$$k_3^{-1} = \frac{1}{6}\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
6 & & & & & & & & & \\ \hline
 & 1 & -3 & 3 & -1 & 3 & & & & -3 \\ \hline
 & 1 & -3 & & & & 3 & -1 & 3 & -3 \\ \hline
-6 & & & & & 3 & & & & 3 \\ \hline
-6 & & 3 & -3 & & 3 & 3 & & -3 & 3 \\ \hline
-6 & & 3 & & & & 3 & & & \\ \hline
 & -1 & 3 & -3 & 1 & & & & & \\ \hline
-6 & -3 & 6 & -1 & & 3 & & & & 3 \\ \hline
-6 & -3 & 3 & & & & 3 & & -3 & 6 \\ \hline
 & -1 & & 1 & & & & 1 & -3 & 3
\end{array}\right|.$$

Аппроксимация дифференциального уравнения $\partial H_y/\partial x - \partial H_x/\partial y = J$ полиномом третьей степени для первого узла этого шаблона приводит к разностному уравнению

$$k_{3,2}\vec{\varkappa}_2\vec{H}_{y*} - k_{3,3}\vec{\varkappa}_3\vec{H}_{x*} = J_1,$$

где $k_{3,2} = k_{3,3} = 1$; $\vec{\varkappa}_2$, $\vec{\varkappa}_3$ — векторы, равные соответственно второй и третьей строкам матрицы $H_{x*} = (H_{x1}, \ldots, H_{x10})_*$; $H_{y*} = (H_{y1}, \ldots, H_{y10})_*$. В скалярной записи это разностное уравнение имеет вид

$$(H_{y2} - 3H_{y3} + 3H_{y4} - H_{y5} + 3H_{y6} - 3H_{y10})/6 +$$
$$+ (H_{x2} - 3H_{x3} + 3H_{x7} - H_{x8} + 3H_{x9} - 3H_{x10})/6 = J_1.$$

Аппроксимация дифференциального уравнения $\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = 0$ полиномом третьей степени для первого узла этого же шаблона приводит к разностному уравнению

$$(k_{3,4}\vec{\varkappa}_4 + k_{3,6}\vec{\varkappa}_6)\vec{\varphi} = 0.$$

Здесь $k_{3,4} = k_{3,6} = 2$; $\vec{\varkappa}_4$, $\vec{\varkappa}_6$ — четвертая и шестая строки матрицы $k_3^{-1}$. В скалярной записи это разностное уравнение имеет вид

$$(-6\varphi_1 + 3_6 + 3_{10})/6 - (6\varphi_1 + 3_3 + 3_7)/6 = 0,$$

откуда приходим к известному уравнению $4\varphi_1 - \varphi_3 - \varphi_6 + \varphi_7 + \varphi_{10} = 0$.

Ин-т прикл. пробл.
механики и математики АН УССР,
Львов

Получено 09.02.83

УДК 517.524

Д. И. Боднар

## МНОГОМЕРНЫЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ДРОБИ

Рассмотрим ветвящуюся цепную дробь

$$\left(b_0 + z_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a^2_{i_1 i_2 \ldots i_k}}{b_{i_1 i_2 \ldots i_k} + z_{i_1 i_2 \ldots i_k}}\right)^{-1}, \tag{1}$$

где $b_0$, $b_{i_1 \ldots i_k}$, $a_{i_1 \ldots i_k}$ — комплексные константы; $z_0$, $z_{i_1 \ldots i_k}$ — независимые комплексные переменные, и обозначим через $A_n/B_n$ ее $n$-ю подходящую дробь. Используя результаты, изложенные в работе [2], легко устанавливаем лемму.

**Лемма 1.** Для знаменателей и числителей подходящих дробей ветвящейся цепной дроби (1) справедливы следующие формулы:

$$B_n = \det [c_{pq}],$$

где $[c_{pq}]$ — квадратная симметричная матрица размера $s$, $s = (N^{n+1} - 1)/(N - 1)$, и для произвольного фиксированного $p$ $(p = \overline{1, s})$

$$c_{pp} = b_{i_1 \ldots i_r} + z_{i_1 \ldots i_r} (c_{11} = b_0 + z_0);$$

$$p - 1 = i_1 N^{r-1} + i_2 N^{r-2} + \cdots + i_r \qquad (i_k = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, r});$$

$$c_{pq} = \begin{cases} -a_{i_1 \ldots i_r i_{r+1}}, & \text{если } q = (p-1) N + i_{r+1} + 1, \ i_{r+1} = \overline{1, N}, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях при условии, что } q > p; \end{cases}$$

$$A_n = \det [c^*_{pq}],$$

где $[c^*_{pq}]$ — квадратная матрица размера $s - 1$ и $c^*_{pq} = c_{p+1,q+1}$.

Пусть

$$X = (x_0, x_1, \ldots, x_N, \ldots, x_{i_1 \ldots i_n}, \ldots, x_{\underbrace{N \ldots N}_{n}})^T.$$

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$[c_{pq}] X = 0. \tag{2}$$

Умножая каждое $p$-е уравнение системы (2) на $\bar{x}_{i_1 \ldots i_r}$, где $p - 1 = i_1 N^{r-1} + i_2 N^{r-2} + \ldots + i_r$, и суммируя все уравнения, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{N} (b_{i_1 \ldots i_k} + z_{i_1 \ldots i_k}) | x_{i_1 \ldots i_k} |^2 -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{N} a_{i_1 \ldots i_k} (x_{i_1 \ldots i_k} \bar{x}_{i_1 \ldots i_{k-1}} + \bar{x}_{i_1 \ldots i_k} x_{i_1 \ldots i_{k-1}}) = 0. \tag{3}$$

Положим

$$\beta_{i_1 \ldots i_k} = \operatorname{Im} b_{i_1 \ldots i_k}, \quad \alpha_{i_1 \ldots i_k} = \operatorname{Im} a_{i_1 \ldots i_k}, \quad y_{i_1 \ldots i_k} = \operatorname{Im} z_{i_1 \ldots i_k}.$$

Левую часть (3), где все $x_{i_1 \ldots i_k} \in \mathbf{C}$ произвольные, обозначим $F(x)$. Пусть при выполнении условий

$$y_0 > 0, \ y_{i_1 \ldots i_k} > 0 \qquad (i_k = \overline{1, N}, \ k = \overline{1, n}), \quad \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{N} | x_{i_1 \ldots i_k} |^2 > 0 \tag{4}$$

справедливо неравенство

$$\operatorname{Im} F(x) > 0. \tag{5}$$

**Лемма 2.** При выполнении неравенств (4) условие (5) эквивалентно неотрицательной определенности действительной квадратической формы

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{N} \beta_{i_1 \ldots i_k} \xi^2_{i_1 \ldots i_k} - 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{N} \alpha_{i_1 \ldots i_k} \xi_{i_1 \ldots i_k} \xi_{i_1 \ldots i_{k-1}} \geqslant 0. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если условие (5) выполняется для произвольных комплексных чисел $x_{i_1 \ldots i_k}$, то положив, в частности, $x_{i_1 \ldots i_k} = \xi_{i_1 \ldots i_k}$ $(i_k = \overline{1, N}; k = \overline{1, n}; i_0 = 0)$, перейдя к пределу при условии, что все $y_{i_1 \ldots i_k} \to 0$, получим неравенство (6).

Обратно, пусть выполняются условия (6), (4) и $x_{i_1 \ldots i_k} = u_{i_1 \ldots i_k} + i v_{i_1 \ldots i_k}$, $i = \sqrt{-1}$. Левую часть (6) обозначим через $\Phi(\xi)$, тогда левая часть (5) запишется в виде

$$\Phi(u)+\Phi(v)+\sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{N} y_{i_1\ldots i_k}|x_{i_1\ldots i_k}|^2,$$

и выполнение условия (5) очевидно.

**Определение.** Ветвящаяся цепная дробь (1) называется положительно определенной, если для всех натуральных $n$ неотрицательно определены действительные квадратические формы (6).

**Теорема 1.** Если ветвящаяся цепная дробь (1) положительно определена, то все знаменатели $B_n$ в областях $\operatorname{Im} z_{i_1\ldots i_k}>0$ $(i_k=\overline{1, N}, k=1, 2, \ldots)$, $\operatorname{Im} z_0>0$ отличны от нуля.

Доказательство. Из лемм 1 и 2 следует, что

$$B_n=\det[c_{pq}]\neq 0.$$

**Теорема 2.** Ветвящаяся цепная дробь (1) является положительно определенной, если выполняются условия:

а) $\beta_{i_1\ldots i_k}\geqslant 0$ $(i_k=\overline{1, N},\ k=1, 2, \ldots)$, $\beta_0\geqslant 0$;

б) существуют действительные числа $0\leqslant g_{i_1\ldots i_k}\leqslant 1$ такие, что

$$\alpha^2_{i_1\ldots i_k}=\frac{1}{N}\beta_{i_1\ldots i_{k-1}}\beta_{i_1\ldots i_k}(1-g_{i_1\ldots i_{k-1}})g_{i_1\ldots i_k}$$

$$(i_0=0,\ i_k=\overline{1, N},\ k=1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Так как неравенство (6) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{N}\left(\sqrt{\frac{1-g_{i_1\ldots i_{k-1}}}{N}\beta_{i_1\ldots i_{k-1}}}\,\xi_{i_1\ldots i_{k-1}}\pm\sqrt{g_{i_1\ldots i_k}\beta_{i_1\ldots i_k}}\,\xi_{i_1\ldots i_k}\right)^2+$$

$$+\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{N}(1-g_{i_1\ldots i_n})\beta_{i_1\ldots i_n}\xi^2_{i_1\ldots i_n}\geqslant 0,$$

где «+» или «—» берется в зависимости от знака $\alpha_{i_1\ldots i_k}$, то отсюда немедленно следует утверждение теоремы.

*Замечание 1*. Условие а) теоремы 2 является также и необходимым.

*Замечание 2*. Если неотрицательно определена квадратическая форма (6), то при том же $n$ неотрицательно определена следующая действительная квадратическая форма:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{N}\beta_{i_1\ldots i_k}\xi^2_{i_1\ldots i_k}-2\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{N}\alpha'_{i_1\ldots i_k}\xi_{i_1\ldots i_k}\xi_{i_1\ldots i_{k-1}}\geqslant 0,$$

где $\alpha'_{i_1\ldots i_k}$ — произвольные действительные числа такие, что $|\alpha'_{i_1\ldots i_k}|\leqslant$ $\leqslant|\alpha_{i_1\ldots i_k}|$. Поэтому условия б) теоремы 2 можно заменить условиями

$$\alpha^2_{i_1\ldots i_k}\leqslant\frac{1}{N}\beta_{i_1\ldots i_{k-1}}\beta_{i_1\ldots i_k}(1-g_{i_1\ldots i_{k-1}})g_{i_1\ldots i_k} \tag{7}$$

$$(i_0=0,\ i_k=\overline{1, N},\ k=1, 2, \ldots).$$

**Лемма 3.** Пусть

$$t=t_{i_1\ldots i_p}(w_{i_1\ldots i_p 1},\ \ldots,\ w_{i_1\ldots i_p N})=b_{i_1\ldots i_p}+z_{i_1\ldots i_p}-\sum_{i_{p+1}=1}^{N}\frac{a^2_{i_1\ldots i_{p+1}}}{w_{i_1\ldots i_{p+1}}}$$

$$(i_0=0,\ i_k=\overline{1, N},\ k=\overline{1, p},\ p=0, 1, 2, \ldots)$$

— некоторая совокупность многомерных дробно-линейных отображений и пусть

$$y_0=\operatorname{Im} z_0>0,\quad y_{i_1\ldots i_k}=\operatorname{Im} z_{i_1\ldots i_k}\geqslant 0,\quad \beta_{i_1\ldots i_k}=\operatorname{Im} b_{i_1\ldots i_k}\geqslant 0,$$

а для $\alpha_{i_1\dots i_k} = \operatorname{Im} a_{i_1\dots i_k}$ выполнено условие (7), где $0 \leqslant g_{i_1\dots i_k} \leqslant 1$, кроме того,

$$\operatorname{Im} w_{i_1\dots i_{p+1}} \geqslant \beta_{i_1\dots i_{p+1}} g_{i_1\dots i_{p+1}} \qquad (i_k = \overline{1, N},\ k = \overline{1, p+1}).$$

Тогда

$$\operatorname{Im} t \geqslant \beta_{i_1\dots i_p} g_{i_1\dots i_p} + y_{i_1\dots i_p}.$$

Доказательство. Пусть

$$M = \frac{1}{N}(1 - g_{i_1\dots i_p})\beta_{i_1\dots i_p} + \frac{1}{N} y_{i_1\dots i_p}, \quad y_{i_1\dots i_p} > 0,$$

тогда, учитывая условия леммы, находим

$$\operatorname{Im} w_{i_1\dots i_{p+1}} \geqslant \frac{\alpha^2_{i_1\dots i_{p+1}}}{M}.$$

Поэтому

$$\left| w_{i_1\dots i_{p+1}} + \frac{i a^2_{i_1\dots i_{p+1}}}{2M} \right| \geqslant \frac{|a^2_{i_1\dots i_{p+1}}|}{2M},$$

или

$$\left| \frac{w_{i_1\dots i_{p+1}}}{a^2_{i_1\dots i_{p+1}}} + \frac{i}{2M} \right| \geqslant \frac{1}{2M}. \tag{8}$$

Рассматривая образ (8) при отображении $w = z^{-1}$, получаем

$$\operatorname{Im} \frac{a^2_{i_1\dots i_{p+1}}}{w_{i_1\dots i_{p+1}}} \leqslant M.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Im} t_{i_1\dots i_p} = \beta_{i_1\dots i_p} + y_{i_1\dots i_p} - \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \operatorname{Im} \frac{a^2_{i_1\dots i_{p+1}}}{w_{i_1\dots i_{p+1}}} \geqslant g_{i_1\dots i_p}\beta_{i_1\dots i_p}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $y_{i_1\dots i_p} \to 0$, имеем

$$\operatorname{Im} t_{i_1\dots i_p} \geqslant y_{i_1\dots i_p} + g_{i_1\dots i_p}\beta_{i_1\dots i_p}.$$

Лемма доказана.

Легко проверить, что образом полуплоскости $\operatorname{Im} w \geqslant y_0 + g_0\beta_0 > 0$ при отображении $t_{-1}(w) = w^{-1}$ является круг

$$K_{-1}: \left| w + \frac{i}{2}(y_0 + \beta_0 g_0)^{-1} \right| \leqslant \frac{1}{2}(y_0 + \beta_0 g_0)^{-1}.$$

Обозначим через $K_p$ образ области $\operatorname{Im} w_{i_1\dots i_{p+1}} \geqslant \beta_{i_1\dots i_{p+1}} g_{i_1\dots i_{p+1}}$ при отображении

$$T_p(w) = t_{-1} \circ t_0 \circ \cdots \circ t_{i_1\dots i_p}(w) =$$

$$= \cfrac{1}{b_0 + z_0 - \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{a^2_{i_1}}{b_{i_1} + z_{i_1} - \ddots - \sum\limits_{i_p=1}^{N} \cfrac{a^2_{i_1\dots i_p}}{b_{i_1\dots i_p} + z_{i_1\dots i_p} - \sum\limits_{i_{p+1}=1}^{N} \cfrac{a^2_{i_1\dots i_{p+1}}}{w_{i_1\dots i_{p+1}}}}}}.$$

Из леммы 3 следует, что $K_{-1} \supseteq K_0 \supseteq K_1 \supseteq \dots$ Так как

$$T_p(\infty) = A_p/B_p, \quad \text{то} \quad A_p/B_p \in K_p.$$

**Теорема 3.** Если для ветвящейся цепной дроби (1) выполняются условия (7), где $g_0\beta_0 > 0$, $g_{i_1\dots i_p}\beta_{i_1\dots i_p} > 0$, то $B_p \neq 0$ в области $\operatorname{Im} z_{i_1\dots i_p} \geqslant 0$ $i_k = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, p}$, $p = 1, 2, \dots$), $\operatorname{Im} z_0 \geqslant 0$.

**Теорема 4.** Если для ветвящейся цепной дроби (1) выполняются условия (7) и $\beta_{i_1\ldots i_k} \geqslant 0$, $g_0\beta_0 + y_0 > 0$, $y_{i_1\ldots i_k} \geqslant 0$ $(i_k = \overline{1, N},\ k = \overline{1, p})$, то

$$\operatorname{Im}(A_p/B_p) \leqslant 0, \quad |A_p/B_p| \leqslant (g_0\beta_0 + y_0)^{-1}.$$

В работе [1] рассмотрены примеры положительно определенных ветвящихся цепных дробей и установлены их признаки сходимости. Результаты, изложенные в настоящей статье, являются многомерным обобщением известных результатов, установленных для цепных дробей [3].

1. *Боднар Д. И.* Признаки сходимости ветвящихся цепных дробей.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 8, с. 3—7.
2. *Крупка З. И., Шмойлов В. И.* О параллельном вычислении алгоритмов, представленных ветвящимися цепными дробями.— Многопроцессорные вычисл. структуры, 1980, вып. 2, с. 78—90.
3. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions.— New York : D. Van Nostrand company, 1948.— 433 p.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 08.06.83

УДК 512.8

Д. М. Билонога, В. Р. Зелиско

## О ЛИНЕАРИЗАЦИИ МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть $A(x)$ — неособенная полиномиальная $n \times n$-матрица с элементами из $\mathbb{C}[x]$, которую запишем в виде матричного многочлена

$$A(x) = A_0 + A_1x + \cdots + A_lx^l. \tag{1}$$

Через $E_{l-1}$ обозначим прямую сумму $l-1$ единичных матриц $E$ $n$-го порядка. Известно, например, что числовая $ln \times ln$-матрица $T$ называется линеаризацией матричного многочлена (1), если существуют матрицы $G(x)$, $F(x) \in GL(ln, \mathbb{C}[x])$ такие, что

$$A(x) \oplus E_{l-1} = G(x)(E_lx - T)F(x). \tag{2}$$

Там же доказано, что каждый регулярный $(\det A_l \neq 0)$ матричный многочлен имеет линеаризацию. Примером линеаризации регулярного матричного многочлена вида (1) является матрица

$$C_A = \begin{Vmatrix} 0 & E & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & E \\ -\bar{A}_0 & -\bar{A}_1 & -\bar{A}_2 & \ldots & -\bar{A}_{l-2} & -\bar{A}_{l-1} \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

где $\bar{A}_i = A_l^{-1}A_i$, $i = 0, 1, \ldots, l-1$. Исследуем вопрос о том, как связаны между собой линеаризации эквивалентных и полускалярно эквивалентных регулярных полиномиальных матриц.

Если $D(x)$ — форма Смита матричного многочлена $A(x)$ [1], т. е. $D(x) = P(x)A(x)Q(x)$, где $P(x)$, $Q(x) \in GL(n, \mathbb{C}[x])$, то формой Смита характеристической матрицы $E_lx - T$ линеаризации $T$ матричного многочлена $A(x)$, как легко проверить, является матрица $\operatorname{diag}(\overbrace{E, \ldots, E, D(x)}^{l})$, причем соответствующие преобразующие матрицы имеют вид

$$\bar{P}(x) = R \operatorname{diag}(P(x), \overbrace{E, \ldots, E}^{l-1})G(x),$$

$$\bar{Q}(x) = F(x) \operatorname{diag}(Q(x), \overbrace{E, \ldots, E}^{l-1})R.$$