

ские оболочки. Они позволяют достаточно просто найти частные решения при любом температурном поле, если имеются решения соответствующих силовых задач. Наиболее эффективного применения установленных соотношений можно ожидать при построении напряженно-деформированного состояния оболочек на основе приближенных уравнений, например полубезмоментной теории, теории краевого эффекта, тангенциального и изгибного состояний [4—6], особенно при рассмотрении задач о локализованных воздействиях и задач для оболочек с неоднородной структурой (наличие, например, дискретных макровключений).

1. Власов В. З. Пологие оболочки. Действие гидростатической нагрузки и температуры. Математические аналогии.— Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. № 10, 1951.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек.— Гостехиздат, М.: 1953.— 544 с.
3. Майзель В. М. Температурная задача термоупругости.— Киев: Изд-во АН УССР, 1951.— 152 с.
4. Нерубайло Б. В. Применение асимптотического метода в задачах термоупругости цилиндрических оболочек.— Прикл. механика, 1979, 15, № 3, с. 36—45.
5. Нерубайло Б. В. Ортоотропная цилиндрическая оболочка при действии локальной нагрузки.— Там же, № 6, с. 40—48.
6. Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В. О методах синтеза напряженного состояния в теории оболочек.— Докл. АН СССР, 1983, 269, № 1, с. 54—56.
7. Подстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурные напряжения в оболочках.— Киев: Изд-во АН УССР, 1961.— 212 с.
8. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки.— М.: Физматгиз, 1963.— 635 с.

Моск. авиац. ин-т

Получено 07.12.83

УДК 539:375:534.1

Г. С. Кит, О. В. Побережный

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ТЕЛЕ С РАЗРЕЗАМИ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В данной статье рассмотрена динамическая задача для пространства с разрезами при антиплоской деформации. Соответствующая краевая задача методом теории потенциала сведена к системам сингулярных интегродифференциальных уравнений. Найдены перемещения и коэффициенты интенсивности напряжений для прямолинейной трещины.

Рассмотрим упругое изотропное пространство, содержащее  $N$  полосовидных вдоль оси  $z$  разрезов  $L_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ). Предположим, что тело с разрезами находится в условии антиплоской деформации. В этом случае единственным отличным от нуля перемещением будет  $W$ , которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $c_2^2 = \mu/\rho$ ;  $\mu$ ,  $\rho$  — модуль сдвига и плотность материала среды;  $W(x, y, t)$  — перемещение вдоль оси  $z$ . Не исчезающие в этом случае компоненты тензора напряжений определяются соотношением

$$\sigma_{nz} = \mu \frac{\partial W}{\partial n}, \quad (x, y) \in L. \quad (2)$$

Здесь  $n$  — нормаль к контуру  $L$  ( $\cup L_i$ ). Относительно контуров  $L_i$  предполагаем, что они являются разомкнутыми кривыми Ляпунова. Знаками «+» и «-» обозначаем значение соответствующих величин слева и справа от контура  $L$ .

Для определения перемещений  $W$  имеем граничные условия

$$(\sigma_{nz}^i)^+ = -(\sigma_{nz}^i)^- = \sigma_{nz}^i. \quad (3)$$

Решение поставленной задачи построим следующим образом. Применяя к соотношениям (1)—(3) интегральное преобразование Лапласа — Карсона,

получаем

$$\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} - \frac{p^2}{c_2^2} \bar{W} = 0, \quad (4)$$

$$\bar{\sigma}_{nz} = \mu \frac{\partial \bar{W}}{\partial n}, \quad (5)$$

$$(\bar{\sigma}_{nz})^+ = -(\bar{\sigma}_{nz})^- = \bar{\sigma}_{nz}^i. \quad (6)$$

Здесь черточкой обозначено трансформанту, а через  $p$  — параметр преобразования Лапласа — Карсона.

Таким образом, пришли к задаче для уравнения Гельмгольца (4) с граничными условиями (6), метод решения которой известен [1].

Представляя трансформанту перемещения  $\bar{W}(x, y, p)$  в виде суммы аналогов логарифмических потенциалов (потенциалов для уравнения Гельмгольца) двойного слоя [2] с неизвестными плотностями

$$\bar{W}(x, y, p) = \frac{1}{2\pi} \frac{p}{c_2} \sum_{j=1}^N \int_{L_j} \bar{\gamma}_j(s, p) \cos(n, r_j) K_1(\omega_j) ds, \quad (7)$$

из граничных условий (6) для определения последних получаем интегральные уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \frac{p}{c_2} \sum_{j=1}^N \int_{L_j} \left[ \bar{\gamma}_j(s, p) \cos \alpha_{ij}^0 K_1(\omega_{ij}) - \right. \\ & \left. - \frac{p}{c_2} \bar{\gamma}_j(s, p) \cos \alpha_{ij}^* K_0(\omega_{ij}) \right] ds = \frac{1}{\mu} \bar{\sigma}_{nz}^i, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $K_i(\omega)$  — функции Макдональда;  $\omega_{ij} = \frac{p}{c_2} r_{ij}$ ;  $r_{ij}$  — расстояние между точкой  $N$  дуги  $L_i$  и точкой  $M$  дуги  $L_j$ ;  $\alpha_{ij}^* = \alpha_{ij} + \alpha_{ij}^0$ ;  $\alpha_{ij}$ ,  $\alpha_{ij}^0$  — углы между вектором  $r_{ij}$  и положительными касательными к  $L_j$  в точке  $M$  и к  $L_i$  в точке  $N$ . Решая уравнение (8), находим трансформанты неизвестных плотностей  $\bar{\gamma}_j(s, p)$ , после чего из формул (7), (5) получаем трансформанты перемещений и напряжений. Применяя к последним обратное преобразование Лапласа—Карсона, находим перемещения и напряжения.

Рассмотрим прямолинейную трещину, находящуюся в условии антиплоской деформации и занимающую область  $|x| < l$ ,  $y = 0$ ,  $|z| < \infty$ . Пусть к ее берегам мгновенно приложены напряжения  $\sigma_{yz}^+ = -\sigma_{yz}^- = \sigma_0 \Theta(t)$ , где  $\Theta(t) = 0$ ,  $t < 0$ ,  $\Theta(t) = 1$ ,  $t > 0$ . В изображениях Лапласа — Карсона интегральное уравнение задачи получим из уравнения (8), в котором полагаем  $j = 1$ ,  $\bar{\sigma}_{yz}^i = \sigma_0$ ,  $\alpha_{ij}^0 = \alpha_{ij} = 0$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \frac{p}{c_2} \int_{-l}^l \bar{\gamma}'(\xi, p) K_1 \left[ \frac{p}{c_2} (x - \xi) \right] d\xi - \\ & - \frac{1}{2\pi} \frac{p^2}{c_2^2} \int_{-l}^l \bar{\gamma}(\xi, p) K_0 \left[ \frac{p}{c_2} (x - \xi) \right] d\xi = \frac{1}{\mu} \sigma_0. \end{aligned} \quad (9)$$

После некоторых преобразований уравнение (9) легко привести к виду

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \bar{\gamma}'(\xi, p) K(u) d\xi = \frac{c_2}{\mu} \frac{\sigma_0}{p}. \quad (10)$$

Здесь  $u = \frac{p}{c_2} (x - \xi)$ ;

$$K(u) = K_1(u) + \int_0^u K_0(u) du = \int_0^\infty \frac{V\eta^2 + 1}{\eta} \sin \eta u d\eta. \quad (11)$$

Точных методов решения уравнения (10) в настоящее время не имеется, а приближенные решения можно получить асимптотическими методами, развитыми в работе [3].

Приближенное решение уравнения (10) можно получить в замкнутом виде, если в выражении (11) использовать следующую аппроксимацию:

$$\frac{\sqrt{\eta^2 + 1}}{\eta} \cong \operatorname{cth} \eta. \quad (12)$$

Максимальная относительная ошибка такой аппроксимации (12) в пределах  $\eta = 1,2 \div 1,6$  составляет около 8 % и быстро уменьшается по мере увели-

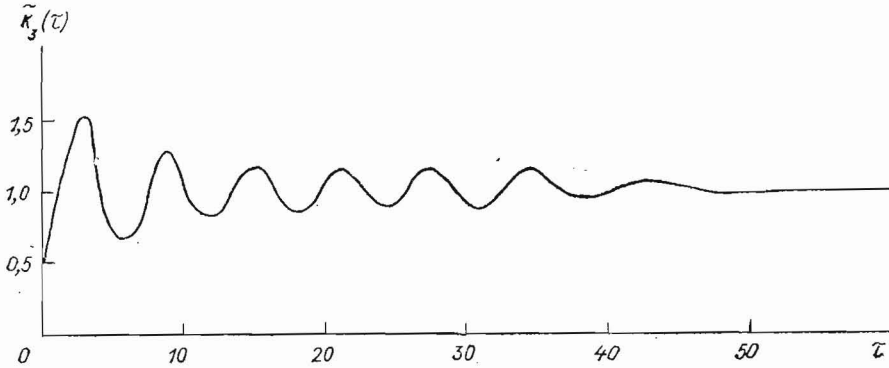


Рис. 1.

чения или уменьшения  $\eta$  от указанного интервала. При такой аппроксимации ядро интегрального уравнения упрощается, а само интегральное уравнение допускает разрешение в квадратурах [4]. В результате получим

$$\bar{\gamma}(x, p_*) = \frac{4}{\pi} \frac{\sigma_0}{\mu} \frac{l}{p_*} \operatorname{arccos} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi p_*}{2} \frac{x}{l}}{\operatorname{ch} \frac{\pi p_*}{2}}, \quad p_* = \frac{pl}{c_2}. \quad (13)$$

Имея указанное решение, трансформанты перемещений и напряжений в произвольной точке пространства определяем по формулам

$$\bar{W}(x, y, p_*) = \frac{1}{2\pi} \frac{p_*}{l} \int_{-l}^l \bar{\gamma}(\xi, p_*) K_1(p_* r) \cos(\hat{y}, r) d\xi, \quad (14)$$

$$\bar{\sigma}_{yz}(x, y, p_*) = \frac{\partial \bar{W}}{\partial y}, \quad \bar{\sigma}_{xz}(x, y, p_*) = \frac{\partial \bar{W}}{\partial x}, \quad (15)$$

где

$$r^2 = (x - \xi)^2 + y^2, \quad \cos(\hat{y}, r) = \frac{y}{r}.$$

При решении задач о предельно-равновесном состоянии тел с трещинами важно знать коэффициент интенсивности напряжений

$$k_3(t) = \lim_{x \rightarrow l} \sqrt{x^2 - l^2} \sigma_{yz}(x, 0, t), \quad (16)$$

трансформанта которого с учетом формул (13) определяется формулой

$$\bar{k}_3(p_*) = \sigma_0 \sqrt{l} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\operatorname{th} \frac{\pi}{2} p_*}{p_*}}. \quad (17)$$

Для нахождения оригиналов перемещений и коэффициентов интенсивности напряжений воспользуемся одним из приближенных методов [5].

На рис. 1 представлена зависимость коэффициента интенсивности напряжений  $\tilde{k}_3(\tau) = \frac{k_3(\tau)}{\sigma_0 \sqrt{l}}$  от безразмерного времени  $\tau = \frac{c_2 t}{l}$ .

В литературе данной задаче посвящено несколько работ [6—8]. Однако единого мнения относительно, например, максимума превышения динамического коэффициента интенсивности напряжений над статическим нет. В работах [6, 7] этот показатель равен около 50 %, в работе [8] — меньше 25 %. Результаты, полученные в работе и представленные на рис. 1, практически совпадают с результатами работ [6, 7]. Отметим, что эти задачи решались разными методами, поэтому вряд ли можно считать совпадение ре-

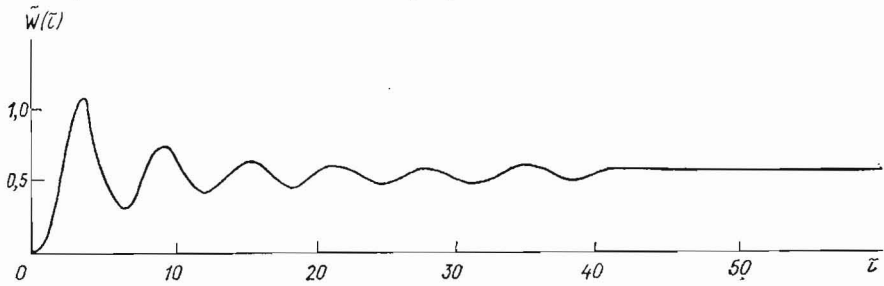


Рис. 2.

зультатов случайным. Кроме того, решение, полученное нами для  $\tilde{k}_3(\tau)$ , исследовано (чего не сделано в работах [6—8]) во всем интервале времени. Как видно из рис. 1, при  $\tau > 50$  практически динамический коэффициент интенсивности напряжений совпадает со статическим.

На рис. 2 представлена зависимость  $\tilde{W} = \frac{\pi\mu}{\sigma_0} W(x, y, t)$  в точке  $(l, l)$  от времени  $\tau$ . Как видно, характер поведения перемещения в этой точке идентичен поведению коэффициента интенсивности напряжений с незначительным сдвигом во времени.

1. Кит Г. С., Побережный О. В. Расчет температурного поля в пластине с трещинами при наличии теплообмена. Качество, прочность, надежность и технологичность электровакуумных приборов.— Киев: Наук. думка, 1976.— 154 с.
2. Побережный О. В., Кит Г. С. Об определении температурного поля в пластине с шайбой при неидеальном тепловом контакте между ними.— Инж.-физ. журн., 1968, 15, № 4, с. 703—709.
3. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости.— М.: Наука, 1974.— 455 с.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М.: Физматгиз, 1963.— 639 с.
5. Крылов В. И., Скобля Н. С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращение преобразования Лапласа.— М.: Наука, 1974.— 223 с.
6. Sih G. C. Some elastodynamic problems of crack.— Int. J. Fract. Mech., 1968, 4, N 1, p. 51—68.
7. Ravera R. S., Sih G. C. Transient analysis of stress waves around cracks under antiplane strain.— J. Acoust. Soc. Amer., 1970, 47, N 3, p. 875—881.
8. Sih G. C., Embley G. T., Ravera R. S. Impact response of a finite crack in plane extension.— Int. J. Solids and Struct., 1972, 8, N 7, p. 977—993.

Ин-т прикл. пробл. механики  
и математики АН УССР, Львов

Получено 22.08.83

УДК 539.377

И. М. Зашкильняк

#### ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВКЛЮЧЕНИЕМ И КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Рассмотрим упругую полуплоскость с впаянным круговым упругим включением единичного радиуса. Предположим, что на линии спая  $\gamma$  включения и матрицы имеют место условия идеального теплового и механического контакта, граница полуплоскости  $\Gamma$  свободна от внешних нагрузок и поддерживается при нулевой температуре или теплоизолирована. Включение и матрица ослаблены трещинами, которые размещены на простых гладких контурах.