$P_n^{el}(r)$ в виде

$$P_n^{el}(r) = A_n r^n \sqrt{1-r^2} + h_n(r), \quad 0 < r < 1.$$

Здесь A_n — неизвестная постоянная, определяемая из условия, что $h_n(r)$ — ограниченная величина. Функцию $P_n^{el}(r)$ представим в виде разложения

$$P_n^{el}(r) = A_n \sum_{j=0}^{\infty} P_{nj}^0 J_n(\gamma_{jn} r) + \sum_{j=0}^{\infty} h_{nj} J_n(\gamma_{jn} r), \tag{15}$$

где h_{nj} — неизвестные коэффициенты; $P_{nj}^0 = \frac{\varepsilon_{nj}\Gamma(0,5)}{\sqrt{2\gamma_{jn}^3}} J_{n+\frac{3}{2}}(\gamma_{jn})$; $\Gamma(0, 5)$ — гамма-функция.

Подставляя выражение (15) в (14), получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, в которой неизвестные коэффициенты h_{nj} стремятся к нулю быстрее, чем g_{nj}^{el}, поэтому для решения этой системы можно применить метод редукции.

1. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.— Киев : Наук. думка, 1981.— 284 с.
2. *Лямшев Л. М.* Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости.— М. : Изд-во АН СССР, 1953.— 79 с.
3. *Пелех Б. Л.* Обобщенная теория оболочек.— Львов : Вища шк., 1978.— 159 с.
4. *Мэтсавзэр Я. А., Векслер Н. Д., Стулов Я. С.* Дифракция акустических импульсов на упругих телах.— М. : Наука, 1979.— 226 с.
5. *Скучик Е.* Основы акустики.— М. : Мир, 1976.— Т. 2. 542 с.
6. *Stuart A. D.* Acoustic radiation from submerged plates. 1. Enfluence of leaky wave poles.— JASA, 1976, 59, N 5, p. 1160—1169.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, Львов

Получено 12.10.83

УДК 539.3

М. М. Николишин

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С СИСТЕМОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ РАЗРЕЗОВ

Рассмотрим упругое равновесие отнесенной к линиям кривизны α, β многослойной замкнутой цилиндрической оболочки с системой k параллельных периодически расположенных сквозных разрезов $|\alpha| \leqslant \alpha_0$, $\beta = 2n\pi/k$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k/2$ при k четном, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (k-1)/2$ при k нечетном. Оболочка предполагается тонкой, допускающей применение гипотезы недеформируемых нормалей для пакета в целом [1]. Слои оболочки изотропные и расположены симметрично относительно срединной поверхности. Пусть напряженно-деформированное состояние оболочки без разрезов осесимметрично. В этом случае напряженное состояние оболочки с системой k периодически расположенных разрезов будет циклически симметричным, что позволяет в дальнейшем исследовать цилиндрическую панель $|\beta| \leqslant \pi/k$ с разрезом $|\alpha| \leqslant \alpha_0$, $\beta = 0$.

Используя предложенный в работе [5] метод решения задач для оболочек с разрезами, систему дифференциальных уравнений в перемещениях для круговой многослойной цилиндрической оболочки записываем так:

$$L_{j1}u + L_{j2}v + L_{j3}w = q_j \quad (j = \overline{1, 3}). \tag{1}$$

Здесь

$$L_{11} = C_{11}\partial_1^2 + \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})\partial_2^2; \quad L_{12} = L_{21} = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12})\partial_1\partial_2;$$

$$L_{13} = L_{31} = C_{12}\partial_1; \quad L_{22} = (C_{11} + R^{-2}D_{11})\partial_2^2 + \left[\frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) + \right.$$

$$+ 2R^{-2}(D_{11}-D_{12})\Big]\partial_1^2;\quad L_{23}=L_{32}=C_{11}\partial_2-R^{-2}(2D_{11}-D_{12})\partial_1^2\partial_2-$$

$$-R^{-2}D_{11}\partial_2^3;\quad L_{33}=C_{11}+R^{-2}D_{11}\nabla^2\nabla^2;\quad q_1=R\partial_1C_{12}\varepsilon_2^0;$$

$$q_2=\partial_2(RC_{11}\varepsilon_2^0+D_{11}\varkappa_2^0);\quad q_3=RC_{11}\varepsilon_2^0-(\partial_1^2D_{12}+\partial_2^2D_{11})\varkappa_2^0;$$

$$D_{11}=\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{m}\frac{E_i}{1-\nu_i^2}(h_i^3-h_{i-1}^3);\quad D_{12}=\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{m}\frac{E_i\nu_i}{1-\nu_i^2}(h_i^3-h_{i-1}^3);$$

$$C_{11}=2\sum_{i=1}^{m}\frac{E_i}{1-\nu_i^2}(h_i-h_{i-1});\quad C_{12}=2\sum_{i=1}^{m}\frac{E_i\nu_i}{1-\nu_i^2}(h_i-h_{i-1});$$

$$\partial_1=\frac{\partial}{\partial\alpha};\quad \partial_2=\frac{\partial}{\partial\beta};\quad \nabla^2=\partial_1^2+\partial_2^2;$$

E_i, ν_i — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона i-го слоя оболочки; h_i — расстояние от срединной поверхности до границы раздела i-го и $(i+1)$-го слоев; $(2m-1)$ — число слоев оболочки; R, u, v, w — радиус и компоненты перемещений срединной поверхности оболочки. Функции ε_2^0, $\varkappa_2^0$, характеризующие скачки перемещений и углов поворота для исследуемой панели, представим в виде [5]

$$\varepsilon_2^0(\alpha,\beta)=\varepsilon(\alpha)\,\delta(\beta),\quad \varkappa_2^0(\alpha,\beta)=\frac{1}{R}\varkappa(\alpha)\,\delta(\beta),\quad |\alpha|<\alpha_0, \tag{2}$$

$$\varepsilon_2^0(\alpha,\beta)=\varkappa_2^0(\alpha,\beta)=0,\quad |\alpha|\geqslant\alpha_0,$$

где $\varepsilon(\alpha)=\frac{1}{R}[v(\alpha)];\quad \varkappa(\alpha)=-[\theta_2(\alpha)]$.

Решение системы уравнений (1) представим в виде

$$z=L_z\varphi_1+P_z\varphi_2\quad (z=u,v,w). \tag{3}$$

Здесь

$$L_u=R\,[\mu\partial_1^7+(2\mu-1)\,\partial_1^5\partial_2^2+(\mu-2)\,\partial_1^3\partial_2^4-\partial_1\partial_2^6];$$

$$P_u=R\,[\eta\partial_1^5+(\mu-\eta)\,\partial_1^3\partial_2^2-\partial_1\partial_2^4];\quad L_v=R\,[(2+\mu)\,\partial_1^6\partial_2+$$

$$+(5+2\mu)\,\partial_1^4\partial_2^3+(4+\mu)\,\partial_1^2\partial_2^5+\partial_2^7];\quad P_v=R\,[\eta\,(2+\mu)\,\partial_1^4\partial_2+$$

$$+(2+\eta+\mu)\,\partial_1^2\partial_2^3+\partial_2^5];\quad L_w=\frac{R^3C_{11}}{D_{11}}(1-\mu^2)\,\partial_1^4;\quad P_w=-R\,[\mu\partial_1^6+$$

$$+(2\mu+1)\,\partial_1^4\partial_2^2+(2+\mu)\,\partial_1^2\partial_2^4+\partial_2^6];\quad \mu=\frac{C_{12}}{C_{11}};\quad \eta=\frac{D_{12}}{D_{11}},$$

а функции φ_i $(i=1,2)$ удовлетворяют уравнениям

$$D\varphi_1=\varepsilon_2^0(\alpha,\beta),\quad D\varphi_2=R\varkappa_2^0(\alpha,\beta),$$
$$D=\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2+a^{-2}\partial_1^4,\quad a^2=\frac{D_{11}}{R^2C_{11}(1-\mu^2)}. \tag{4}$$

Подставляя выражения (2) в уравнения (4) и учитывая условия циклической симметрии

$$v=0,\quad \partial_2w=0\ \text{при}\ \beta=\pm\pi/k, \tag{5}$$

для определения разрешающих функций $\varphi_i(\alpha,\beta)$ получаем формулу

$$\varphi_i(\alpha,\beta)=\frac{k}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\cos kn\beta\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}e_i(\xi)\,\Phi_n^0(\xi-\alpha)\,d\xi\quad (i=1,2), \tag{6}$$

где $e_1(\xi)=\varepsilon(\xi)$; $e_2(\xi)=\varkappa(\xi)$; $\lambda_0=\frac{1}{2}$; $\lambda_n=1$ $(n\geqslant 1)$; $\Phi_n^0(z)$ легко получить из формул, приведенных в работе [5], заменив в последних c на a.

Вдоль отрезка $|\alpha|\leqslant\alpha_0$, $\beta=0$ потребуем, чтобы суммарные (в оболочке без разрезов и вызванные полем (2)) нормальное усилие N_2^1 и изгибающий момент M_2^1 удовлетворяли условиям свободных берегов разреза

$$N_2^1(\alpha, 0) = 0, \quad M_2^1(\alpha, 0) = 0 \text{ при } |\alpha| < \alpha_0. \tag{7}$$

Подставляя соотношение (6) в (3), а последнее в формулы

$$N_2 = C_{11}R^{-1}(\mu\partial_1 u + \partial_2 v + w - R\varepsilon_2^0),$$
$$M_2 = -D_{11}R^{-2}[(\eta\partial_1^2 + \partial_2^2)w - \partial_2 v + R^2\varkappa_2^0] \tag{8}$$

и удовлетворяя граничным условиям (7), для определения производных от функций $\varepsilon(\alpha)$, $\varkappa(\alpha)$ получаем систему сингулярных интегральных уравнений

$$\frac{a_m}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{F_m(\alpha_0\tau)}{\tau - t}d\tau = G_m(t), \quad |t| \leqslant 1 \quad (m = 1, 2). \tag{9}$$

Здесь

$$G_m = f_m - \frac{\alpha_0 k}{2\pi}\sum_{i=1}^{2}\int_{-1}^{1}F_i(\alpha_0\tau)K_{mi}[\alpha_0(t-\tau)]d\tau; \quad t = \frac{\alpha}{\alpha_0}; \quad a_1 = 1;$$

$$a_2 = 3 - 2\eta - \eta^2; \quad f_1 = \frac{2N_2^0}{C_{11}(1-\mu^2)}; \quad f_2 = \frac{2M_2^0}{Ra^2C_{11}(1-\mu^2)}; \quad F_1 = -\frac{d\varepsilon}{d\alpha};$$

$$F_2 = -a^2\frac{d\varkappa}{d\alpha}; \quad K_{11}(z) = -\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{kz}{2} + \frac{1}{kz} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{kz}{\operatorname{sh}kz}\right)\operatorname{cth}\frac{kz}{2} +$$
$$+ (1-\omega_0)\operatorname{sgn}z - 4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{L_n}\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{g_{jn}}(A_{jn}^{(1)}\omega_1 + A_{jn}^{(2)}\omega_2) - \frac{1}{2}e^{-kn|z|}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\operatorname{sgn}z - \frac{1}{2}knz\right)\right]; \quad K_{12}(z) = K_{21}(z) = \eta e^{-\frac{|z|}{\sqrt{2a}}}\sin\frac{z}{\sqrt{2a}} -$$
$$-\frac{4}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L_n}\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{g_{jn}}(D_{jn}^{(1)}\omega_1 + D_{jn}^{(2)}\omega_2); \quad K_{22}(z) = -\frac{a_2}{2}\operatorname{cth}\frac{kz}{2} + \frac{a_2}{kz} +$$
$$+ (1-\eta)^2\left(1 - \frac{kz}{\operatorname{sh}kz}\right)\operatorname{cth}\frac{kz}{2} - \eta(1-\omega_0)\operatorname{sgn}z -$$
$$-4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{L_n}\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{g_{jn}}(A_{jn}^{(3)}\omega_1 + A_{jn}^{(4)}\omega_2) - \frac{1}{2}e^{-kn|z|}\left[(1-\eta^2)\operatorname{sgn}z +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}(1-\eta)^2knz\right]\right\}; \quad \omega_0 = \exp\left(-\frac{|z|}{\sqrt{2a}}\right)\cos\frac{z}{\sqrt{2a}};$$
$$\omega_1 = \exp(-a_{jn}|z|)\cos b_{jn}z\operatorname{sgn}z; \quad \omega_2 = \exp(-a_{jn}|z|)\sin b_{jn}z;$$
$$A_{jn}^{(1)} = t_{jn}E_{jn} - s_{jn}H_{jn} - 2k^2n^2d_{jn} + k^4n^4E_{jn}; \quad D_{jn}^{(1)} = \eta d_{jn} - k^2n^2E_{jn};$$
$$d_{jn} = s_{jn}C_{jn} + t_{jn}B_{jn}; \quad A_{jn}^{(3)} = (1-\eta^2)(t_{jn}E_{jn} - s_{jn}H_{jn}) -$$
$$-2k^2n^2(2-\eta-\eta^2)d_{jn} + k^2n^2(5-4\eta-\eta^2)E_{jn} - 2k^6n^6(1-\eta)B_{jn} +$$
$$+\frac{1}{a^2}E_{jn}; \quad t_{jn} = p_{jn}^2 - g_{jn}^2; \quad s_{jn} = 2p_{jn}g_{jn}; \quad r_{jn} = s_{jn}B_{jn} - t_{jn}C_{jn};$$

$A_{jn}^{(2)}, D_{jn}^{(2)}, A_{jn}^{(4)}$ получим из выражений для $A_{jn}^{(1)}, D_{jn}^{(1)}, A_{jn}^{(3)}$, заменяя в последних E_{jn}, H_{jn}, d_{jn}, B_{jn} соответственно на H_{jn}, $-E_{jn}$, r_{jn}, $-C_{jn}$; формулы для определения L_n, E_{jn}, H_{jn}, p_{jn}, g_{jn}, B_{jn}, C_{jn} приведены в работе [5]; N_2^0, M_2^0 — усилие и момент в оболочке без трещин.

Решая систему сингулярных интегральных уравнений (9) методом механических квадратур [2], для определения коэффициентов интенсивности [3], соответствующих нормальному усилию (K_N) и изгибающему моменту

(K_M), получаем

$$K_N = \frac{1}{2} N_2^0 \sqrt{R\alpha_0}\, K_1^*, \quad K_M = \frac{1}{2} N_2^0 a_2 R a \sqrt{R\alpha_0}\, K_3^*, \tag{10}$$

где

$$K_i^* = \sum_{j=1}^{N/2} A_{2j-1}^{(i)}, \quad A_{2j-1}^{(i)} = \frac{4}{N} \sum_{\nu=1}^{N/2} \varphi_\nu^{(i)} \cos(2j-1)\vartheta_\nu, \quad \vartheta_m = \frac{2m-1}{2N}\pi$$
$$(i = 1, 3);$$

$\varphi_\nu^{(1)}$, $\varphi_\nu^{(3)}$ находим, решая систему N линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{N/2} (\alpha_{m\nu}\varphi_\nu^{(1)} + \beta_{m\nu}\varphi_\nu^{(3)}) = 1,$$
$$\sum_{\nu=1}^{N/2} (\beta_{m\nu}\varphi_\nu^{(1)} + \overset{*}{\alpha}_{m\nu}\varphi_\nu^{(3)}) = \frac{M_2^0}{RaN_2^0}. \tag{11}$$

Здесь

$$\alpha_{m\nu} = \frac{1}{2N}[\psi_{m\nu} + K_{11}(z_1) - K_{11}(z_2)]; \quad \beta_{m\nu} = \frac{1}{2N}[K_{12}(z_1) - K_{21}(z_2)];$$

$$\overset{*}{\alpha}_{m\nu} = \frac{1}{2N}[a_2\psi_{m\nu} + K_{22}(z_1) - K_{22}(z_2)]; \quad z_1 = \alpha_0(\cos\vartheta_m - \cos\vartheta_\nu);$$

$$z_2 = \alpha_0(\cos\vartheta_m + \cos\vartheta_\nu); \quad \psi_{m\nu} = \frac{1}{\sin\vartheta_m}\left[\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\vartheta_m \mp \vartheta_\nu) + \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\vartheta_m \mp \vartheta_\nu)\right].$$

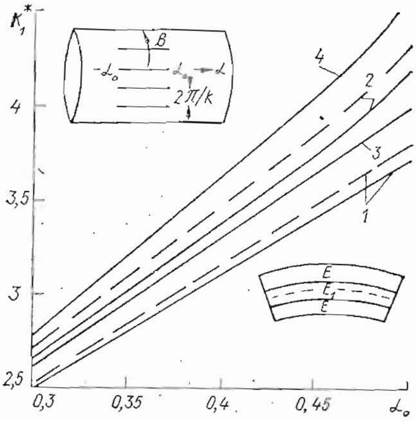

Рис. 1.

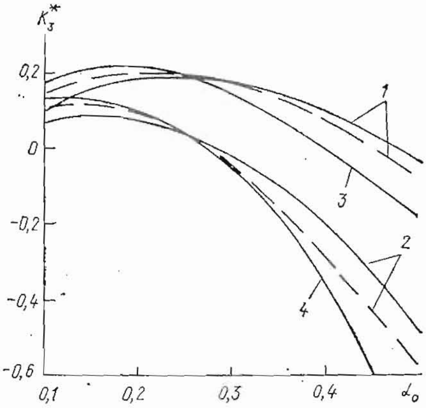

Рис. 2.

В формуле для определения $\psi_{m\nu}$ верхний знак берем в случае, когда число $|m - \nu|$ нечетно, а нижний — когда оно четно.

Для иллюстрации применения приведенных соотношений рассмотрим оболочку, составленную из трех изотропных слоев одинаковой толщины, которая находится под воздействием внутреннего давления интенсивности p. При этом считаем, что коэффициент Пуассона $\nu(\gamma) = \nu$ неизменный по всей толщине оболочки; модуль упругости $E(\gamma)$ внешнего и внутреннего слоев равен E, а среднего — σE. Тогда

$$C_{11} = \frac{2Eh}{3(1-\nu^2)}(2+\sigma), \quad C_{12} = \nu C_{11}, \quad D_{11} = \frac{2Eh^3}{81(1-\nu^2)}(26+\sigma),$$

$$D_{12} = \nu D_{11}, \quad a^2 = \frac{h^2}{27R^2(1-\nu^2)}\,\frac{26+\sigma}{2+\sigma}, \quad \mu = \eta = \nu,$$

где h — полутолщина оболочки.

Численный анализ коэффициентов интенсивности проводился при следующих значениях параметров: $R/h = 100$, $\nu = 0{,}3$, $\sigma = 0{,}2$; 1; 5, $k = 1$; 7. На рис. 1, 2 приведены графики, характеризующие изменение коэффициентов интенсивности K_1^* и K_3^* соответственно в зависимости от относительной длины разрезов $\alpha_0 = l/R$ и их количества. Кривыми *1*, *3* показано изменение коэффициентов интенсивности в оболочке с одним разрезом ($k = 1$), а кривыми *2*, *4* — в оболочке с семью ($k = 7$) разрезами. При этом штриховые линии соответствуют однородной оболочке ($\sigma = 1$), сплошные линии *1*, *2* — параметру $\sigma = 0{,}2$, а *3*, *4* — параметру $\sigma = 5$. Как видно из графиков, коэффициенты интенсивности имеют меньшее значение для оболочек, в которых модуль упругости внешнего и внутреннего слоев превышает значение модуля упругости среднего слоя.

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек.— М. : Наука, 1974.— 446 с.
2. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости.— М. : Наука, 1973.— 303 с.
3. *Панасюк В. В., Саврук М. М., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.— Киев : Наук. думка, 1976.— 443 с.
4. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек.— Киев : Наук. думка, 1978.— 343 с.
5. *Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М.* Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 29—41.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 04.05.83

УДК 539.3

Р. М. Мартыняк

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГИХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ ПРИ НЕПОЛНОМ МЕХАНИЧЕСКОМ КОНТАКТЕ

Рассмотрим плоскую задачу о контактном взаимодействии упругих тел при неполном контакте. Тела моделируем нижней S_1 и верхней S_2 полуплоскостями, которые контактируют без трения вдоль оси абсцисс L декартовой системы координат и находятся под действием сжимающих усилий на бесконечности $\sigma_y^\infty = -p$. Под влиянием системы сосредоточенных сил $P_k = P_{xk} + iP_{yk}$ в точках z_{0k} и моментов M_k в точках z_{k0} ($z_{0k}, z_{k0} \in S_k$) вдоль N отрезков $L_n = [a_n, b_n]$ линии L образуются зоны нарушения прямого контакта. Вдоль $L = L'' \setminus L'$, где $L' = \bigcup\limits_{n=1}^{N} L_n$, тела контактируют непосредственно. К границам полуплоскостей на L' приложены нормальные $\sigma_{y1} = P^-(x)$, $\sigma_{y2} = P^+(x)$ и касательные $\tau_{xy1} = Q^-(x)$, $\tau_{xy2} = Q^+(x)$ усилия. Здесь и далее индекс 1 у величины относит ее к области S_1, индекс 2 — к S_2, а обозначения для компонент тензора напряжений, вектора смещений и упругих постоянных общеприняты [1]. Требуется определить напряженно-деформированное состояние в телах, форму зазоров и их местоположение.

Напряжения и перемещения должны удовлетворять граничным условиям на линии L и на бесконечности:

$$\tau_{xy1} = \tau_{xy2} = 0 \quad (x \in L''), \quad \tau_{xy1} = Q^-(x), \quad \tau_{xy2} = Q^+(x) \quad (x \in L'); \tag{1}$$

$$\sigma_{y1} = \sigma_{y2} \quad (x \in L''), \quad \sigma_{y1} = P^-(x), \quad \sigma_{y2} = P^+(x) \quad (x \in L'); \tag{2}$$

$$v_1' - v_2' = 0 \quad (x \in L''); \tag{3}$$

$$\sigma_{yk}^\infty = -p, \quad \tau_{xyk}^\infty = \sigma_{xk}^\infty = 0 \quad (k = 1, 2). \tag{4}$$

Перейдем к решению задачи. Напряжения и перемещения выражаются с учетом условия (4) через комплексные потенциалы $\Phi_k(z)$, продолженные из области S_k в S_l ($k, l = 1, 2$; $k \neq l$) и убывающие на бесконечности, следующим образом [1, 3]:

$$\begin{gathered}\sigma_{yk} - i\tau_{xyk} = \Phi_k(z) - \Phi_k(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_k'(z)} + A(z) - p;\\ 2\mu_k(u_k' + iv_k') = \varkappa_k\Phi_k(z) + \Phi_k(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_k'(z)} + B_k(z) + \frac{p}{4}(3 - \varkappa_k)\\ (z \in S_k;\ k = 1, 2),\end{gathered} \tag{5}$$