мажорантного ряда для функционального ряда (20) и рядов, полученных из него почленным дифференцированием по t и x до порядка $2n$. Для всякого $v \in V$ справедлива оценка

$$\| P_v [u(t, x)] - u^0 (t, x) \|_{C^{(2n,2n)}(D)} \leqslant \delta + |\mu| BM = R,$$

откуда следует, что P_v переводит $\bar{S}$ в себя. Из неравенства

$$\| P_v [u_1] - P_v [u_2] \|_{C^{(2n,2n)}(D)} \leqslant |\mu| LB \| u_1 - u_2 \|_{C^{(2n,2n)}(D)}$$

вытекает, что P_v — оператор сжатия, если $|\mu| < 1/BL$. Непрерывность оператора P_v по v очевидна. Поэтому, выбрав $\mu_0 < \min (R/BM, 1/BL)$, согласно принципу сжимающих отображений [2] получаем доказательство теоремы.

Теорема 6. Пусть выполняются условия теоремы 5, кроме условия Липшица на функцию $F(t, y, \bar{u})$. Тогда для всех $\mu \in (-R/BM, R/BM)$ существует решение задачи (1) — (3) $u(t, x) \in \bar{S}[u^0, R]$.

Доказательство этой теоремы базируется на принципе Шаудера [2].

1. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами.— Дифференц. уравнения, 1977, 13, № 4, с. 637—646.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1977.— 744 с.
3. *Костюченко А. Г. Саргсян И. С.* Распределение собственных значений.— М. : Наука, 1979.— 364 с.
4. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными.— М. : Физматгиз, 1961.— 400 с.
5. *Пташник Б. И.* Задача типа Дирихле для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа.— В кн.: Второй республиканский симпозиум по дифференциальным и интегральным уравнениям (Одесса, 29 сент.— 2 окт. 1978 г.): Тез. докл. Одесса, 1978, с. 61.
6. *Пташник Б. И.* Об одной краевой задаче для системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. Киев : Наук. думка, 1976, с. 66—71.
7. *Фиголь В. В.* Краевая задача для гиперболических систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.— В кн.: Материалы 7-й конференции молодых ученых Ин-та прикл. пробл. механики и математики АН УССР. Львов, 1980, с.179—184. (Рукопись в деп. в ВИНИТИ № 1379—81).
8. *Фиголь В. В.* Задача типа Дирихле для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1983, вып. 17, с. 10—14.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 02.11.83

УДК 517.954

П. И. Штабалюк

О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО АБСТРАКТНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим уравнение

$$u''(t) + Au(t) + cu(t) = g(t), \qquad (\,)$$

где A — линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор, действующий из H в H; H — гильбертово пространство; c — вещественная постоянная.

В работах [3, 4] изучались периодические и квазипериодические решения уравнения (1), когда функция $g(t)$ периодическая или квазипериодическая. В данной работе исследуется вопрос о существовании почти периодических по Бору решений уравнения (1) для подкласса почти периодических функций $g(t)$, более широкого, чем периодические и квазипериодические. Разрешимость этой задачи связана с проблемой малых знаменателей. При доказательстве оценок снизу для малых знаменателей применяется метрический подход.

Введем следующие обозначения: $k = (k_1, \ldots, k_m)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $K_T = \{ |x_j| \leqslant T, j = \overline{1, m} \}$, $(\nu_k, x) = \sum_{j=1}^{m} \nu_{k_j} x_j$, $\|\nu_k\| = \left(\sum_{j=1}^{m} \nu_{k_j}^2 \right)^{1/2}$.

Предположим, что спектральные значения функции $g(t)$ представляются в виде

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{m} d_j \nu_{k_j}. \tag{2}$$

Здесь $k \in \mathbb{Z}^m$, ν_{k_j}, $d_j \in \mathbb{R}$ $(j = \overline{1, m})$ и при некоторых положительных c_{1j}, c_{2j}, σ_j выполняются оценки

$$c_{1j} |k_j|^{\sigma_j} \leqslant |\nu_{k_j}| \leqslant c_{2j} |k_j|^{\sigma_j} \quad (j = \overline{1, m}). \tag{3}$$

Заметим, что выделенный таким образом класс функций не содержит всех почти периодических функций. Сюда, например, не входит функция $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2} \cos(t/k)$.

Пусть оператор $A : D(A) \subset H \to H$ самосопряженный и положительно определенный, т. е. $\exists\, C > 0$ такое, что

$$(Au, u) \geqslant C \|u\|^2, \quad u \in D(A),$$

и пусть A^{-1} вполне непрерывный. Через $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ обозначим неубывающую (положительную) последовательность собственных значений оператора A, а через $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ — соответствующую систему собственных векторов, образующих в H полный ортонормированный базис. В $D(A^s)$ — области определения оператора A^s — введем норму

$$\|u\|_{D(A^s)} = \|A^s u\|_H = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2s} |(u, v_n)|^2 \right)^{1/2}.$$

Поставим в соответствие почти периодической функции $v(t)$ с частотным базисом (2) почти периодическую функцию от m переменных $v^*(x) = v^*(x_1, \ldots, x_m)$, такую, что $v(t) = v^*(d_1 t, \ldots, d_m t)$.

Для гильбертового пространства X и целого $r \geqslant 0$ через $P^r(\mathbb{R}^m, H)$ обозначим замыкание по норме соболевского пространства $W^2(\mathbb{R}^m, H)$ множества тригонометрических полиномов $u(x) \equiv u(x_1, \ldots, x_m)$, имеющих по переменным x_l спектральные значения, принадлежащие последовательности $\{\nu_{k_l}\}$ $(l = \overline{1, m})$,

$$\|u\|_{P^r(\mathbb{R}^m, X)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant r} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{(2T)^m} \int\limits_{K_T} \|D^\alpha u(x)\|_X^2 \, dx \right)^{1/2}. \tag{4}$$

Если $u \in P^0(\mathbb{R}^m, H)$, то

$$u(x) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}^m, n \in \mathbb{N}} u_{kn} e^{i(\nu_k, x)} v_n, \tag{5}$$

где $u_{kn} = \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{(2T)^m} \int\limits_{K_T} (u(x), v_n)\, e^{-i(\nu_k, x)} dx$. Включение $u \in P^r(\mathbb{R}^m, D(A^s))$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$a = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p, n \in \mathbb{N}} (1 + \|\nu_k\|^{2r}) \lambda_k^{2s} |u_{kn}|^2 < \infty.$$

Величина $a^{1/2}$ определяет в $P^r(\mathbb{R}^m, D(A^s))$ норму, эквивалентную (4), что позволяет определить аналогичные пространства и для нецелых $r \geqslant 0$.

Из разложения (5) и неравенств (3) получим теорему вложения.

Теорема 1. Пусть $r, s \in \mathbb{N}$, $\rho > 0$, $\rho + m/2\sigma < r$, где $\sigma = \min\limits_{j=\overline{1,m}} \{\sigma_i\}$. Тогда $P^0(\mathbb{R}^m, P(A^s)) \cap P^r(\mathbb{R}^m, H)$ вкладывается в $C^\rho(\mathbb{R}^m, D(A^{s(1-(\rho+m/2\sigma)/r)}))$.

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы вложения в работе [2].

Обозначим $D_x = \sum_{l=1}^{m} d_l \frac{\partial}{\partial x_l}$, $D_x^2 = \sum_{l=1}^{m} \sum_{n=1}^{m} d_l d_n \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_n}$. Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} D_x^2 u(x) + Au(x) + cu(x) = f(x), \\ u \in U^r = \{u : u \in P^0(\mathbb{R}^m, D(A^r)) \cap P^{2(r-1)}(\mathbb{R}^m, H), \\ D_x^2 u \in P^{2(r-1)}(\mathbb{R}^m, H)\}, \\ \|u\|_{U^r} = (\|A^r u\|^2_{P^0(\mathbb{R}^m, H)} + \|u\|^2_{P^{r-1}(\mathbb{R}^m, H)} + \|D_x^2 u\|^2_{P^{2(r-1)}(\mathbb{R}^m, H)})^{1/2}. \end{gathered} \tag{6}$$

Функцию $f(x) \in P^0(\mathbb{R}^m, H)$ представим в виде

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m, n \in \mathbb{N}} f_{k,n} e^{i(\nu_k, x)} v_n. \tag{7}$$

Решение задачи (6) ищем в виде ряда (4). Подставляя выражения (7), (4) в (6), для определения коэффициентов получаем систему уравнений

$$(-(d, \nu_k))^2 + \lambda_n + c) u_{kn} = f_{kn}, \quad k \in \mathbb{Z}^m, \ n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим

$$\begin{gathered} S = \{(k, n) : (k, n) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{N}, \quad -(d, \nu_k)^2 + \lambda_n + c = 0\}; \\ E^\varepsilon = \{k, n) : (k, n) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{N}, \quad \lambda_n + c \geqslant 0, \quad |(d, \nu_k)| = \mu(\lambda_k + c)^{1/2}, \\ \mu \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[, \ 0 < \varepsilon < 1\}. \end{gathered}$$

Предположим, что при некотором $\beta \geqslant 0 \ \exists \, b > 0$ такое, что

$$||(d, \nu_k)| - (\lambda_n + c)^{1/2}| \geqslant b \|\nu_k\|^{-2\beta}. \tag{8}$$

Тогда легко проверяются оценки

$$\frac{(d, \nu_k)^4 + \lambda_n^2}{(-(d, \nu_k)^2 + \lambda_n + c)^2} \leqslant \text{const} \quad (k, n) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{N} \setminus E^\varepsilon, \tag{9}$$

$$\frac{(d, \nu_k)^4 + \lambda_n^2}{(-(d, \nu_k)^2 + \lambda_n + c)^2} \leqslant \text{const}\,|(d, \nu_k)|^{2\alpha} \lambda_n^{1-\alpha} \|\nu_k\|^{4\beta} \tag{10}$$

$$(0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \ (k, n) \in E^\varepsilon \setminus S).$$

В качестве следствия из оценок (9), (10) получаем

$$\frac{(1 + (d, \nu_k)^4) \|\nu_k\|^{4(r-1)} + \lambda_n^{2r}}{(-(d, \nu_k)^2 + \lambda_n + c)^2} \leqslant \text{const}\,(\|\nu_k\|^{4(r-1)} + \lambda_n^{2(r-1)}) \tag{11}$$

$$(k, n) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{N} \setminus E^\varepsilon,$$

$$\frac{(1 + (d, \nu_k)^4) \|\nu_k\|^{4(r-1)} + \lambda_n^{2r}}{(-(d, \nu_k)^2 + \lambda_n + c)^2} \leqslant \text{const}\,|(d, \nu_k)|^2 \|\nu_k\|^{4\beta} (\|\nu_k\|^{4(r-1)} + \lambda_n^{2(r-1)}) \tag{12}$$

$$(k, n) \in E^\varepsilon \setminus S.$$

Рассмотрим пространство $G_\beta^r = \{f : f \in P^0(\mathbb{R}^m, D(A^{r-1})) \cap P^{2(r-1)}(\mathbb{R}^m, H)$, $D_x f \in P^{2\beta}(\mathbb{R}^m, D(A^{r-1})) \cap P^{2(r+\beta-1)}(\mathbb{R}^m, H)\}$ с нормой $\|f\|_{G_\beta^r} = (\|A^r f\|^2_{P^0(\mathbb{R}^m, H)} + \|f\|^2_{P^{2(r-1)}(\mathbb{R}^m, H)} + \|A^{r-1} D_x f\|^2_{P^{2\beta}(\mathbb{R}^m, H)} + \|D_x f\|^2_{P^{2(r+\beta-1)}(\mathbb{R}^m, H)})^{1/2}$.

Теорема 2. Пусть выполнена оценка (8), $f \in G_\beta^r$, оператор A положительно определенный, самосопряженный и A^{-1} вполне непрерывный. Тогда, если $S = \varnothing$, то задача (6) имеет единственное решение $u(x)$ и $\|u\|_{U^r} \leqslant \text{const}\,\|f\|_{G_\beta^r}$; если $S \neq \varnothing$, то задача (6) имеет решение тогда и только тогда, когда $Pf = 0$, где P — оператор проектирования пространства G_β^r на подпространство, натянутое на систему векторов $\{e^{i(\nu_k, x)} v_n \ (k, n) \in S\}$.

Доказательство получается непосредственным подсчетом норм функций u и f с использованием оценок (11), (12).

Если правая часть уравнения (1) $g(t)$ — почти периодическая функция со спектром (2), то, применив теорему 2 к задаче (6), где $f(x) = g^*(x)$ — функция, ассоциированная с $g(t)$, получим функцию u^* как решение задачи (6). Вследствие теоремы 1 u^* непрерывна вместе с $D_x u^*$ и $D_x^2 u^*$, если

$$r > m/4\sigma + 2. \qquad (13)$$

Тогда u^* будет функцией, ассоциированной с почти периодическим (по Бору) решением уравнения (1). Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть выполнены оценки (3), (8), (13) и g — почти периодическая функция со спектром (2), $g^* \in G_\beta^r$. Тогда, если $S = \varnothing$, то уравнение (1) имеет единственное почти периодическое решение со спектром (2); если $S \neq \varnothing$, то уравнение (1) имеет почти периодическое решение со спектром (2) тогда и только тогда, когда $Pg^* = 0$.

Выясним, когда выполняется оценка (8).

Теорема 4. Пусть число значений $\lambda_n + c$, меньших N не превосходит $\operatorname{const} N^\gamma + o(N^\gamma)$ и пусть $2\beta > \frac{m}{\sigma} + 2\gamma - 1$. Тогда неравенство (8) выполняется для почти всех (в смысле меры Лебега в $\mathbb{R}^m$) векторов $(d_1, \ldots, d_m)$.

Доказательство достаточно провести для некоторого параллелепипеда $D = D_1 \times D_{m-1}$ переменных $(d_1, \ldots, d_m)$. Зафиксируем вектор ν_k. Не ограничивая общности, считаем, что $|\nu_{k_1}| = \max\limits_{j=\overline{1,m}} |\nu_{k_j}|$. Выберем интервал D_1 изменения d_1 такой, чтобы $(d, \nu_k) \neq 0$ при $d_1 \in D_1$. Тогда $\left| \frac{\partial (|(d, \nu_k)| - \lambda_n + c)^{1/2})}{\partial d_1} \right| = |\nu_{k_1}|$. Используя лемму 1 [1], получаем

$$\operatorname{mes}\{d_1 : d_1 \in D_1, \; ||(d, \nu_k)| - (\lambda_n + c)^{1/2}| \leqslant \operatorname{const} \|\nu_k\|^{-\frac{m}{\sigma} - 2\gamma - \tau + 1}\} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{const} |\nu_{k_1}|^{-1} \|\nu_k\|^{-\frac{m}{\sigma} - 2\gamma - \tau + 1}, \quad 0 < \tau < 1. \qquad (14)$$

Интегрируя оценку (14) в параллелепипеде D_{m-1}, находим аналогичную оценку только с иной константой. Учитывая то, что число значений $(\lambda_n + c)^{1/2}$, меньших $\operatorname{const} \|\nu_k\|$, не превосходит $\operatorname{const} \|\nu_k\|^{2\gamma} + o(\|\nu_k\|^{2\gamma})$, получаем, что при фиксированном векторе ν_k

$$\operatorname{mes}\{d \in D, \; ||(d, \nu_k)| - (\lambda_n + c)^{1/2}| \leqslant \operatorname{const} \|\nu_k\|^{-\frac{m}{\sigma} - 2\gamma - \tau + 1}\} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{const} |\nu_{k_1}|^{-1} \|\nu_k\|^{-\frac{m}{\sigma} - \tau + 1} + o(|\nu_{k_1}|^{-1} \|\nu_k\|^{-\frac{m}{\sigma} - \tau + 1}). \qquad (15)$$

Ряд с общим членом правой части (15) в силу условия (3) сходится. Применяя лемму Бореля — Кантелли [1], получаем утверждение теоремы.

1. *Берник В. И., Пташник Б. И.* Краевая задача для системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.— Дифференц. уравнения, 1980, **16**, № 2, с. 273—279.
2. *Соболев С. Л.* Об одной теореме функционального анализа.— Мат. сб., н. с., 1938, **4**, с. 471—497.
3. *Hermann L.* Periodic solutions to abstract differential equations: the Fourier method.— Czech. Math. J., 1980, **30**, c. 177—206.
4. *Hermann L., Vejvoda O.* Peridoc and quasiperiodic solutions of abstract differential equations.— An. sti. Univ. Iasi, Sec. I. B., 1982, **38**, s. la, f. 1, c. 103—108.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 01.09.83