УДК 517.956

В. А. Літовченко*

ВЛАСТИВІСТЬ ЛОКАЛІЗАЦІЇ РЕГУЛЯРНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ФРАКТАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Розглянуто фрактальне рівняння інтегрального вигляду з оператором Бесселя дробового інтегро-диференціювання з додатним параметром. Для його регулярних розв'язків із узагальненими граничними значеннями на початковій гіперплощині встановлено властивість локального посилення збіжності на тій її частині, де граничне значення має хороші властивості.

Ключові слова: *задача Коші, узагальнене граничне значення, властивість локалізації розв'язку, оператор Бесселя дробового інтегро-диференціювання.*

Вступ. Через нелокальність дробової похідної багато динамічних систем описуються більш точно завдяки використанню диференціальних рівнянь дробового порядку. Різноманітні природні системи в таких областях як в'язкопружність, електричні схеми, нелінійні коливання землетрусу чи дифузійні процеси в фрактальних середовищах мають проміжну поведінку, яку можна моделювати тільки з використанням диференціальних рівнянь дробового порядку. Саме тому такі рівняння є важливою альтернативою диференціальним рівнянням з цілим порядком; вони викликають значний інтерес у сучасних дослідників і є предметом жвавих дискусій та обговорень на наукових симпозіумах і конференціях (див., наприклад, [9, 14, 15, 17, 18]).

Розглянемо фрактальне рівняння інтегрального вигляду

$$\partial_t u(t,x) + \int\limits_{-\infty}^{\gamma} \left((a\mathscr{E} - \Delta_x)^{\tau/2} u\right)(t,x)\,d\tau = 0, \quad (t,x) \in \Pi := (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

в якому $\gamma > 0$, $(a\mathscr{E} - \Delta_x)^{\tau/2}$ – оператор Бесселя дробового інтегро-диференціювання з параметром $a > 1$ [10, 13], причому величини a і γ такі, що функція $\tilde{\Omega}_\gamma(\cdot) := \tilde{P}_\gamma(\cdot) - \tilde{P}_\gamma(0)$ є опуклою на множині $[0,+\infty)$. Тут $\mathscr{E}$ – одиничний оператор, $\Delta_x := \partial^2_{x_1} + \ldots + \partial^2_{x_n}$ – оператор Лапласа, а

$$\tilde{P}_\gamma(\zeta) := \frac{(a+\zeta^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+\zeta^2)^{1/2}}, \qquad \zeta \in \mathbb{R}.$$

У просторі Шварца S швидко спадних функцій [19] рівняння (1) рівносильне псевдодиференціальному рівнянню [7]

$$\partial_t u(t,x) + F^{-1}[P_\gamma(\xi)F[u](t,\xi)](t,x) = 0, \qquad (t,x) \in \Pi,$$

яке близьке за структурою до класичного рівняння теплопровідності. Тут F – оператор перетворення Фур'є, $P_\gamma(\cdot) := \tilde{P}_\gamma(\|\cdot\|)$ – символ псевдодиференціювання, $\|\cdot\| := (\cdot,\cdot)^{1/2}$ – евклідова норма, а $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$.

Абсолютну розв'язність задачі Коші для рівняння (1) у спеціальних просторах W^Ω_β, які є певним узагальненням відомих просторів типу S, W Гельфанда, Шилова і Гуревича [2, 4], встановлено у [7]. А саме, описано всі початкові дані, при яких ця задача є коректно розв'язною, при цьому її розв'язок є регулярним і має таку ж властивість гладкості та поведінку в

* v.litovchenko@chnu.edu.ua

околі нескінченно віддалених просторових точок, що й фундаментальний розв'язок задачі Коші.

Слід зазначити, що ця сукупність початкових даних становить досить широкий клас, серед елементів якого є узагальнені функції. У зв'язку з цим початкова умова цієї задачі Коші сформульована з дещо послабленим поняттям границі. Проте у класичній теорії задачі Коші для параболічних рівнянь, зокрема для рівняння теплопровідності, відомо, що класичні розв'язки $u(t,\cdot)$ таких рівнянь із неперервними граничними значеннями $f(\cdot)$ на початковій гіперплощині $t=0$ прямують до $f(\cdot)$ при $t\to+0$ рівномірно стосовно просторової змінної на кожній компактній частині цієї гіперплощини (див. [12, 14]). Тоді виникає природне питання про можливість локального посилення збіжності в початковій умові розглянутої в [7] задачі Коші для рівняння (1) у випадку, коли початковий розподіл f локально має «хороші» властивості, тобто постає задача про принцип локалізації.

Зазначимо, що вперше подібна задача була розглянута в теорії тригонометричних рядів (див. [11]). Дослідження, пов'язані з встановленням принципу локалізації для розв'язків параболічних за Петровським і Шиловим рівнянь з частинними похідними, проводилися в [3, 8, 16], а для псевдодиференціальних рівнянь з цілими аналітичними символами − в [6].

Пропонована робота присвячена встановленню властивості локалізації регулярних розв'язків рівняння (1) із узагальненими граничними значеннями типу розподілів Гуревича. Попередньо уточнюється оцінка фундаментального розв'язку задачі Коші стосовно часової змінної і проводиться розширення простору основних функцій фінітними, яке необхідне для коректного означення рівності узагальнених функцій на множині. Одержані результати проілюстровано на модельному прикладі.

1. Попередні відомості. Нехай $\mathbb{N}$ − множина всіх натуральних чисел, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ − відповідно дійсний і комплексний простори розмірності n, $\mathbb{Z}_+^n$ − множина всіх n-вимірних мультиіндексів; i − уявна одиниця; $z^\ell := z_1^{\ell_1}\ldots z_n^{\ell_n}$, $|\ell| := \ell_1+\ldots+\ell_n$, якщо $z:=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ і $\ell:=(\ell_1,\ldots,\ell_n)\in\mathbb{Z}_+^n$; $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ − клас усіх нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^n$ функцій; S − простір Шварца швидко спадних функцій; $L_2(\mathbb{R}^n)$ − простір Лебеґа сумовних у квадраті на $\mathbb{R}^n$ функцій; $\mu(\cdot)$ − неперервна зростаюча на $[0,+\infty)$ функція така, що $\lim\limits_{\tau\to+\infty}\mu(\tau)=+\infty$ і $\mu(0)=0$.

Покладемо $\tilde{M}(\tau):=\int_0^\tau \mu(\xi)\,d\xi$, $\tau\ge 0$. На множині $[0,+\infty)$ функція $\tilde{M}(\cdot)$ зростаюча, диференційовна та опукла, причому $\tilde{M}(0)=0$ і $\lim\limits_{\tau\to+\infty}\tilde{M}(\tau)=+\infty$.

Поряд з $\tilde{M}(\cdot)$ розглянемо аналогічну функцію $\tilde{\Omega}(\cdot)$, побудовану за функцією $\omega(\cdot)$, яка має такі самі властивості, що й $\mu(\cdot)$.

Далі, нехай $M(x):=\tilde{M}(\|x\|)$ і $\Omega(x):=\tilde{\Omega}(\|x\|)$, $x\in\mathbb{R}^n$. Для $\alpha>0$ і $\beta>0$ покладемо:

$$S_\alpha^\beta=\{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)\,|\,\exists c>0,\exists A>0,\exists\delta>0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+^n,\forall x\in\mathbb{R}^n:\left|\partial_x^k\varphi(x)\right|\le$$
$$\le cA^{|k|}|k|^{\beta|k|}e^{-\delta\|x\|^{1/\alpha}}\},$$

$$W_M^\beta=\{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)\,|\,\exists c>0,\exists A>0,\exists\delta>0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+^n,\forall x\in\mathbb{R}^n:\left|\partial_x^k\varphi(x)\right|\le$$
$$\le cA^{|k|}|k|^{\beta|k|}e^{-M(\delta x)}\}.$$

Простір W_{α}^{Ω} означимо як сукупність усіх елементів із класу $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, які допускають аналітичне продовження в $\mathbb{C}^n$ до цілих функцій, для яких

$$\exists c > 0, \exists \lambda > 0, \exists \delta > 0 \ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}^n : |\varphi(z)| \le ce^{-\delta\|x\|^{1/\alpha} + \Omega(\lambda y)}.$$

У [2, 7] ці простори наділені спорідненими топологіями, з якими вони є об'єднанням повних досконалих зліченно-нормованих просторів. Зокрема, послідовність елементів $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \in \mathbb{N}\} \subset S_{\alpha}^{\beta}$ у просторі S_{α}^{β} є:

1) обмеженою, якщо

$$\exists c > 0, \exists A > 0, \exists \delta > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \nu \in \mathbb{R}^n : \left|\partial_x^k \varphi_\nu(x)\right| \le$$

$$\le cA^{|k|} |k|^{\beta|k|} e^{-\delta\|x\|^{1/\alpha}};$$

2) збіжною до нуля (позначатимемо $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu \to +\infty]{S_{\alpha}^{\beta}} 0$), якщо вона обмежена в цьому просторі і правильно збіжна, тобто

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \forall \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n : \ \partial_x^k \varphi_\nu(x) \underset{\nu \to +\infty}{\overset{x \in \mathcal{K}}{\rightrightarrows}} 0$$

(тут йдеться про рівномірну збіжність стосовно x на кожному компакті $\mathcal{K}$).

Якщо $M(\cdot)$ і $\bar{M}(\cdot)$ – функції, побудовані за відповідними $\mu(\cdot)$ і $\bar{\mu}(\cdot)$, що є двоїстими за Юнґом (див. означення в [4]), то виконуються топологічні рівності

$$F[W_{\alpha}^{M}] = W_{\bar{M}}^{\alpha}, \qquad F[S_{\alpha}^{\beta}] = S_{\beta}^{\alpha}, \tag{2}$$

при цьому оператор F є неперервним у кожному з цих просторів.

Безпосередньо з результатів, одержаних у [7], випливає, що функція $g(\cdot) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ – мультиплікатор у просторі $\Phi \in \{S_{\alpha}^{\beta}, W_{\Omega}^{\beta}\}$ лише тоді, коли

$$\forall \delta > 0, \exists c_\delta > 0, \exists A_\delta > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n, \forall x \in \mathbb{R}^n : \left|\partial_x^k g(x)\right| \le c_\delta A_\delta^{|k|} |k|^{\beta|k|} E_\delta(x), \tag{3}$$

де $E_\delta(x) = \begin{cases} e^{\delta\|x\|^{1/\alpha}}, & \Phi = S_{\alpha}^{\beta}, \\ e^{\Omega(\delta x)}, & \Phi = W_{\Omega}^{\beta}. \end{cases}$

Звідси, урахувавши (2) та рівність

$$F[f * \varphi](\cdot) = F[f](\cdot)F[\varphi](\cdot) \qquad \forall \varphi \in F[\Phi],$$

яка виконується для згортувачів $f \in F[\Phi']$ [1], одержуємо, що f із $F[\Phi']$ буде згортувачем у просторі $F[\Phi]$ тоді й лише тоді, коли його перетворення Фур'є $F[f](\cdot)$ є мультиплікатором у Φ, тобто, коли для $F[f](\cdot)$ справджується відповідна умова (3). Тут Φ' – простір, топологічно спряжений з Φ.

Нехай $\tilde{M}_\gamma(\cdot)$ – функція, двоїста за Юнґом із $\tilde{\Omega}_\gamma(\cdot)$, а $\Omega_\gamma(x) := \tilde{\Omega}_\gamma(\|x\|)$ і $M_\gamma(x) := \tilde{M}_\gamma(\|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Для рівняння (1) задамо початкову умову

$$u(t, \cdot) \xrightarrow[t \to +0]{(W_{\beta}^{M_\gamma})'} f, \qquad f \in (W_{\beta}^{M_\gamma})', \tag{4}$$

(тут йдеться про слабку збіжність у просторі $(W_{\beta}^{M_\gamma})'$).

Правильне таке твердження [7]: *для того, щоб задача Коші* (1), (4) *була коректно розв'язною, а її розв'язок* $u(t, \cdot)$ *належав до простору* $W_{\beta}^{M_\gamma}$, $\beta \ge 1$, *необхідно та достатньо, щоб початковий розподіл* f *із* $(W_{\beta}^{M_\gamma})'$ *був* *згортувачем у просторі* $W_\beta^{M_\gamma}$. *При цьому буде виконуватись рівність*

$$u(t,x) = (f * G)(t,x) \equiv \langle f, G(t, x - \cdot)\rangle, \qquad (t,x) \in \Pi, \tag{5}$$

а для похідних на множині Π *будуть справджуватись формули*

$$\partial_t u(t,x) = \langle f, \partial_t G(t, x - \cdot)\rangle, \quad \partial_x^k u(t,x) = \langle f, \partial_x^k G(t, x - \cdot)\rangle, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Тут G *– фундаментальний розв'язок задачі* (1), (4), *і дію узагальненої функції на основну позначено через* $\langle \cdot , \cdot \rangle$.

У [7] встановлено, що $G(t, \cdot) = F^{-1}[\theta_t(\xi)](t, \cdot)$, $t > 0$, де

$$\theta_t(\xi) := e^{-tP_\gamma(\xi)}, \qquad (t,\xi) \in \Pi,$$

причому $\theta_t(\cdot)$ належить до простору $W_{\Omega_\gamma}^1$ при кожному фіксованому $t > 0$.

Звідси, урахувавши (2), приходимо до такого наслідку.

Наслідок 1. *При кожному фіксованому* $t > 0$ *фундаментальний розв'язок* $G(t, \cdot)$ *є елементом простору* $W_1^{M_\gamma}$.

Для дослідження властивостей розв'язку $u(t, \cdot)$ задачі Коші (1), (4) стосовно змінної t необхідно спочатку з'ясувати властивості фундаментального розв'язку $G(t, \cdot)$ щодо цієї змінної. Тому, передусім, одержимо точні оцінки похідних $\partial_\xi^k \theta_t(\xi)$, виділяючи скрізь залежність від t.

Для спрощення викладок розглянемо випадок $n = 1$ (загальний випадок $n \in \mathbb{N}$ реалізується за індукцією). Згідно з формулою Фаа де Бруно [5], знаходимо

$$\left|\partial_\xi^k \theta_t(\xi)\right| \le \sum_p^k \frac{k!}{i!j!\ldots h!} t^p \theta_t(\xi) \left|\frac{dP_\gamma(\xi)}{1!d\xi}\right|^i \left|\frac{d^2P_\gamma(\xi)}{2!d\xi^2}\right|^j \ldots \left|\frac{d^\ell P_\gamma(\xi)}{\ell!d\xi^\ell}\right|^h, \ (t,\xi) \in \Pi,$$

(тут знак суми поширюється на всі цілочислові невід'ємні розв'язки рівняння $k = i + 2j + \ldots + \ell h$, а число $p = i + j + \ldots + h$). Скориставшись тепер оцінками [7]

$$\left|\frac{d^m P_\gamma(\xi)}{m!d\xi^m}\right| \le cA^m \frac{(a + \xi^2)^{(\gamma - m)/2}}{\ln(a + \xi^2)^{1/2}}, \qquad \frac{p!}{i!j!\ldots h!} \le 2^k, \qquad \sum_p^k 1 \le (2e)^k,$$

одержуємо, що

$$\begin{aligned}
\left|\partial_\xi^k \theta_t(\xi)\right| &\le A^k k! \theta_t(\xi) \sum_p^k \frac{(ctP_\gamma(\xi))^p}{i!j!\ldots h!} (a + \xi^2)^{-k/2} \le \\
&\le A^k k! t^{k/\gamma} \theta_t(\xi) \sum_p^k \frac{c^p (tP_\gamma(\xi))^{p - k/\gamma}}{i!j!\ldots h!} \le \\
&\le c_1 A_1^k k! t^{k/\gamma} \theta_{t/2}(\xi) \sum_p^k \frac{\sup_{\tau > 0}\{\tau^{p - k/\gamma} e^{-\tau}\}}{i!j!\ldots h!} \le \\
&\le c_2 A_2^k k! t^{k/\gamma} \theta_{t/2}(\xi), \qquad (t,\xi) \in \Pi,
\end{aligned}$$

де A, c, A_j і c_j – додатні сталі, які не залежать від t, x і k.

Звідси, урахувавши, що

$$\forall \alpha > 0 \ \exists c_\alpha > 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n: \quad P_\gamma(\xi) \ge c_\alpha \left(a + \|\xi\|^2\right)^{(\gamma - \alpha)/2}, \tag{6}$$

для $\{k,\, q\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ і $(t, x) \in \Pi$ знаходимо

$$\left|x^k \partial_x^q G(t,x)\right| = (2\pi)^{-n} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} \partial_\xi^k (\xi^q \theta_t(\xi)) d\xi \right| \le$$

$$\le \sum_{\ell=0}^{k} C_k^\ell \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\partial_\xi^\ell \xi^q\right| \left|\partial_\xi^{k-\ell} \theta_t(\xi)\right| d\xi \le$$

$$\le c_2 \sum_{\ell=0}^{k} C_k^\ell A_2^{|k-\ell|} (k-\ell)!\, t^{|k-\ell|/\gamma} \frac{q!}{(q-\ell)!} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|\xi\|^{|q-\ell|} e^{-\frac{c_\alpha}{2} t \|\xi\|^{\gamma-\alpha}} d\xi \le$$

$$\le c_2 \sum_{\ell=0}^{k} C_k^\ell A_2^{|k-\ell|} \left(4c_\alpha^{-1}\right)^{\frac{|q-\ell|}{\gamma-\alpha}} t^{\frac{|k-\ell|}{\gamma} - \frac{|q-\ell|}{\gamma-\alpha}} \frac{(k-\ell)!\, q!}{(q-\ell)!} \times$$

$$\times \sup_{\tau>0} \left\{ \tau^{\frac{|q-\ell|}{\gamma-\alpha}} e^{-\tau} \right\} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{c_\alpha}{4} t \|\xi\|^{\gamma-\alpha}} d\xi \le$$

$$\le c_\alpha A^{|k|} B_\alpha^{|q|} k!\, |q|^{\frac{|q|}{\gamma-\alpha}} t^{\frac{|k|}{\gamma} - \frac{n+|q|\gamma_0}{\gamma-\alpha}} \qquad \forall \alpha \in (0,\gamma).$$

Тут оцінювальні величини c_α, A і B_α додатні і не залежать від t, x, k і q, при цьому A не залежить ще й від α, а $\gamma_0 = \begin{cases} 1, & t \in (0,1), \\ \gamma_0 = 1 - \alpha/\gamma, & t \ge 1. \end{cases}$

Отже, правильне таке твердження.

Лема 1. *Функція $G(t,\cdot)$, $t > 0$, на множині $\mathbb{R}^n$ є нескінченно диференційовною, при цьому*

$$\exists \delta > 0\ \forall \alpha \in (0,\gamma)\ \exists c_\alpha > 0,\ \exists B_\alpha > 0,\ \ \forall q \in \mathbb{Z}_+^n,\ \ \forall (t,x) \in \Pi : \left|\partial_x^q G(t,x)\right| \le$$

$$\le c_\alpha B_\alpha^{|q|} |q|^{\frac{|q|}{\gamma-\alpha}} t^{-\frac{n+|q|\gamma_0}{\gamma-\alpha}} e^{-\delta \|x\|/t^\gamma}.$$

Наслідок 2. *Фундаментальний розв'язок $G(t,\cdot)$ задачі Коші для рівняння* (1) *є елементом простору $S_1^{1/(\gamma-\alpha)}$ для всіх $\alpha \in (0,\gamma)$ при кожному фіксованому $t > 0$.*

2. Принцип локалізації. Розв'язок задачі Коші (1), (4) при $t \to +0$ прямує до узагальненої функції f у слабкому розумінні збіжності. Однак може трапитися, що f на деякій частині $Q \subset \mathbb{R}^n$ збігається з гладкою функцією. Чи буде в цьому випадку відбуватися локальне підсилення збіжності вказаного розв'язку? З'ясуємо відповідь на це питання.

Зауважимо, що поняття рівності узагальнених функцій на множині $Q \subset \mathbb{R}^n$ вимагає наявності фінітних функцій у відповідному просторі основних функцій [2]: *елементи f і g із простору Φ' рівні на множині Q, якщо*

$$\langle f-g, \varphi(\cdot)\rangle = 0 \qquad \forall \varphi(\cdot) \in \Phi, \quad \operatorname{supp}\varphi \subset Q.$$

Згідно з означенням, простір $W_\beta^{M_\gamma}$ складається лише з цілих аналітичних функцій, тому спочатку необхідно відповідний простір $(W_\beta^{M_\gamma})'$ початкових даних задачі Коші (1), (4) належно звузити шляхом доповнення простору $W_\beta^{M_\gamma}$ гладкими фінітними функціями.

Оцінка (6) забезпечує вкладення $W_{\Omega_\gamma}^\beta \subset S_{1/(\gamma-\alpha)}^\beta$ для $\beta > 0$ і $\alpha \in (0, \gamma)$. Звідси, урахувавши (2), приходимо до ланцюжка неперервних вкладень

$$W_\beta^{M_\gamma} \subset S_\beta^{1/(\gamma-\alpha)} \subset S_\beta^r \subset S \subset L_2(\mathbb{R}^n) \subset S' \subset (S_\beta^r)' \subset$$

$$\subset (S_\beta^{1/(\gamma-\alpha)})' \subset (W_\beta^{M_\gamma})'$$

для всіх $\beta > 0$, $\alpha \in (0, \gamma)$ і $(\gamma-\alpha)^{-1} \le r$, з якого, зваживши на наявність у S_α^β при $\beta > 1$ фінітних функцій [2], дістаємо необхідні звуження простору початкових даних:

$$S' \subset (S_\beta^r)' \subset (S_\beta^{1/(\gamma-\alpha)})' \subset (W_\beta^{M_\gamma})', \qquad \beta > 0, \qquad 1 < (\gamma-\alpha)^{-1} \le r .$$

Правильними є два наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай* $\beta \ge 1$, *а параметри* $\alpha \in (0, \gamma)$ *і* $r > 0$ *такі, що*

$$1 < (\gamma-\alpha)^{-1} \le r\gamma/(\gamma+1). \tag{7}$$

Тоді, якщо узагальнена функція $f \in (S_\beta^r)'$ *дорівнює нулеві на множині* $Q \subset \mathbb{R}^n$, *то відповідна функція* $u(t, \cdot)$, $t > 0$, *що визначається рівністю* (5), *разом з усіма своїми похідними* $\partial_x^k u(t,x)$ *збігається до нуля при* $t \to +0$ *рівномірно стосовно змінної* x *на кожному компакті* $\mathcal{K} \subset Q$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_1 \subset Q$, де $\mathcal{K}_1$ − деякий компакт із $\mathbb{R}^n$ такий, що

$$\forall x \in \mathcal{K}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}_1 : \quad \|x-\xi\| \ge b > 0 . \tag{8}$$

Розглянемо фінітну функцію $\eta(\cdot) \in S_\beta^{1/(\gamma-\alpha)}$ з носієм в Q таку, що $\eta(\xi) = 1$, $\xi \in \mathcal{K}_1$, і покладемо $\nu(\cdot) := 1 - \eta(\cdot)$. Оскільки у просторах S_α^β означено операції множення і звичайного зсуву аргументу, то, згідно з наслідком 2,

$$\{\eta(\cdot)\partial_x^k G(t, x-\cdot), \nu(\cdot)\partial_x^k G(t, x-\cdot)\} \subset S_\beta^{1/(\gamma-\alpha)}, \quad (t,x) \in \Pi .$$

Тоді для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^n$ і $(t,x) \in \Pi$ маємо зображення

$$\partial_x^k u(t,x) = \left\langle f, \eta(\cdot)\partial_x^k G(t, x-\cdot)\right\rangle + \left\langle f, \nu(\cdot)\partial_x^k G(t, x-\cdot)\right\rangle ,$$

з якого, зваживши на рівність $f = 0$ на Q і на те, що

$$\operatorname{supp}\left(\eta(\cdot)\partial_x^k G(t, x-\cdot)\right) \subset Q ,$$

знаходимо

$$\partial_x^k u(t,x) = t^{\alpha_1/(\gamma-\alpha)} \left\langle f, \omega_{t,x}^k(\cdot)\right\rangle, \quad \alpha_1 > 0, (t,x) \in \Pi ,$$

де $\omega_{t,x}^k(\cdot) := t^{-\alpha_1/(\gamma-\alpha)}\nu(\cdot)\partial_x^k G(t, x-\cdot)$.

Отже, для доведення теореми досить установити рівномірну обмеженість у просторі S_β^r стосовно параметрів $0 < t \ll 1$ і $x \in \mathcal{K}$ сукупності $\omega_{t,x}^k(\cdot)$, тобто одержати оцінку

$$\left|\partial_\xi^q \omega_{t,x}^k(\xi)\right| \le cA^{|q|}\,|q|^{r|q|}\,e^{-\delta\|\xi\|^{1/\beta}} \qquad \forall q \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{9}$$

в якій додатні сталі c, A і δ не залежать від t, x, ξ і q. Але оскільки $\omega_{t,x}^k(\xi) = 0$ для $\xi \in \mathcal{K}_1$, то оцінку (9) досить установити лише для $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{K}_1$.

З формули Лейбніца диференціювання добутку функцій, твердження леми 1 та належності $\eta(\cdot)$ до $S_\beta^{1/(\gamma-\alpha)}$ випливає

$$\left|\partial_\xi^q \omega_{t,x}^k(\xi)\right| \le t^{-\frac{\alpha_1}{\gamma-\alpha}} \left\{ \left|\partial_{x-\xi}^{k+q} G(t, x-\xi)\right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{\ell=0}^{q} C_q^\ell \left|\partial_\xi^{q^{-1}} \eta(\xi)\right| \left|\partial_{x-\xi}^{\ell+k} G(t, x-\xi)\right| \right\} \le$$

$$\le c_\alpha t^{-\frac{\alpha_1+n+|k+q|}{\gamma-\alpha}} e^{-\delta\|x-\xi\|/t^\gamma} \left\{ B_\alpha^{|k+q|} \|k+q\|^{\frac{|k+q|}{\gamma-\alpha}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\ell=0}^{q} C_q^\ell A^{|q-\ell|} B_\alpha^{|k+q|} |q-\ell|^{\frac{|q-\ell|}{\gamma-\alpha}} |k+\ell|^{\frac{|k+\ell|}{\gamma-\alpha}} \right\} \le$$

$$\le cB^{|k+q|} |k+q|^{\frac{|k+q|}{\gamma-\alpha}} t^{-\frac{\alpha_1+n+|k+q|}{\gamma-\alpha}} e^{-\delta\|x-\xi\|/t^\gamma} \le$$

$$\le cB^{|k+q|} |k+q|^{\frac{|k+q|}{\gamma-\alpha}} \sup_{t\in(0,1)} \left\{ t^{-\frac{\alpha_1+n+|k+q|}{\gamma-\alpha}} e^{-\frac{\delta b}{2t^\gamma}} \right\} e^{-\frac{\delta}{2}\|x-\xi\|} \le$$

$$\le c_1 B_1^{|k+q|} |k+q|^{\frac{|k+q|(1+\gamma)}{\gamma(\gamma-\alpha)}} \sup_{x\in \mathrm{K}} \{e^{\delta_1\|x\|}\} e^{-\delta_0\|\xi\|},$$

$$0 < t \ll 1, \quad x \in \mathcal{K}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{K}_1, \quad \{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+^n.$$

Звідси виконання оцінки (9) стає очевидним. Теорему доведено. ♦

Теорема 2. *Нехай* $\gamma > 1$, $\alpha \in (\gamma-1, \gamma-1/\gamma]$ *і* $r \ge \dfrac{\gamma+1}{\gamma(\gamma-\alpha)}$. *Тоді, якщо узагальнена функція* $f \in (S_\beta^r)'$, $\beta \ge 1$, *на множині* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *збігається з неперервно диференційовною на* Q *до порядку* $q_0 \in \mathbb{Z}_+^n$ *включно функцією* $g(\cdot)$, *то відповідна функція* $u(t,\cdot) = \langle f, G(t, x-\cdot)\rangle$ *разом з усіма своїми похідними* $\partial_x^k u(t,x)$, $k \le q_0$, *збігається до* $\partial_x^k g(x)$ *при* $t \to +0$ *рівномірно стосовно змінної* x *на кожному компакті* $\mathcal{K} \subset Q$.

Д о в е д е н н я. Передусім зазначимо, що належність α до $\left(\gamma-1, \dfrac{\gamma-1}{\gamma}\right]$ рівносильна умові

$$1 < (\gamma-\alpha)^{-1} \le \gamma,$$

а

$$r \ge \frac{\gamma+1}{\gamma(\gamma-\alpha)} \quad \Leftrightarrow \quad (\gamma-\alpha)^{-1} \le r\gamma \le (\gamma+1).$$

Тому накладені на параметри α і r умови у вихідній теоремі забезпечують виконання для цих параметрів умови (7) з теореми 1.

Користуватимемося тут величинами $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_1$, $\eta(\cdot)$ і $\nu(\cdot)$ із доведення попереднього твердження.

З рівностей $f - g = 0$ на Q і $\nu f = 0$ на $\mathcal{K}_1$, твердження теореми 1 та зображення

$$\partial_x^k u(t,x) = \left\langle \eta(f-g), \partial_x^k G(t, x-\cdot)\right\rangle + \left\langle \nu f, \partial_x^k G(t, x-\cdot)\right\rangle + \left\langle \eta g \partial_x^k G(t, x-\cdot)\right\rangle$$

випливає, що доведення теореми 2 потребує лише встановлення граничного співвідношення

$$I_t^k(x) := \left\langle \eta g,\, \partial_x^k G(t, x-\cdot)\right\rangle \underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathcal{K}}{\rightrightarrows}} \partial_x^k(\eta g)(x).$$

Урахувавши регулярність функціонала ηg і рівність

$$\partial_x^k G(t, x-\xi) = (-1)^{|k|}\partial_\xi^k G(t, x-\xi),$$

інтегруванням частинами дістаємо зображення

$$I_t^k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x-\xi)\partial_\xi^k(\eta g)(\xi)\,d\xi, \qquad k \le q_0,$$

згідно з яким і рівністю

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t, x-\xi)\,d\xi = \theta_t(0), \qquad t > 0,$$

для $(t,x) \in \Pi$ і $k \le q_0$ маємо

$$\left|I_t^k(x) - \partial_x^k(\eta g)(x)\right| =$$

$$= \left|\int_{\mathbb{R}^n} G(t, x-\xi)\left(\partial_x^k(\eta g)(x) - \partial_\xi^k(\eta g)(\xi)\right)d\xi - O(t)\partial_x^k(\eta g)(x)\right| \le$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} |G(t,\zeta)|\left|\partial_{x-\zeta}^k(\eta g)(x-\zeta) - \partial_x^k(\eta g)(x)\right|d\zeta +$$

$$+ |O(t)|\left|\partial_x^k(\eta g)(x)\right|,$$

де $O(t) := 1 - \theta_t(0) \underset{t\to+0}{\to} 0$.

Функція $\partial_x^k(\eta g)(x)$ неперервна і $\operatorname{supp}\left(\partial_x^k(\eta g)\right) \subset Q$. Тому

i) $\sup\limits_{x\in\mathcal{K}}\left|\partial_x^k(\eta g)(x)\right| = N_1 < +\infty$,

ii) $\sup\limits_{x\in\mathcal{K},\,\zeta\in\mathbb{R}^n}\left|\partial_{x-\zeta}^k(\eta g)(x-\zeta) - \partial_x^k(\eta g)(x)\right| = N_2 < +\infty$,

iii) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_0 > 0\ \forall x \in \mathcal{K},\ \forall\zeta \in \mathbb{R}^n,\ \|x - \zeta - x\| = \|\zeta\| < \delta_0$:

$$: \left|\partial_{x-\zeta}^k(\eta g)(x-\zeta) - \partial_x^k(\eta g)(x)\right| < \varepsilon.$$

Звідси, врахувавши твердження леми 1, для $x \in \mathcal{K}$, $t \in (0,1)$ і $k \le q_0$ знаходимо

$$\int_{\mathbb{R}^n} |G(t,\zeta)|\left|\partial_{x-\zeta}^k(\eta g)(x-\zeta) - \partial_x^k(\eta g)(x)\right|d\zeta \le \varepsilon \int_{\|\zeta\|<\delta_0} |G(t,\zeta)|\,d\zeta +$$

$$+ N_2 \int_{\|\zeta\|\ge\delta_0} |G(t,\zeta)|\,d\zeta \le ct^{-\frac{n}{\gamma-\alpha}}\Bigg(\varepsilon \int_{\|\zeta\|<\delta_0} e^{-\delta\|\zeta\|/t^\gamma}d\zeta +$$

$$+N_2\int\limits_{\|\zeta\|\geq\delta_0} e^{-\delta\|\zeta\|/t^\gamma}d\zeta\Bigg)\leq ct^{n(\gamma-\frac{1}{\gamma-\alpha})}\varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta\|\zeta\|}\,d\zeta+$$

$$+cN_2t^{-\frac{n}{\gamma-\alpha}}\left(\frac{2t^\gamma}{\delta\delta_0}\right)^{n+1}\sup_{\tau>0}\{\tau^{n+1}e^{-\tau}\}\int\limits_{\|\zeta\|\geq\delta_0} e^{-\frac{\delta}{2}\|\zeta\|/t^\gamma}d\zeta\leq$$

$$\leq(c_0\varepsilon+c_1\delta_0^{-1-n}t^\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta}{2}\|\zeta\|}d\zeta\equiv c_0'\varepsilon+c_1'\delta_0^{-1-n}t^\gamma\,.$$

Оскільки величина t^γ є нескінченно малою у точці $t=0$, то для кожного $\delta_0\in(0,1)$ знайдеться таке $t_0\in(0,1)$, що для всіх $t\in(0,t_0)$ виконується нерівність $\delta_0^{1+n}\geq t^{\gamma/2}$. Тоді

$$\forall\varepsilon\in(0,1)\;\exists t_0\in(0,\varepsilon),\;\forall t\in(0,t_0)\;\forall k\in\mathbb{Z}_+^n,\;k\leq q_0\;:$$

$$:\sup_{x\in\mathcal{K}}\left|I_t^k(x)-\partial_x^k(\eta g)(x)\right|\leq c_0'\varepsilon+c_1'\varepsilon^{\gamma/2}+N_1O(\varepsilon)\,.$$

Звідси, враховуючи рівність $\eta g=g$ на $\mathcal{K}$, приходимо до твердження вихідної теореми. Теорему доведено. ♦

3. *Приклад*. Розглянемо задачу Коші для рівняння (1) при $n=1$ і $\gamma=3/2$ з початковою узагальненою функцією f з відповідного простору $(W_1^{M_\gamma})'$, дія якої на основні функції $\varphi(\cdot)\in W_1^{M_\gamma}$ задається за допомогою звичайної функції

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{-1/2}, & 0<|x|<1,\\ e^{-x^2}, & |x|\geq 1,\end{cases}$$

за таким правилом:

$$\langle f,\varphi(\cdot)\rangle=\int\limits_{|\xi|<1}\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{|\xi|}}d\xi+\int\limits_{|\xi|\geq1}e^{-\xi^2}\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Очевидно, що ця рівність дозволяє неперервно продовжити функціонал f на простір $S_\beta^{1/(\gamma-\alpha)}$, $\alpha\in(0,\gamma)$, більше того, f − згортувач у $S_\beta^{1/(\gamma-\alpha)}$. Дійсно, для кожного $\varphi(\cdot)\in S_\beta^{1/(\gamma-\alpha)}$, $\alpha\in(0,\gamma)$, функція

$$\psi(x):=\langle f,\varphi(x-\cdot)\rangle=\int\limits_{|\xi|<1}\frac{\varphi(x-\xi)}{\sqrt{|\xi|}}d\xi+\int\limits_{|\xi|\geq1}e^{-\xi^2}\varphi(x-\xi)\,d\xi\,,$$

є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$, для похідних якої виконуються оцінки

$$\left|\psi^{(k)}(x)\right|\leq\int\limits_{|\xi|<1}\frac{\left|\varphi^{(k)}(x-\xi)\right|}{\sqrt{|\xi|}}d\xi+\int\limits_{|\xi|\geq1}e^{-\xi^2}\left|\varphi^{(k)}(x-\xi)\right|d\xi\leq$$

$$\leq cA^kk^{\beta k}\Bigg(\int\limits_{|\xi|<1}\frac{e^{-\delta|x-\xi|^{\gamma-\alpha}}}{\sqrt{|\xi|}}d\xi+\int\limits_{|\xi|\geq1}e^{-\xi^2-\delta|x-\xi|^{\gamma-\alpha}}d\xi\Bigg)\leq$$

$$\leq c_0A^kk^{\beta k}e^{-\delta_0|x|^{\gamma-\alpha}}\Bigg(\int\limits_{|\xi|<1}\frac{d\xi}{\sqrt{|\xi|}}+\int\limits_{|\xi|\geq1}e^{-(\xi^2-\delta_1|\xi|^{\gamma-\alpha})}d\xi\Bigg)\leq$$

$$\leq c_0'A^kk^{\beta k}e^{-\delta_0|x|^{\gamma-\alpha}}$$

для всіх $k\in\mathbb{Z}_+$, $x\in\mathbb{R}$ і $\alpha\in(0,\gamma)$.

Подібним способом переконуємося в тому, що f – згортувач і в просторі $W_1^{M_\gamma}$.

Отже, відповідна функція

$$u(t,x) = \int\limits_{|\xi|<1} \frac{G(t,x-\xi)}{\sqrt{|\xi|}} d\xi + \int\limits_{|\xi|\ge 1} e^{-\xi^2} G(t,x-\xi)\, d\xi, \quad (t,x) \in \Pi,$$

є звичайним розв'язком рівняння (1), який задовольняє відповідну початкову умову (4) у сенсі слабкої збіжності в просторі $(W_1^{M_\gamma})'$. Однак функціонал f у просторі $(S_1^{5/2})'$ на кожній із множин $Q_0 = (-1, 0) \cup (0, 1)$ і $Q_1 = \mathbb{R}^n \backslash \bar{Q}_0$ збігається із гладкими функціями $g_0(\cdot) = |\cdot|^{-1/2}$ і $g_1(\cdot) = e^{-(\cdot)^2}$ відповідно, тому, згідно з твердженням теореми 2, виконуються граничні співвідношення

$$\partial_x^k u(t,x) \underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathcal{K}\subset Q_0}{\rightrightarrows}} g_0^{(k)}(x), \qquad \partial_x^k u(t,x) \underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathcal{K}\subset Q_1}{\rightrightarrows}} g_1^{(k)}(x),$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$ і кожного компакта $\mathcal{K}$ із відповідної множини Q_j.

Висновок. Аналізуючи доведення теорем 1, 2, приходимо до висновку, що для успішного встановлення принципу локалізації розв'язку задачі Коші для рівняння (1) з узагальненим граничним значенням з простору $(W_\beta^{M_\gamma})'$, $\beta \ge 1$, важливим є таке розширення відповідного простору $W_\beta^{M_\gamma}$ основних функцій гладкими фінітними функціями, в якому фундаментальний розв'язок цієї задачі буде сильно обмеженим при $0 < t \ll 1$.

1. *Борок В. М.* Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. – 1954. – **97**, № 6. – С. 949–952.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – Обобщенные функции. – Вып. 2. – Москва: Физматгиз, 1958. – 307 с.
3. *Городецький В. В.* Принцип локалізації для розв'язків задачі Коші параболічних за Петровським систем в класі узагальнених функцій // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1984. – № 10. – С. 5–7.
4. *Гуревич Б. Л.* Новые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных систем // Докл. АН СССР. – 1954. – **99**, № 6. – С. 893–895.
5. *Гурса Э.* Курс математического анализа. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1933. – Т. 1, Ч. 1. – 368 с.
6. *Літовченко В. А.* Задача Коші для одного класу псевдодиференціальних систем з цілими аналітичними символами // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 9. – С. 1211–1233.
   Те саме: *Litovchenko V. A.* Cauchy problem for one class of pseudodifferential systems with entire analytic symbols // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, No. 9. – P. 1369–1395. – DOI: 10.1007/s11253-006-0138-x.
7. *Літовченко В. А.* Коректна розв'язність задачі Коші для одного рівняння інтегрального вигляду // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 2. – С. 185–197.
   Те саме: *Litovchenko V. A.* Correct solvability of the Cauchy problem for one equation of integral form // Ukr. Math. J. – 2004. – 5**6**, No. 2. – P. 228–242. DOI: 10.1023/B:UKMA.0000036098.43094.f7.
8. *Літовченко В. А., Стрибко О. В.* Принцип локалізації розв'язку задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 11. – С. 1473–1489.
   Те саме: *Litovchenko V. A., Strybko O. V.* Principle of localization of solutions of the Cauchy problem for one class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type // Ukr. Math. J. – 2011. – **62**, No. 11. – P. 1707–1728. https://doi.org/10.1007/s11253-011-0462-7.
9. *Лопушанська Г. П., М'яус О. М.* Відновлення початкових даних у задачі для рівняння дифузії з дробовою похідною за часом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59,** № 1. – С. 68–77.

Те саме: *Lopushans'ka H. P., M'yaus O. M.* Restoration of the initial data in the problem for a diffusion equation with fractional derivative with respect to time // J. Math. Sci. – 2018. – **229**, No. 2. – P. 187–199.

10. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
    Те саме: *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional integrals and derivatives: Theory and applications. – Newark: Gordon and Breach, 1993. – 587 p.
11. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1979. – 416 с.
12. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
    Те саме: *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964. – xiv + 347 p.
13. *Adams R., Aronszajn N., Smith K. T.* Theory of Bessel potentials. II // Ann. de l'Inst. Fourier. – 1967. – **17**, No. 2. – P. 1–135.
14. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.
    https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9.
15. *Kochubei A. N.* Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – **340**, No. 1. – P. 252–281.
16. *Litovchenko V. A., Dovzhytska I. M.* Cauchy problem for a class of parabolic systems of Shilov type with variable coefficients // Cent. Eur. J. Math. – 2012. – **10**, No. 3. – P. 1084–1102. – DOI: 10.2478/s11533-012-0025-7.
17. *Luchko Yu.* Wave-diffusion dualism of the neutral-fractional processes // J. Comp. Phys. – 2015. – **293**. – P. 40–52.
18. *Povstenko Y.* Linear fractional diffusion-wave equation for scientists and engineers. – New York: Birkhauser, 2015. – xiv+460 p. – DOI: 10.1007/978-3-319-17954-4.
19. *Schwartz L.* Théorie des Distributions. – Vol. 2. – Paris: Hermann, 1951. – 169 p.

СВОЙСТВО ЛОКАЛИЗАЦИИ РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ФРАКТАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВИДА

Рассмотрено фрактальное уравнение интегрального вида с оператором Бесселя дробного интегро-дифференцирования с положительным параметром. Для его регулярных решений с обобщенными граничными значениями на начальной гиперплоскости установлено свойство локального усиления сходимости на той ее части, где предельное значение имеет хорошие свойства.

Ключевые слова: *задача Коши, обобщенное граничное значение, свойство локализации решения, оператор Бесселя дробного интегро-дифференцирования.*

LOCALIZATION PROPERTY OF REGULAR SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A FRACTAL EQUATION OF INTEGRAL FORM

It is considered the fractal equation of an integral form with a Bessel operator of fractional integro-differentiation with a positive parameter. The property of the local strengthening of convergence for its regular solutions with generalized boundary values on the initial hyperplane is established on the part, where the boundary value has good properties.

Key words: *Cauchy problem, generalized boundary value, localization property of solution, Bessel operator of fractional integro-differentiation.*

Чернів. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
16.04.18