классического решения задачи (1) — (3) при $\mu = 0$ необходимо и достаточно, чтобы для всех векторов λ_k выполнялись условия

$$B(\lambda_k) \neq 0, \quad \operatorname{sh}(\mu_j(\lambda_k) T) \neq 0, \quad j = \overline{1, np}. \tag{12}$$

Доказательство теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 1 в работе [7].

В дальнейшем предполагается, что условия (12) выполнены. Тогда для каждого вектора λ_k существует матрица Грина

$$G_k(t, \tau) = \| g_{k,l,\gamma}(t, \tau) \|_{l,\gamma=1}^{p}$$

задачи (9), (10), с помощью которой ее решение представляется в виде

$$u_k^0(t) = \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau)\, d\tau. \tag{13}$$

При этом в области $\{t, \tau : 0 \leqslant t, \tau \leqslant T, \tau \neq t\}$ справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^q g_{k,l,\gamma}}{\partial t^q} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{np} \frac{C_2 |k|^{q+4np(n+1)-4n^2+5n-9}}{|A(\lambda_k)|^2 |B(\lambda_k)| \left| \prod\limits_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq j}}^{np} |\mu_\nu^2 - \mu_j^2| |\operatorname{sh}(\mu_j T)| \right|}, \quad q = \overline{0, 2n}. \tag{14}$$

Теорема 2. Пусть существует константа $M_1 > 0$ и числа $\theta_i \in \mathbb{Z}$ $(i = \overline{1, 4})$ такие, что для всех (кроме конечного числа) векторов λ_k выполняются неравенства

$$|\operatorname{sh}(\mu_j(\lambda_k) T)| > M_1 |k|^{-\theta_1 - \frac{\varepsilon}{4}}, \quad j = \overline{1, np}, \tag{15}$$

$$\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq j}}^{np} |\mu_\nu^2(\lambda_k) - \mu_j^2(\lambda_k)| > M_1 |k|^{-\theta_2 - \frac{\varepsilon}{8}}, \quad j = \overline{1, np}, \tag{16}$$

$$|A(\lambda_k)| > M_1 |k|^{-\theta_3 - \frac{\varepsilon}{8}}, \quad |B(\lambda_k)| > M_1 |k|^{-\theta_4 - \frac{\varepsilon}{4}}, \tag{17}$$

где $0 < \varepsilon < 1$, и пусть $f(t, x) \in C^{(0,\omega)}(D)$ $(\omega = 4np(n+1) + \theta_1 + \theta_4 + m + 2(\theta_2 + \theta_3) - 4n^2 + 9n - 8)$ и удовлетворяет условиям вида (2), где $q = \overline{0, [(\omega - 1)/2]}$, а $p_j(x_j)$ и $q_j(x_j)$ непрерывно дифференцируемы $\omega - 1$ и $\omega - 2$ раза соответственно. Тогда существует решение задачи (1) — (3) при $\mu = 0$ из пространства $C^{(2n,2n)}(D)$, непрерывно зависящее от $f(t, x)$.

Доказательство. Используя формулы (4), (13) и оценки (14) — (17), получаем неравенство

$$\|u(t, x)\|_{C^{(2n,2n)}(D)} \leqslant C_3 \|f(t, x)\|_{C^{(0,\omega)}(D)},$$

откуда следует доказательство теоремы.

При доказательстве сформулированных ниже утверждений о выполнимости оценок (15) — (17) используется методика доказательства метрических теорем, изложенная в работах [1, 8].

Теорема 3. Неравенства (15) справедливы при $\theta_1 = [m/2] - np$ для почти всех (в смысле меры Лебега) векторов α при $|\lambda_k| > K(\alpha)$, где α — вектор, составленный из всех элементов матриц $A_{0,s'}$ $(|s'| \leqslant n)$ и числа π/T.

Теорема 4. Первая из оценок (17) выполняется при $\theta_3 = np(2n(p-1) - m)$ для почти всех (в смысле меры Лебега) векторов $a = \{a_{s'}^{i,j}\}$ при $|\lambda_k| > K(a)$.

Аналогичные утверждения справедливы для неравенства (16) при $\theta_2 = (m-2)\,np/2$ и для второго из неравенств (17) при $\theta_4 = (2n - m - 2)\,np$ в терминах коэффициентов A_s $(|s| \leqslant n)$ и $B_s^{(l)}$ $(|s| \leqslant n-1,\ l = \overline{1, n})$ соответственно.

Решение задачи (1) — (3) при $\mu \neq 0$ ищем в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^m} u_k(t) X_k(x), \tag{18}$$

где $u_k(t)$ — решение системы уравнений

$$\sum_{|s| \leqslant n} A_s \lambda_k^{s'} u_{k_t}^{(2s_0)}(t) = f_k(t) + \mu \int_\Omega K_k(t, y) F(t, y, \bar{u})\, dy, \tag{19}$$

удовлетворяющее условиям (10). Здесь $K_k(t, y)$ — коэффициенты разложения $K(t, x, y)$ в ряд по $\{X_k(x)\}$. В предположении, что ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^m} G_k(t, \tau) K_k(\tau, y) X_k(x), \tag{20}$$

где $G_k(t, \tau)$ — матрица Грина задачи (9), (10), равномерно сходится по $(\tau, y) \in D$, задача (1) — (3) эквивалентна системе интегро-дифференциальных уравнений

$$u(t, x) = u^0(t, x) + \mu \int_D \sum_{k \in \mathbb{N}^m} G_k(t, \tau) K_k(\tau, y) F(\tau, y, \bar{u})\, dy d\tau. \tag{21}$$

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть $K(t, x, y)$ непрерывно дифференцируема по x до порядка ω и удовлетворяет условиям вида (2), где $q = \overline{0, [(\omega - 1)/2]}$, а $F(t, y, \bar{u})$ удовлетворяет условию Липшица по $\bar{u}$ с константой L. Тогда существует $\mu_0 > 0$ такое, что для всех $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$ задача (1) — (3) имеет единственное решение $u(t, x) \in \bar{S}[u^0, R]$, непрерывно зависящее от $f(t, x)$.

Доказательство. Систему (21) запишем в виде $u(t, x) = P_v[u(t, x)]$, где P_v — оператор, определенный на $\bar{S}$ и $v = u^0(t, x)$. Пусть $V = \{v(t, x) \in C^{(2n,2n)}(D) : \|v - u^0\|_{C^{(2n,2n)}(D)} \leqslant \delta, \quad \delta = R - |\mu| BM\}$. Здесь B — сумма мажорантного ряда для функционального ряда (20) и рядов, полученных из него почленным дифференцированием по t и x до порядка $2n$. Для всякого $v \in V$ справедлива оценка

$$\| P_v [u(t, x)] - u^0 (t, x) \|_{C^{(2n,2n)}(D)} \leqslant \delta + |\mu| BM = R,$$

откуда следует, что P_v переводит $\overline{S}$ в себя. Из неравенства

$$\| P_v [u_1] - P_v [u_2] \|_{C^{(2n,2n)}(D)} \leqslant |\mu| LB \| u_1 - u_2 \|_{C^{(2n,2n)}(D)}$$

вытекает, что P_v — оператор сжатия, если $|\mu| < 1/BL$. Непрерывность оператора P_v по v очевидна. Поэтому, выбрав $\mu_0 < \min (R/BM, 1/BL)$, согласно принципу сжимающих отображений [2] получаем доказательство теоремы.

Теорема 6. Пусть выполняются условия теоремы 5, кроме условия Липшица на функцию $F(t, y, \bar{u})$. Тогда для всех $\mu \in (-R/BM, R/BM)$ существует решение задачи (1) — (3) $u(t, x) \in \overline{S}[u^0, R]$.

Доказательство этой теоремы базируется на принципе Шаудера [2].

1. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами.— Дифференц. уравнения, 1977, 13, № 4, с. 637—646.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1977.— 744 с.
3. *Костюченко А. Г. Саргсян И. С.* Распределение собственных значений.— М. : Наука, 1979.— 364 с.
4. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными.— М. : Физматгиз, 1961.— 400 с.
5. *Пташник Б. И.* Задача типа Дирихле для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа.— В кн.: Второй республиканский симпозиум по дифференциальным и интегральным уравнениям (Одесса, 29 сент.— 2 окт. 1978 г.): Тез. докл. Одесса, 1978, с. 61.
6. *Пташник Б. И.* Об одной краевой задаче для системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. Киев : Наук. думка, 1976, с. 66—71.
7. *Фиголь В. В.* Краевая задача для гиперболических систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.— В кн.: Материалы 7-й конференции молодых ученых Ин-та прикл. пробл. механики и математики АН УССР. Львов, 1980, с.179—184. (Рукопись в деп. в ВИНИТИ № 1379—81).
8. *Фиголь В. В.* Задача типа Дирихле для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1983, вып. 17, с. 10—14.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 02.11.83

УДК 517.954

П. И. Штабалюк

О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО АБСТРАКТНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим уравнение

$$u''(t) + Au(t) + cu(t) = g(t), \qquad (\cdot)$$

где A — линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор, действующий из H в H; H — гильбертово пространство; c — вещественная постоянная.

В работах [3, 4] изучались периодические и квазипериодические решения уравнения (1), когда функция $g(t)$ периодическая или квазипериодическая. В данной работе исследуется вопрос о существовании почти периодических по Бору решений уравнения (1) для подкласса почти периодических функций $g(t)$, более широкого, чем периодические и квазипериодические. Разрешимость этой задачи связана с проблемой малых знаменателей. При доказательстве оценок снизу для малых знаменателей применяется метрический подход.

Введем следующие обозначения: $k = (k_1, \ldots, k_m)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $K_T = \{ |x_j| \leqslant T, j = \overline{1, m} \}$, $(\nu_k, x) = \sum_{j=1}^{m} \nu_{k_j} x_j$, $\| \nu_k \| = \left(\sum_{j=1}^{m} \nu_{k_j}^2 \right)^{1/2}$.