УДК 513.88:517.98

О. Г. Сторож

ДИССИПАТИВНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ С ИЗМЕНЕНИЕМ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И J-НЕРАСТЯГИВАЮЩИЕ ОПЕРАТОРНЫЕ МАТРИЦЫ

Все гильбертовы пространства, рассматриваемые в этой статье, предполагаются комплексными, а действующие в них операторы — линейными. Символы $D(T)$, $R(T)$, $Z(T)$ обозначают соответственно область определения, область значений и многообразие нулей оператора T. Под 1_X понимается тождественное преобразование множества X, а под $\mathscr{B}(X, Y)$, где X и Y — нормированные пространства,— множество линейных непрерывных операторов, таких, что $D(T) = X$, $R(T) \subset Y$; вместо $\mathscr{B}(X, X)$ пишем $\mathscr{B}(X)$.

Пусть L_0 — замкнутый плотно заданный симметрический оператор в гильбертовом пространстве H, имеющий равные (не обязательно конечные) дефектные числа; $(\mathscr{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — пространство граничных значений оператора L_0 [4], $L \overset{\text{def}}{=} L_0^*$, Φ — компактный оператор из H в $\mathscr{H}$, причем $\overline{R(\Phi)} = \mathscr{H}$, $A_{jk} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ $(j, k = 1, 2)$ такие, что оператор

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

имеет обратный в $\mathscr{B}(\mathscr{H} \oplus \mathscr{H})$, $U_j y \overset{\text{def}}{=} A_{j1}\Gamma_1 y + A_{j2}\Gamma_2 y$. Основным объектом нашего изучения является оператор S, определяемый посредством соотношений

$$D(S) = \{y \in D(L)\colon\ U_1 y = \Phi y\}, \tag{2}$$

$$Sy = Ly + \Phi^* U_2 y, \quad y \in D(S). \tag{3}$$

Кроме того, введем в рассмотрение вспомогательные операторы L_1, L_2 и J, где L_j — сужение L на $Z(U_j)$, $j = 1, 2$, и для всяких $h_1, h_2 \in \mathscr{H}$ $J(h_1, h_2) = (ih_2, -ih_1)$. Отметим, что S можно интерпретировать как возмущение оператора L_1, изменяющее не только закон L его действия, но и оператор краевых условий U_1. Операторы вида (2) — (3) рассмотрены в работе [7], где, в частности, доказано, что при сделанных предположениях S замкнут и плотно задан.

Нас интересуют условия, при которых S максимально диссипативен. Известно [7], что в случае $\dim \mathscr{H} < \infty$ это имеет место тогда и только тогда, когда

$$AJA^* \leqslant J. \tag{4}$$

В общем случае условие (4) оказывается необходимым, но, как показывают примеры, не достаточным для максимальной диссипативности оператора S. Справедлив следующий результат.

Теорема 1. Пусть выполняется условие (4). Следующие утверждения эквивалентны:

а) S максимально диссипативен;

б) L_1 максимально диссипативен;

в) $R(A_{11}^* - iA_{12}^*) = \mathscr{H}$;

г) $Z(A_{11} + iA_{12}) = \{0\}$;

д) $(A_{11} + iA_{12})^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$;

е) $A^*JA \leqslant J$;

ж) существуют гомеоморфизм $C_1 \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ и сжатие $K_1 \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, такие, что $A_{11} = C_1(K_1 - 1_{\mathscr{H}})$, $A_{12} = iC_1(K_1 + 1_{\mathscr{H}})$.

Доказательство. Равносильность утверждений а), б) и е) устанавливается на основании результатов, изложенных в работе [7] (см. также [10]). Справедливость импликаций б) $\Rightarrow$ в) и в) $\Rightarrow$ б) следует из основных свойств семидефинитных линеалов в пространстве с индефинитной метрикой

[2, 5]. Далее, из условия (4) и того, что $R(A) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, вытекает, что $R(A_{11} + iA_{12}) = \mathcal{H}$, поэтому [3] утверждения в), г) и д) равносильны. Равносильность утверждений б) и ж) доказана в работе [4].

Следствие. Если S максимально диссипативен, то таковым является и L_2.

Как следует из изложенного, если S максимально диссипативен, то, не ограничивая общности, можно считать, что

$$A_{11} = K_1 - 1_{\mathcal{H}}, \quad A_{12} = i(K_1 + 1_{\mathcal{H}}), \tag{5}$$

где K_1 — сжатие в $\mathcal{H}$. Здесь предполагаем, что это условие выполнено и оператор K_1, фигурирующий в (5), унитарен, т. е. $L_1 = L_1^*$ [4]. Выясним, при каких A_{21} и A_{22} оператор S максимально диссипативен.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ — гильбертовы пространства, а

$$X = \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{pmatrix}.$$

— неотрицательный оператор из $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$. Тогда $X_{12} = 0$, $X_{22} \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $h_j \in \mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$ и $h = (h_1, h_2)$. Имеем $0 \leqslant (Xh \mid h) = 2\operatorname{Re}(X_{12}h_2 \mid h_1) + (X_{22}h_2 \mid h_2)$. В частности, если $h_1 = \lambda X_{12}h_2$, где λ — произвольное комплексное число, то $0 \leqslant 2\lambda \|X_{12}h_2\|^2 + (X_{22}h_2 \mid h_2)$. Но это возможно только при $X_{12} = 0$, $X_{22} \geqslant 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены все предположения настоящего пункта. Для того чтобы S был максимально диссипативным, необходимо и достаточно, чтобы существовал диссипативный оператор $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, такой, что

$$A_{21} = -\frac{i}{4}(K_1 + 1_{\mathcal{H}}) + V(K_1 - 1_{\mathcal{H}}), \quad A_{22} = \frac{1}{4}(K_1 - 1_{\mathcal{H}}) + iV(K_1 + 1_{\mathcal{H}}). \tag{6}$$

Доказательство. Достаточность условий (6) очевидным образом вытекает из теоремы 1. Покажем их необходимость. Для этого введем в рассмотрение операторы $U_j' : \mathcal{H} \to D(L)$, определяемые из соотношений $\forall h \in \mathcal{H}, \forall y \in D(L)\ (U_j y \mid h)_{\mathcal{H}} = (y \mid U_j' h)_L$, $j = 1, 2$, где $(\cdot \mid \cdot)_L$ — скалярное произведение графика оператора L. Применяя (4), (5) и учитывая унитарность K_1, нетрудно показать, что

$$0 \leqslant J - AJA^* = \begin{pmatrix} 0 & iU_1LU_2' + i1_{\mathcal{H}} \\ iU_2LU_1' - i1_{\mathcal{H}} & iU_2LU_2' \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в силу леммы 1 $U_2LU_1' = 1_{\mathcal{H}}$, $iU_2LU_2' \geqslant 0$. Далее полагаем $U_3 = U_2 - \left(-\frac{i}{4}(K_1 + 1_{\mathcal{H}})\Gamma_1 + \frac{1}{4}(K_1 - 1_{\mathcal{H}})\Gamma_2\right)$. Легко видеть, что $U_3LU_1' = 0$. Поэтому, рассуждая так же, как при доказательстве следствия 4.6.13 из работы [7], убеждаемся в существовании $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такого, что $U_3 > V_1U_1$. Диссипативность V следует из соотношения $iU_2LU_2' = 2\operatorname{Im} V$.

Изложенные выше результаты имеют непосредственное отношение к одной задаче отыскания неизвестных блоков операторной матрицы. Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, а J такое же, как и ранее. Каждому оператору $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ вида (1) ставим в соответствие две операторные матрицы-строки $A_j = (A_{j1}, A_{j2})$, $j = 1, 2$, которые будем интерпретировать как отображения $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ [8]. Обозначим через G множество всех корректно обратимых J-бинерастягивающих в смысле работы [1], т. е. таких, что $AJA^* \leqslant J$ и $A^*JA \leqslant J$, операторов $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$. Далее полагаем

$$G_c = \{A_1 = (A_{11}, A_{12}) \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \mathcal{H}) : A_1JA_1^* \leqslant 0,\ (A_{11} + iA_{12})^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\},$$

$$G_i = \{A_1 \in G_c : (A_{11} - iA_{12})^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\},$$

$$G_u = \{A_1 \in G_i :\ A_1JA_1^* = 0\}.$$

Ниже исследуется вопрос о нахождении неизвестных блоков A_{21}, A_{22} матрицы $A \in G$ вида (1) по заданным блокам A_{11}, A_{12} (ср. с задачей, решенной в работе [9]).

Прежде всего отметим, что необходимое условие разрешимости задачи имеет вид $A_1 \in G_c$. При этом решение A_2 также принадлежит классу G_c. Далее $A_j = (A_{j1}, A_{j2}) \in G_c$ тогда и только тогда, когда существуют гомеоморфизм $C_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и сжатие $K_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такие, что

$$A_{j1} = C_j (K_j - 1_{\mathcal{H}}), \quad A_{j2} = \mathrm{i} C_j (K_j + 1_{\mathcal{H}}), \tag{7}$$

причем требование $A_j \in G_i$, а следовательно, $A_j \in G_u$, равносильно корректной обратимости соответственно унитарности оператора K_j.

Справедливость перечисленных утверждений очевидным образом вытекает из теоремы 1 и следствия, если учесть, что для всякого гильбертова пространства $\mathcal{H}$ существует симметрический оператор L_0, для которого (при соответствующем выборе Γ_1 и Γ_2) $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ является пространством граничных значений. Например, в качестве L_0 можно взять минимальный оператор, порожденный в $L_2(\mathcal{H},]0, 1[)$ выражением $\mathrm{i}y'$.

Перейдем к решению нашей задачи. Пусть сначала $A_1 \in G_u$. В этом случае, как показывает теорема 2, общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} A_{21} &= (C_1^{-1})^* \left(-\frac{\mathrm{i}}{4}(K_1 + 1_{\mathcal{H}}) + V(K_1 - 1_{\mathcal{H}})\right), \\ A_{22} &= (C_1^{-1})^* \left(\frac{1}{4}(K_1 - 1_{\mathcal{H}}) + \mathrm{i}V(K_1 + 1_{\mathcal{H}})\right), \end{aligned} \tag{8}$$

где C_1 и K_1 определяются по A_{11}, A_{12} согласно формулам (7), а $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — диссипативный оператор.

Нетрудно показать, что задача разрешима при любом $A_1 \in G_i$. Действительно, положим

$$A_{21} = -\frac{\mathrm{i}}{2}(C_1^{-1})^* (1_{\mathcal{H}} + K_1 K_1^*)^{-1} (K_1 + 1_{\mathcal{H}}),$$

$$A_{22} = \frac{1}{2}(C_1^{-1})^* (1_{\mathcal{H}} + K_1 K_1^*)^{-1} (K_1 - 1_{\mathcal{H}}).$$

Непосредственная проверка показывает, что $A \in G$.

Очевидно, что при указанном выборе A_{21} и A_{22} отображение $A_1 \mapsto A$ непрерывно на G_i. Однако даже в случае, когда $\dim \mathcal{H} < \infty$, его нельзя продолжить по непрерывности до отображения $G_c \to G$. Более того, в указанном случае не существует непрерывного отображения $(A_{11}, A_{12}) \mapsto (A_{21}, A_{22})$ из G_c в себя такого, что оператор (1) обратим в $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$.

Действительно, если это не так, то в силу формул (7) существует непрерывное отображение $K_1 \mapsto K_2$ из единичного шара пространства $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ в себя такое, что оператор

$$\begin{pmatrix} K_1 - 1_{\mathcal{H}} & \mathrm{i}(K_1 + 1_{\mathcal{H}}) \\ K_2 - 1_{\mathcal{H}} & \mathrm{i}(K_2 + 1_{\mathcal{H}}) \end{pmatrix}$$

обратим в $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ при всех указанных K_1 и K_2. Но это невозможно, так как в силу известной теоремы Шаудера [6] отображение $K_1 \mapsto K_2$ имеет неподвижную точку.

Исходя из теорем 1 и 2 и рассуждая так же, как и выше, легко убедиться, что оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ вида (1) J-унитарен (т. е. что $AJA^* = J$ и $A^*JA = J$) тогда и только тогда, когда существуют корректно обратимый C_1, унитарный K_1 и самосопряженный V операторы из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, такие, что блоки оператора A могут быть представлены в виде (7) — (8).

1. *Гинзбург Ю. П.* О J-нерастягивающих операторах в гильбертовом пространстве.— Науч. зап. физ.-мат. ф-та Одес. пед. ин-та, 1958, 22, № 1, с. 13—20.
2. *Гинзбург Ю. П., Иохвидов И. С.* Исследования по геометрии бесконечномерных пространств с билинейной метрикой.— Успехи мат. наук, 1962, 17, № 5, с. 3—56.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.

4. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений.— Мат. заметки, 1975, 17, № 1, с. 41—48.
5. *Крейн М. Г.* Введение в геометрию индефинитных J-пространств и теорию операторов в этих пространствах.— В кн.: Вторая летняя математическая школа (Кацивели, июнь — июль, 1964 г.) Киев : Наук. думка, 1965, ч. 1, с. 15—92.
6. *Лопатинский Я. Б.* Введение в современную теорию дифференциальных уравнений частных производных.— Киев : Наук. думка, 1980.— 216 с.
7. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов.— Киев : Наук. думка, 1983.— 206 с.
8. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах.— М. : Мир, 1970.— 352 с.
9. *Шмульян Ю. Л., Яновская Р. Н.* О блоках сжимающей операторной матрицы.— Изв. вузов. Математика, 1981, № 7, с. 72—75.
10. *Штраус А. В.* О расширениях и характеристической функции симметрического оператора.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1968, 32, № 1, с. 186—207.

Ин-т прикл. пробл.
механики и математики АН УССР, Львов

Получено 12.10.83

УДК 517.949.8

Р. В. Фильц

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПОЛНЫМИ ПОЛИНОМАМИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К АЛГЕБРАИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Сеточные методы решения краевых задач математической физики основаны на алгебраизации дифференциальных уравнений в частных производных путем аппроксимирования искомой функции в некоторой окрестности рассматриваемой точки пространства независимых переменных. Наиболее часто в качестве аппроксимирующих функций используются степенные полиномы. Замена дифференциальных операторов разностными выполняется для каждого типа дифференциальных уравнений или системы, как правило, на базе частных аналитических приемов, изучение и реализация которых даже в случае двух независимых переменных связаны с большими затратами высококвалифицированного труда, в особенности для шаблонов нерегулярной структуры с большим числом узлов [1]. В связи с этим представляются целесообразными составление общих алгоритмов вычисления коэффициентов аппроксимирующих функций и замена дифференциальных операторов разностными для шаблонов с произвольным расположением узлов и при использовании для аппроксимации полных полиномов произвольной степени. Такие алгоритмы должны быть представлены в виде последовательности аналитических выражений, удобных для непосредственного программирования на ЭВМ.

Изложим сущность этих алгоритмов в такой последовательности: вначале рассмотрим задачу аппроксимации функции двухмерного аргумента полиномом второй степени, обобщим результаты на пространство произвольного числа измерений и произвольную степень полинома, после чего проиллюстрируем применение этих результатов на конкретных дифференциальных уравнениях математической физики.

Пусть для функции

$$U = U[x, y], \tag{1}$$

имеющей в окрестности точки $P(x, y)$ конечные производные до третьего порядка и заданной в окрестности этой точки значениями $U_j = U[x_j, y_j]$ ($j = \overline{1, 6}$) в шести точках, требуется построить аппроксимирующий полином

---

[1] *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы.— М. : Наука, 1977.— 439 с.