7. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1974.— 206 с.
8. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1981.— 344 с.
9. *Победря Б. Е.* О численном решении задач механики деформируемого твердого неоднородного тела.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. математика, механика, 1983, № 4, с. 78—85.
10. *Победря Б. Е., Горбачев В. И.* Концентрация напряжений и деформаций в композитах.— Механика композит. материалов, 1984, № 2, с. 230—236.
11. *Механика* композиционных материалов / Под ред. Дж. Сендецки. М. : Мир, 1978.— 566 с.
12. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред.— М. : Наука, 1977.— 400 с.

Моск. ун-т Получено 18.11.83

УДК 539.377:532.72

М. С. Раврик

ОБ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ФОРМУЛЕ СМЕШАННОГО ТИПА ДЛЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОДИФФУЗИОННОЙ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИИ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим упругое тело из N однородных трансверсально-изотропных слоев постоянной толщины $2h^{(i)}$ каждый, которое находится в неравномерных температурных и концентрационных полях, обусловленных тепло- и массообменом с внешней средой или деформацией самого тела. Предполагаем, что на границе раздела контактирующих слоев $S^{(k,k+1)}$ $(S^{(k,k+1)} = V^{(k)} \cap V^{(k+1)}, 1 \leqslant k \leqslant N-1)$, представляющих собой трехмерное тело объема $V^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, имеет место идеальный механический и физический контакт. Между поверхностью Σ, ограничивающей объем $V \left(V = \sum\limits_{i=1}^{N} V^{(i)} \right)$, и внешней средой осуществляется тепло- и массообмен по конвективному закону. При этом учитывается, что поверхность Σ состоит из верхней S_+, нижней S_- граничных поверхностей слоистого тела и боковой $S' \left(S' = \sum\limits_{i=1}^{N} S^{(i)} \right)$, образующейся нормальными к срединной поверхности G_i сечениями соответствующего слоя, на которых соответственно заданы компоненты напряжений $\tilde{P}_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, 3)$, смещения $\tilde{U}_j^{(i)}$, известные значения температуры $t_c^{(i)}$ и химического потенциала $\mu_c^{(i)}$ диффундирующего вещества.

Тогда следуя работам [1—3], представим в криволинейной системе координат $\alpha_j^{(i)}$ $(\alpha_3^{(i)} = z^{(i)})$, нормально связанной со срединной поверхностью G_i соответствующего слоя, общий функционал диффузионной теории деформации в виде

$$K = I_V - I_s^e + I_s^t + I_s^c. \tag{1}$$

Здесь

$$I_V = \sum_{i=1}^{N} \iiint\limits_{V^{(i)}} \Big\{ \rho_i \vartheta_i (e_{mj},\ S,\ c) - \sigma_{11}^{(i)} [e_{11}^{(i)} - L_{11}^{(i)} (U_m)] -$$

$$- \sigma_{22}^{(i)} [e_{22}^{(i)} - L_{22}^{(i)} (U_m)] - \sigma_{12}^{(i)} [e_{12}^{(i)} - L_{12}^{(i)} (U_1,\ U_2)] -$$

$$- \sigma_{13}^{(i)} [e_{13}^{(i)} - L_{13}^{(i)} (U_1,\ U_3)] - \sigma_{23}^{(i)} [e_{23}^{(i)} - L_{23}^{(i)} (U_2,\ U_3)] -$$

$$- \sigma_{33}^{(i)} [e_{33}^{(i)} - L_{33}^{(i)} (U_3)] - X_j^{(i)} U_j^{(i)} + \frac{1}{2} \rho_i p^2 U_i^{(i)} + \operatorname{grad} t_i \vec{F}_i +$$

$$+ \operatorname{grad} \mu_i \vec{R}_i - \rho_i (S_i t_i + \mu_i c_i) + \frac{1}{2} T_0 p \left(\frac{1}{\lambda_i} \vec{F}_i^2 + \frac{1}{L_i} \vec{R}_i^2 \right) \Big\} \times$$

$$\times H_1^{(i)} H_2^{(i)} d\alpha_1^{(i)} d\alpha_2^{(i)} dz^{(i)};$$

$$I_s^e = \sum_{i=1}^{N} \left[\iint\limits_{S_\sigma^{(i)}} \tilde{P}_j^{(i)} U_j^{(i)} dS + \iint\limits_{S_u^{(i)}} P_j^{(i)} (U_j^{(i)} - \tilde{U}_j^{(i)})\, dS \right] + \iint\limits_{S_+} \tilde{\sigma}_{jz}^{+} U_j^{+} dS +$$

$$+ \iint\limits_{S_-} \tilde{\sigma}_{jz}^{-} U_j^{(1)} dS + \sum_{k=1}^{N-1} \iint\limits_{S^{(k,k+1)}} \sigma_{jz}^{(k,k+1)} (U_j^{(k)} - U_j^{(k+1)})\, dS^{(k,k+1)};$$

$$I_s^t = \sum_{i=1}^{N} \iint\limits_{S_t^{(i)}} \left(\frac{T_0}{2} p \frac{1}{\lambda_s^{(i)}} F_\nu^{(i)2} + F_\nu^{(i)} t_c^{(i)} \right) dS - \iint\limits_{S} (n_j F_j)^{(i)} t_i dS +$$

$$+ \iint\limits_{S_+} \left[\frac{T_0}{2} p \frac{1}{\lambda_s^{+}} (n_3 F_3)_+^2 + (n_3 F_3)_+ t_c^{+} \right] dS + \iint\limits_{S_-} \left[\frac{T_0}{2} p \frac{1}{\lambda_s^{-}} (n_3 F_3)_-^2 + \right.$$

$$\left. + (n_3 F_3)_- t_c^{-} \right] dS + \sum_{k=1}^{N} \left[\iint\limits_{S^{(k,k+1)}} \left\langle \frac{T_0}{2} p \frac{1}{\lambda_s^{(k)}} (n_3 F_3)^{(k)2} + (n_3 F_3)^{(k)} t^{(k)} \right\rangle \times \right.$$

$$\left. \times dS^{(k,k+1)} - \iint\limits_{S_t^{(k,k+1)}} (n_3 F_3)^{(k+1)} t^{(k+1)} dS^{(k,k+1)} \right];$$

$$Э_i (e_{mj},\ S,\ c) = \frac{T_0}{2C_i^{e,c}} S_i^2 + \frac{d_c^{(i)}}{2} c_i^2 + d_s^{(i)} c_i S_i + \frac{G_i}{\rho_i} e_{12}^{(i)2} +$$

$$+ \frac{G_i'}{\rho_i} (e_{13}^{(i)2} + e_{23}^{(i)2}) + \frac{1}{2\rho_i} \left(K_i^{s,c} - \frac{2}{3} G_i \right) e_{jj}^{(i)2} + \frac{1}{\rho_i} e_{jj}^{(i)} (\alpha_c^{(i)} c_i + \alpha_s^{(i)} S_i) + Э_0^{(i)};$$

$$p = \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (m = 1,\ 2,\ 3);$$

$$L_{11}^{(i)} (U_m) = \frac{1}{H_1^{(i)}} U_{1,1} + \frac{1}{(H_1 H_2)^{(i)}} H_{1,2}^{(i)} U_2^{(i)} + \frac{1}{H_1^{(i)}} H_{1,3}^{(i)} U_3^{(i)};$$

$$L_{12}^{(i)} (U_1,\ U_2) = \frac{H_1^{(i)}}{H_2^{(i)}} (U_1^{(i)} H_1^{(i)})_{,2} + \frac{H_2^{(i)}}{H_1^{(i)}} (U_2^{(i)} H_2^{(i)})_{,1};$$

$$L_{13}^{(i)} (U_3,\ U_1) = H_1^{(i)} \left(\frac{U_1^{(i)}}{H_1^{(i)}} \right)_{,3} + \frac{1}{H_1^{(i)}} U_{3,1}^{(i)} \quad (1 \rightleftarrows 2); \quad L_{33}^{(i)} (U_3) = U_{3,3}^{(i)};$$

$$F_\nu^{(i)} = F_1^{(i)} n_1 + F_2^{(i)} n_2;$$

$Э_0^{(i)}$ — внутренняя энергия трансверсально-изотропного i-го слоя в начальном состоянии ($\tau = 0$); $\sigma_{mj}^{(i)}$, $e_{mj}^{(i)}$, $U_j^{(i)}$ — компоненты тензора напряжений, деформаций и вектора перемещений i-го слоя соответственно; $X_j^{(i)}$ — компоненты вектора объемных сил; σ_{jz}^{+}, σ_{jz}^{-} — заданные факторы внешнего воздействия; $\sigma_{jz}^{(k,k+1)}$ — компоненты вектора межслойных контактных напряжений, возникающие на поверхности $S^{(k,k+1)}$; $\vec{n}\ (n_1,\ n_2,\ n_3)$ — вектор внешней нормали к срединной поверхности слоя; H_1, H_2 — коэффициенты Ламе; ρ_i — плотность; $K_i^{s,c}$, G_i — постоянные упругости; G_i' — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных к срединной поверхности; S_i, t_i, μ_i, c_i — приращения энтропии, температуры, разности химических потенциалов компонент твердого раствора и концентрации растворенного вещества соответственно; $F_j^{(i)}$, $R_j^{(i)}$ — компоненты векторов количества энтропии и массы; λ_i, L_i — коэффициенты, характеризующие тепло- и массопроводность слоя; $\lambda_s^{(i)}$, $L_s^{(i)}$ — коэффициенты тепло- и массообмена на соответствующей поверхности; $d_c^{(i)}$, $d_s^{(i)}$ — постоянные, характеризующие изменение химического потенциала с изменением для данного материала c и S; $C_i^{e,c}$ — удельная теплоемкость при постоянных объеме и концентрации; $\alpha_c^{(i)}$, $\alpha_s^{(i)}$ — постоянные материала, характеризующие изменение напряжений в зависимости от c и S. Запятая в нижних индексах (1) означает дифференцирование по соответствующей координате. Поверхностные интегралы распространены на соответствующих участках S_f ($f = \sigma, U, t, S, \mu, c$), которые, не перекрываясь, составляют полную поверхность слоистого тела.

Отметим, что I_s^c определяется из I_s^t при замене величин типа $\vec{F}$, t, S, λ на $\vec{R}$, μ, c, L с аналогичными индексами соответственно.

Дальше, варьируя выражение (1) по всем независимым функциональным аргументам, из вариационного уравнения $\delta K = 0$ получаем:

уравнения состояния

$$\sigma_{mj}^{(i)} = \left(K_i^{s,c} - \frac{2}{3} G_i^0\right) e_{mj}^{(i)} \delta_{mj} + 2G_i e_{mj}^{(i)} + (\alpha_s^{(i)} S_i + \alpha_c^{(i)} c_i)\, \delta_{mj},$$

$$t_i = \frac{T_0}{C_i^{ec}} S_i + d_s^{(i)} c_i + \frac{1}{\rho_i} \alpha_s^{(i)} e^{(i)}, \tag{2}$$

$$\mu_i = d_c^{(i)} c_i + d_s^{(i)} S_i + \frac{1}{\rho_i} \alpha_c^{(i)} e^{(i)};$$

балансовые уравнения

$$\operatorname{grad} t_i + p \frac{T_0}{\lambda_i} \vec{F}_i = 0, \quad H_1^{(i)} H_2^{(i)} \rho_i S_i + \operatorname{div} \vec{F}_i = 0; \tag{3}$$

механические

$$\sigma_{jz}^{(N)} = \sigma_{jz}^{+} \text{ на } S_{+}, \quad \sigma_{jz}^{(1)} = \sigma_{jz}^{-} \text{ на } S_{-}, \tag{4}$$

$$P_j^{(i)} = \sigma_{1j}^{(i)} n_1 + \sigma_{2j}^{(i)} n_2 = \tilde{P}_j^{(i)} \text{ на } S_\sigma^{(i)}, \; U_j^{(i)} = \tilde{U}_j^{(i)} \text{ на } S_U^{(i)}$$

и физические граничные условия

$$\frac{T_0}{\lambda_s^{\pm}} n_3 p F_3^{\pm} \mp (t^{\pm} - t_c^{\pm}) = 0 \quad \text{на } S_s^{\pm}, \tag{5}$$

$$\frac{T_0}{\lambda_S^{(i)}} p F_\nu^{(i)} - (t_S^{(i)} - t_c^{(i)}) = 0 \quad \text{на } S_s^{(i)};$$

условия на границе контактирующих слоев

$$U_j^{(k)} = U_j^{(k+1)}, \; \sigma_{jz}^{(k)} = \sigma_{jz}^{(k+1)} = \sigma_{jz}^{(k,k+1)} \quad \text{на } S^{(k,k+1)}; \tag{6}$$

$$t^{(k)} = t^{(k+1)} \quad \text{на } S_t^{(k,k+1)}, \quad p \frac{T_0}{\lambda_s^{(k)}} (n_3 F_3)^{(k)} + t^{(k)} = 0 \quad \text{на } S_s^{(k)},$$

$$\frac{T_0}{\lambda_s^{(k+1)}} p\, (n_3 F_3)^{(k+1)} + t^{(k+1)} = 0 \quad \text{на } S_s^{(k+1)}. \tag{7}$$

Здесь $\delta_{mj} = \begin{cases} 1, & m = j, \\ 0, & m \neq j \end{cases}$. Аналогично из уравнений (3), (5) — (7) при замене указанных выше величин получим граничные условия для химического потенциала. В соотношениях для $\sigma_{j3}^{(i)}$ вместо G_i^0 следует писать G_i'.

Геометрические соотношения и уравнения движения, которые следуют из вариационного уравнения, известны [3, 5] и их приводить нет необходимости. Используя уравнения (3), из граничных условий типа (7) имеем равенство температур, химических потенциалов соприкасающихся тел, а также равенство потоков тепла и вещества через поверхность раздела в виде

$$\begin{aligned} t^{(k)} &= t^{(k+1)}, \quad \lambda^{(k)} t_{,3}^{(k)} = \lambda^{(k+1)} t_{,3}^{(k+1)}, \\ \mu^{(k)} &= \mu^{(k+1)}, \quad L^{(k)} \mu_{,3}^{(k)} = L^{(k+1)} \mu_{,3}^{(k+1)} \end{aligned} \tag{8}$$

соответственно. Здесь физические величины t и μ определяются с помощью формул (2). При $d_s = d_c = 0$ из уравнения (1) имеем вариационное уравнение связанной термоупругости слоистых тел.

Приведем выражение (1) к двухмерному континууму. Следуя работам [4, 5], внесем в уравнение (1) смещения $U_j^{(i)} = u_j^{(i)} + z^{(i)}\gamma_i^{(i)}$, учитывая при этом сдвиговые, нормальные деформации и то, что

$$\gamma_3^{(i)} = -\frac{\nu_i}{1-\nu_i}\varepsilon^{(i)} + \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i}(\beta_c^{(i)}C_1^{(i)} + \beta_s^{(i)}S_1^{(i)}), \tag{9}$$

где $\varepsilon^{(i)} = \varepsilon_1^{(i)} + \varepsilon_2^{(i)}$, $(S_l,\ C_l) = \frac{2l-1}{2h_i^l}\int\limits_{-h_i}^{h_i}(S,\ C)\,z^{l-1}dz^{(i)}$ — интегральные характеристики энтропии и концентрации; $\varepsilon_1^{(i)}$, $\varepsilon_2^{(i)}$ — компоненты деформации срединной поверхности; ν_i — коэффициент Пуассона; $\beta_c^{(i)}$, $\beta_s^{(i)}$ — коэффициенты линейного расширения [5] ($l = 1, 2$).

В результате получим основной функционал теории механотермодиффузии слоистых оболочек, из которого в качестве уравнений Эйлера и естественных граничных условий вытекает замкнутая система взаимосвязанных уравнений и условий на контуре и границе раздела соответствующих оболочек. Для однородной оболочки с приведенными характеристиками материала эти уравнения записаны в работе [5].

Не ограничивая общности задачи, приведем балансовые уравнения двухслойной трансверсально-изотропной оболочки, вытекающие из двухмерного функционала, к уравнениям теплопроводности для оболочки с тонким покрытием, которые с учетом соотношений

$$\begin{gathered} T_1^{(2)} = \Omega_t^{-1}[h_2h_t^{(2)}t_c^+ + (1 + h_2h_t^{(2)})\,t_1^+], \\ T_2^{(2)} = \Omega_t^{-1}h_2h_t^{(2)}(t_c^+ - t_1^+) \end{gathered} \tag{10}$$

и условия теплообмена оболочки с внешней средой

$$\Delta_2^* t_1^+ + \frac{2h_t^{(2)}}{h_2}\Omega_t^{-1}(t_c^t - t_1^+) - \frac{2}{h_2}\frac{\lambda_3^{(1)}}{\lambda_3^{(2)}}\left(\frac{\partial t_1}{\partial z_1}\right)_{z_1=h_1} = 0, \tag{11}$$

имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} \left(\Delta_1^* + \frac{1}{4}\lambda_t\Delta_2^*\right)T_1^{(1)} + \frac{1}{4}\lambda_t\Delta_2^*T_2^{(1)} - \frac{h_t^{(1)}}{2h_1}(1 + H\Omega_t^{-1})\,T_1^{(1)} + \\ + \frac{h_t^{(1)}}{2h_1}(1 - H\Omega_t^{-1})\,T_2^{(1)} = -\frac{h_t^{(1)}}{2h_1}(t_c^- + H\Omega_t^{-1}t_c^+), \\ \left(\Delta_1^* + \frac{3}{4}\lambda_t\Delta_2^*\right)T_2^{(1)} + \frac{3}{4}\lambda_t\Delta_2^*T_1^{(1)} + \frac{3}{2}\frac{h_t^{(1)}}{h_1}(1 - H\Omega^{-1})\,T_1^{(1)} - \\ - \frac{3}{2h_1^2}(\mu_t + h_th_1H\Omega^{-1})\,T_2^{(1)} = -\frac{3h_t^{(1)}}{2h_1}(H\Omega^{-1}t_c^+ - t_c^-), \end{gathered} \tag{12}$$

где $\quad t_l^{\pm} = T_1^{(l)} \pm T_2^{(l)};\ \Delta_k^* = \frac{\lambda_l}{\lambda_3^{(l)}}\Delta_l - \frac{1}{a_l}p;\ \mu_t = 2 + h_1h_t^{(1)};$

$$\Delta_l = \frac{1}{A_1^{(l)}A_2^{(l)}}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1^{(l)}}\left(\frac{A_1^{(l)}}{A_2^{(l)}}\frac{\partial}{\partial\alpha_1^{(l)}}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2^{(l)}}\left(\frac{A_2^{(l)}}{A_1^{(l)}}\frac{\partial}{\partial\alpha_2^{(l)}}\right)\right];\quad \lambda_t = \frac{h_2\lambda_3^{(2)}}{h_1\lambda_3^{(1)}};$$

$$\Omega_t = 1 + 2h_t^{(2)}h_2;\quad H = \frac{h_t^{(2)}\lambda_3^{(2)}}{h_t^{(1)}\lambda_3^{(1)}};\quad a_l = \frac{\lambda_3^{(l)}}{\rho_lC_l^{e,c}};$$

$\lambda_3^{(l)}$ — коэффициент теплопроводности в перпендикулярной к срединной поверхности G_l плоскости; $A_1^{(l)}$, $A_2^{(l)}$ — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности; $T_1^{(l)}$, $T_2^{(l)}$ — интегральные характеристики температуры.

Положив в выражениях (12) $h_1 = h_2$, $a_1 = a_2$, $\lambda_3^{(l)} = \lambda_l$, получим уравнения теплопроводности для однородных оболочек одинаковой толщины, совпадающие при $h_2 = 0$ с приведенными в работе [5]. Отметим, что аналогичные уравнения для трехслойной оболочки приводятся к уравнениям диффузионного типа для оболочки с двухсторонним или двухслойным покрытием.

1. *Балабух Л. И., Шаповалов Л. А.* О вариационных уравнениях термоупругости.— Прикл. математика и механика, 1960, 24, № 4, с. 703—707.
2. *Лазько В. А.* Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев.— Механика композит. материалов, 1982, № 1, с. 77—84.
3. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Вариационная форма уравнений теории термодиффузионных процессов в деформируемом твердом теле.— Прикл. математика и механика, 1969, 33, № 4, с. 774—776.
4. *Раврик М. С.* К построению вариационного функционала механотермодиффузии твердых тел с тонкими анизотропными покрытиями.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1984, вып. 20, с. 61—65.
5. *Швец Р. Н., Раврик М. С.* О вариационных уравнениях термодиффузии деформируемых тонких оболочек с конечной сдвиговой жесткостью.— Прикл. механика, 1983, 18, № 2, с. 83—88.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 01.06.83

УДК 539.3:538.54

А. Р. Гачкевич, Б. И. Чорный

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ИНДУКЦИОННОМ НАГРЕВЕ

Изложим методику расчета термонапряженного состояния тонких упругих электропроводных неферромагнитных пластин, которые находятся под воздействием квазиустановившегося электромагнитного поля, создаваемого внешними источниками тока высокой частоты. При этом исходим из известной расчетной модели определения термонапряженного состояния электропроводных тел при индукционном нагреве [3], в которой решение задачи состоит в поэтапном определении электромагнитного поля, джоулева тепла, температурного поля и квазистатических напряжений.

Определение электромагнитного поля и джоулева тепла. Пусть рассматриваемая электропроводная пластина толщиной $2h$, в области которой (область D) отсутствуют сторонние заряды и токи, помещена в диэлектрическую среду (область D_0) и подвергается воздействию квазиустановившегося электромагнитного поля. Электромагнитное поле возбуждается индуктором, представляющим собой токонесущую плоскость, параллельную нагреваемой поверхности пластины.

На первом этапе решения исходной задачи, т. е. при определении электромагнитного поля, будем исходить из уравнений электродинамики, записанных относительно комплексных амплитуд напряженностей электрического поля $\vec{E}$, $\vec{E}_0$ [3]. Введя в областях D, D_0 смешанную криволинейную систему координат $\{\alpha_1, \alpha_2, z\}$ [4], где α_j $(j = 1, 2)$ — координаты точек срединной плоскости пластины, z — координата точки на нормали к этой плоскости (α_j, z отнесены к h), комплексную амплитуду плотности токов в индукторе можно представить в виде

$$\vec{f}_0^{\,+} = [f_{01}^{+}(\alpha_1, \alpha_2)\vec{e}_1 + f_{02}^{+}(\alpha_1, \alpha_2)\vec{e}_2]\,\delta(z - z_0 - 1). \qquad (1)$$

Тогда для определения электромагнитного поля в пластине из неферромагнитного материала ($\mu \approx \mu_0$) получим следующую систему уравнений и граничных условий:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + L_j^2 + k_0^2\right) E_{0j}^{\pm} + (-1)^l L E_{0i}^{\pm} =$$