На рис. 1, 2 показана зависимость управления (7) от безразмерной координаты y при $\varepsilon a^2 = 0{,}5$, где ε — коэффициент сосредоточения теплового потока q_*, причем $W = \frac{U_*(y)}{q/2a^2(\pi\varepsilon)^{1/2}}$. Кривые *1—5* на рис. 1 приведены при удалении плоскости расположения внутренних источников от граничной поверхности на расстояние $z_0 = 0;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 1{,}0;\ 1{,}2$ соответственно.

Из анализа формулы (7) и численных результатов следует, что нулевые вертикальные температурные перемещения границы полупространства можно обеспечить с помощью одного охлаждения стоками тепла (7) только при $z_0 = 0$, когда $U(y) = q(y)$, т. е. при $T(x, y) = 0$. При $z_0 > 0$ управление $U(y)$ наряду с положительным всегда имеет отрицательное значение. Последнее означает, что для обеспечения нулевых перемещений кроме охлаждения стоками тепла всегда потребуется некоторый подогрев с помощью источников, закон изменения которых описывается формулой (7).

При удалении плоскости расположения источников тепла от граничной поверхности z_0 управление (7) носит колебательный затухающий характер с резким увеличением максимальной амплитуды и частоты. Для иллюстрации последнего на рис. 2 показано управление (7) при $z_0 = 3$ и $\varepsilon a^2 = 0{,}5$. Следует отметить, что к такому же количественному эффекту приводит увеличение коэффициента εa^2 при неизменном z_0.

Проведенные исследования показывают, что при нагреве полупространства тепловым потоком по закону Гаусса практически обеспечить нулевые вертикальные температурные перемещения граничной поверхности с помощью одного охлаждения стоками тепла можно лишь при незначительном удалении плоскости расположения источников от границы z_0 либо при малом коэфициенте интенсивности теплового потока εa^2, либо, наконец, при малости обоих параметров.

1. *Снеддон И.* Преобразование Фурье.— М. : Изд-во иностр. лит., 1955.— 667 с.
2. *Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями.— М. : Физматгиз, 1958.— 167 с.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 11.05.83

УДК 539.377

В. А. Мищенко, А. П. Поддубняк

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБЫХ И КОРОТКИХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Пусть материальная точка X упругой среды за время t движется в состоянии $\bar{\chi}$ к точке x, причем это движение выражается зависимостью $x = x(X, t)$. Определим деформацию материальной среды как

$$e \equiv \frac{\partial x}{\partial X} - 1, \tag{1}$$

а уравнение состояния примем в виде

$$\sigma = \sigma(e, T, X), \tag{2}$$

где напряжение σ — нелинейная непрерывная и непрерывно дифференцируемая по e, T, X функция; T — температура.

Волновой процесс при отсутствии объемных сил описывается одномерным уравнением движения Коши

$$(\sigma')_t = \rho x^{\cdot\cdot}, \tag{3}$$

ρ — плотность материала упругой среды. Из уравнений (2), (3) имеем

$$\frac{\partial \sigma}{\partial e} e' + \frac{\partial \sigma}{\partial T} T' + (\sigma')_{t,e,T} = \rho x^{\cdot\cdot}. \tag{4}$$

Индексы в выражениях (3), (4) означают, что частные производные взяты при фиксированных t или t, e, T. Здесь и ниже точками обозначены производные по t, штрихами — производные по X или по аргументу, который является функцией X, t.

Уравнение распространения волн деформаций (4) дополним уравнением распространения тепла [1—4]

$$T'' = \frac{1}{a} T^{\cdot} + \frac{\tau_r}{a} T^{\cdot\cdot} + \eta (e^{\cdot} + \tau_r e^{\cdot\cdot}), \tag{5}$$

обозначения параметров в котором соответствуют принятым в работе [3].

Предположим, что одномерная упругая волна наложена на деформированное состояние $\tilde{\chi}_0$, вообще говоря, неоднородное и нестатическое. Тогда в состоянии $\tilde{\chi}_0$ $x_0 = x_0 (X, t)$, $T_0 = T_0 (X, t)$, а в состоянии

$$x = x_0 (X, t) + u (X, t), \quad T = T_0 (X, t) + \tau (X, t); \tag{6}$$

где u — перемещение, вызванное наложением волны; τ — изменение температуры в среде, связанное с появлением дополнительной деформации.

Вследствие нелинейности и неоднородности материальной среды распространение волн сопровождается искажением их амплитудно-фазовых характеристик. Примем, что на расстоянии порядка длины соответствующей волны это искажение несущественно, т. е. положим

$$u (X, t) = a_1 (X, t) f_1 [\varphi (X, t)], \quad \tau (X, t) = a_2 (X, t) f_2 [\varphi (X, t)], \tag{7}$$

где $a_i (X, t)$ — медленно изменяющиеся амплитуды, функции $\varphi (X, t)$, f_i определяют форму волны.

Введем пространственное волновое число k, круговую частоту ω и длину волны λ:

$$k = \varphi', \quad \omega = -\varphi^{\cdot}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}. \tag{8}$$

Тогда, разлагая в ряды Тейлора функции, входящие в уравнения (1) — (5), в окрестности их значений в предварительном состоянии $\tilde{\chi}_0$, получаем

$$e = e_0 + k a_1 f_1' + a_1' f_1 + \cdots,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial T} = \frac{\partial \sigma_{00}}{\partial T_0} + \frac{\partial^2 \sigma_{00}}{\partial T_0 \partial e_0} (k a_1 f_1' + a_1' f_1) + \frac{\partial^2 \sigma_{00}}{\partial T_0^2} a_2 f_2 + \cdots \tag{9}$$

Здесь $e_0 \equiv x_0' - 1$ — предварительная деформация в $\tilde{\chi}_0$; $f_i' \equiv \frac{\partial f_i}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \sigma_{00}}{\partial T_0} \equiv \frac{\partial \sigma (e, T, X)}{\partial T}$ в $\tilde{\chi}_0$ и т. д. В состоянии $\tilde{\chi}_0$ справедливы уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{00}}{\partial e_0} e_0' + \frac{\partial \sigma_{00}}{\partial T_0} T_0' + (\sigma_{00}')_{t, e, T} = \rho \ddot{x}_0, \tag{4'}$$

$$T_0'' = \frac{1}{a} \dot{T}_0 + \frac{\tau_r}{a} \ddot{T}_0 + \eta (\dot{e}_0 + \tau_r \ddot{e}_0). \tag{5'}$$

Подставляя разложения (9) в (4), (5) и учитывая (4′), (5′), получаем уравнения распространения термоупругих волн в терминах медленно изменяющихся амплитуд и волновых чисел. Предположение слабости волны означает, что $O (a_i \lambda^{-1}) = \mu_i \leqslant \mu \ll 1$ $(i = 1, 2)$. Пусть l_{a_i}, l_k, l_{T_0}, l_{σ_0}, l_{e_0} — расстояния, на которых a_i, k, T_0, σ_0, e_0 соответственно значительно изменяются с распространением волн. Предполагая также волны короткими, находим

$$O \left(\frac{\lambda}{l_q} \right) = \mu_q \ll 1, \quad q = \{a_i, k, T_0, \sigma_0, e_0\}.$$

При этом можно допустить следующие оценки [5]:

$$O (a_i') = O (\dot{a}_i) = \mu_i \mu_{a_i}, \quad O (k') = \mu_k \lambda^{-2},$$

$$O(a_i'') = O(\ddot{a}_i) = \mu_i \mu_{a_i}^2 \lambda^{-1}, \quad O(e_0') = \mu_{e_0}\lambda^{-1},$$

$$O(\sigma_{00}') = O\left(\frac{\partial\sigma_{00}'}{\partial e_0}\right) = O\left(\frac{\partial\sigma_{00}'}{\partial T_0}\right) = \mu_{\sigma_0}\lambda^{-1},$$

$$O(T_0') = \mu_{T_0}\lambda^{-1}, \quad O(\omega) = \lambda^{-1}, \quad O(\omega^{\cdot}) = \mu_k\lambda^{-2},$$

где $O(\dot{a}_i) \sim Va_i l_{a_i}^{-1} \sim O(a_i')$ и т. д.; $V = \omega k^{-1}$ — фазовая скорость волны. Примем также, что величины μ_{a_i}, μ_k, μ_{T_0}, μ_{σ_0}, μ_{e_0}, μ одного порядка. Тогда уравнения (4), (5) можно разложить по малому параметру μ. Сравнение членов разложения при одинаковых степенях этого параметра при-

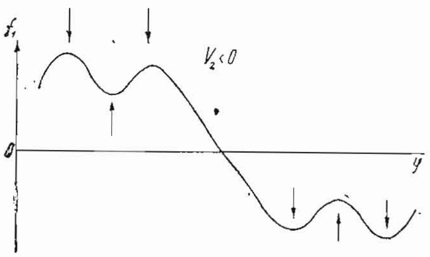

Рис. 1.

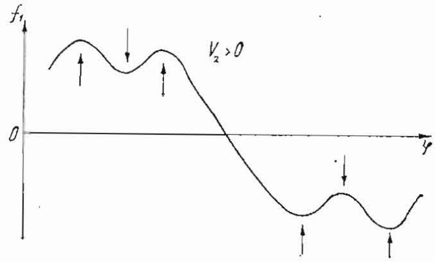

Рис. 2.

водит к последовательности систем уравнений относительно a_1 и a_2. В нулевом приближении с учетом уравнений (4′), (5′) получим

$$\left(\frac{\partial\sigma_{00}}{\partial e_0} k^2 - \rho\omega^2\right) f_1'' a_1 + \frac{\partial\sigma_{00}}{\partial T_0} k f_2' a_2 = 0, \tag{10}$$

$$\eta k\omega(\tau_r\omega f_1''' - f_1'') a_1 + \left[\left(\frac{\tau_r}{a}\omega^2 - k^2\right) f_2'' - \frac{\omega}{a} f_2'\right] a_2 = 0.$$

Условие совместности этой системы приводит к дисперсионному уравнению относительно комплексного волнового числа $k = k(\omega)$. Анализ корней этого уравнения (волновых чисел k_1 и k_2 для упругой и тепловой волн соответственно) полностью аналогичен изложенному в работах [2, 3]. Перейдем к последующему приближению, которое с учетом решения дисперсионного уравнения, связей между a_1 и a_2, вытекающих из уравнений (10), позволяет получить дифференциальные уравнения относительно медленно изменяющихся амплитуд a_1, a_2. Так, для амплитуды упругой волны a_1 имеем

$$\frac{\delta a_1}{\delta t} = -\alpha a_1 + \beta a_1^2 = \beta a_1(a_1 - \gamma), \quad \gamma = \frac{\alpha}{\beta}, \tag{11}$$

$$\alpha = \frac{1}{2V_1}\left(\frac{\delta e_0}{\partial t}\frac{\partial}{\partial e_0} + \frac{\delta T_0}{\delta t}\frac{\partial}{\partial T_0} + 2V_1\frac{\partial}{\partial X}\right)V_1, \tag{12}$$

$$\beta = -\frac{\omega^2}{V_1^2} f_1'' V_2, \quad V_2 = \left(\frac{\partial}{\partial e_0} - \eta\frac{\partial}{\partial T_0}\right)V_1,$$

где через $\frac{\delta}{\delta t}$ обозначены полные производные по времени; V_1 — фазовая скорость упругой волны. Результаты (11), (12) получены в предположении $\omega \ll \omega_*$, где ω_* — характеристическая частота термоупругой среды;

$$V_1 = \sqrt{\omega_* a(1+\varepsilon)}; \quad \omega_* = \frac{1}{\rho a}\frac{\partial\sigma_{00}}{\partial e_0}; \quad \varepsilon = -\frac{\rho\eta}{\omega_*}\frac{\partial\sigma_{00}}{\partial T_0}.$$

Если точка формообразования волны движется по закону $X = X(0) + V_1 t$, где $X(0)$ — ее начальное положение при $t = 0$, то из формул (12) получим α, β как функции t. Решение уравнения Бернулли (11) в этом случае

$$a_1(t) = \frac{a_1(0)\, e^{-\Phi(t)}}{1 - a_1(0)\int\limits_0^t \beta(\xi)\, e^{-\Phi(\xi)} d\xi}, \quad \Phi(t) = \int\limits_0^t \alpha(\xi)\, d\xi$$

описывает глобальное поведение амплитуды упругой волны [5].

Локальные изменения амплитуды и профиля волны проанализируем непосредственно из уравнения (11). Поскольку волна распространяется при условии $\varepsilon > -1$, то видно, что в случае $\gamma < 0$ или $a_1 > \gamma$ происходит искажение профиля упругой волны (рис. 1, 2; стрелками указаны направления движения точек профиля). Аналогичная картина наблюдается и при $a_1 < \gamma$ (знаки при V_2 на рис. 1, 2 изменяются на противоположные). Сравнение со случаем, когда влияние температурного поля на упругие волны исключается [5], показывает, что в полосе частот ниже характеристической частоты материала ω_* качественная картина не изменяется. Однако количественные изменения для конкретных термоупругих сред могут быть существенными.

1. *Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные и линейные переходные волновые процессы деформации термоупругих и упругих тел.— Таллин : Изд-во АН ЭССР, 1972.— 172 с.
2. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М* Обобщенная термомеханика.—Киев : Наук. думка, 1976.— 312 с.
3. *Семерак Ф. В.* Исследование гармонических волн в термоупругих средах с учетом конечной скорости распространения тепла.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 7—11.
4. *Энгельбрехт Ю. К., Нигул У. К.* Нелинейные волны деформации.— М. : Наука, 1981.— 235 с.
5. *Takuoka T.* Weak and short waves in one-dimensional ingomogeneous nonlinear elastic materials.— J. Acoust. Soc. Amer., 1981, **69**, N 1, p. 66—70.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 01.08.83

УДК 539.3

В. В. Пороховский

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ЗВУКОВОГО ПУЧКА С АКУСТИЧЕСКИ ЖЕСТКОЙ СФЕРОЙ В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Анализ эхо-сигнала, вызванного падением на акустически мягкую сферу сферического звукового импульса направленного действия, подробно изучался в работе [1].

В данной работе исследуется задача эхо-сигнала, вызванного звуковым импульсом, распространяющимся в виде узкого конического пучка и освещающего лишь часть поверхности акустически жесткой сферы. Среда, окружающая объект, трактуется как сжимаемая невязкая жидкость. Задача решается с помощью метода разделения переменных, интегрального преобразования Фурье по времени и интегрального преобразования Зоммерфельда — Ватсона.

Пусть на акустически жесткую сферу набегает звуковой импульс в виде узкого конического пуска, ось симметрии которого проходит через центр оболочки. Давление в падающей волне имеет вид [3]

$$p_i(r, \theta, \tau) = \frac{l_0}{l} p_0 f(\tau - l)\,[H(\tau - l) - H(\tau - l - \tau_0)]\, R(r, \theta), \qquad (1)$$

где

$$R(r, \theta) = H\left(\sin\theta_0 - \frac{r l_1(\theta_0)}{l}\sin\theta\right); \quad f(\tau) \equiv 0 \quad (\tau \leqslant 0);$$

$$l_1(\theta) = \sqrt{l_0^2 - 2l_0\cos\theta + 1}; \quad l = \sqrt{l_0^2 - 2rl_0\cos\theta + r^2}. \qquad (2)$$

Здесь p_0 —постоянная, имеющая размерность давления; $f(\tau)$ — модуляция импульса; r, θ — сферические координаты с началом отсчета в центре объекта; $\tau = ct/R_1$; $\tau_0 = ct_0/R_1$; c — скорость звука в акустической среде; t — время; t_0 — длительность импульса посылки; $H(x)$ — функция Хевисайда; l_0 — расстояние от центра источника до центра рассеивателя, отнесенное, как и другие линейные величины, к радиусу сферического объекта R_1. Предполагается, что звуковой импульс посылки пересекает объект по сегменту с углом $2\theta_0 < \pi$.