УДК 512.55+512.643.4

Н. Б. Ладзоришин*, В. М. Петричкович

СТАНДАРТНА ФОРМА МАТРИЦЬ НАД КВАДРАТИЧНИМИ КІЛЬЦЯМИ ВІДНОСНО (z,k)-ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ ТА СТРУКТУРА РОЗВ'ЯЗКІВ МАТРИЧНИХ ДВОБІЧНИХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Введено поняття (z,k)-еквівалентності матриць над квадратичними кільцями. Встановлену стандартну форму матриць відносно (z,k)-еквівалентності застосовано для опису структури розв'язків матричного рівняння $AX + YB = C$ над квадратичними евклідовими кільцями. Доведено існування розв'язків з мінімальною евклідовою нормою та встановлено, що це рівняння має скінченну кількість таких розв'язків над квадратичними евклідовими уявними кільцями.

Ключові слова: *квадратичне кільце, (z,k)-еквівалентність матриць, стандартна форма матриці, матричне рівняння.*

Вступ. У багатьох задачах виникає необхідність досліджувати спеціальні типи еквівалентностей матриць, за яких матриці переходу (перетворювальні матриці) належать до певних підгруп повної лінійної групи основного кільця [1, 8, 17]. У праці [4] встановлено стандартну форму матриць і їх наборів над поліноміальним кільцем $\mathbb{F}[\lambda]$, де $\mathbb{F}$ – поле, відносно напівскалярної еквівалентності. У [15, 16] введено поняття узагальненої еквівалентності пар матриць і побудовано стандартну форму для пар матриць над кільцями головних ідеалів і адекватними кільцями. Ці форми застосовують у багатьох задачах, зокрема у задачах факторизації матриць [3, 6], в задачі про подібність пар числових матриць [18]. На основі стандартних форм у [9] описано структуру розв'язків матричного рівняння

$$AX + YB = C \tag{1}$$

над кільцями Безу. У [10] для деяких випадків наведено оцінку степенів розв'язків рівняння (1) над поліноміальним кільцем. Матричні рівняння такого типу виникають у різних розділах математики і застосовуються в задачах теорії керування, динамічних систем [12, 13]. Для їх розв'язання необхідні методи побудови розв'язків рівняння типу (1) та їх структура.

У цій статті досліджуємо матричне рівняння (1) над квадратичними кільцями. Вводимо поняття (z,k)-еквівалентності матриць над квадратичним кільцем. На основі встановленої стандартної форми матриць відносно (z,k)-еквівалентності опишемо структуру розв'язків матричного рівняння (1) над квадратичним евклідовим кільцем.

Зауважимо, що в [5] описано цілочислові розв'язки рівняння (1) над квадратичними кільцями і встановлено умови існування і єдиності таких розв'язків.

1. Допоміжні відомості і твердження. Нехай $\mathbb{Z}$ – кільце цілих чисел. Тоді $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ – квадратичне кільце, де $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0,1$ і k не ділиться на квадрат простого числа, що містить елементи вигляду

$$\mathbb{Z}[\sqrt{k}] = \{a + b\sqrt{k} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}, \qquad \text{якщо} \quad k \equiv 2,3 (\mathrm{mod}\, 4), \tag{2}$$

$$\mathbb{Z}[\sqrt{k}] = \left\{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{k} \mid a,b \in \mathbb{Z},\ 2 \mid (a-b)\right\}, \quad \text{якщо} \quad k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4). \tag{3}$$

Квадратичне кільце $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ називають *уявним*, якщо $k < 0$, і *дійсним*, якщо $k > 0$.

*natalja.ladzoryshyn@gmail.com

Елементи $u, v \in \mathbb{K}$, для яких виконується рівність $uv = 1$, називають *оборотними.* Оборотні елементи в кільці $\mathbb{K}$ утворюють мультиплікативну групу, яку позначимо через $U(\mathbb{K})$. Елементи a і c з кільця $\mathbb{K}$ є асоційовними, якщо $a = uc$, де $u \in U(\mathbb{K})$. У квадратичному кільці $\mathbb{K}$ оборотний елемент ε називають нетривіальним, якщо $\varepsilon \neq \pm 1$. Зауважимо, що в уявних квадратичних кільцях група оборотних елементів є скінченною, і нетривіальні оборотні елементи є лише у кільцях $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ і $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. Група оборотних елементів дійсного квадратичного кільця є нескінченною.

Зауважимо, що квадратичних евклідових кілець є скінченна кількість. Серед квадратичних кілець є кільця головних ідеалів, які не є евклідовими кільцями, а також квадратичні кільця, які не є кільцями головних ідеалів, наприклад, кільце $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Нехай $\mathbb{K}$ − квадратичне евклідове кільце. Тоді евклідову норму $e(\cdot)$ елемента кільця $\mathbb{K}$ залежно від вигляду (2) або (3) означимо так:

$$\text{якщо } k < 0\text{, то } e(a + b\sqrt{k}) = a^2 - kb^2 \quad \text{або} \quad e\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{k}\right) = \frac{1}{4}(a^2 - kb^2),$$

$$\text{якщо } k > 0\text{, то } e(a + b\sqrt{k}) = \left|a^2 - kb^2\right| \quad \text{або} \quad e\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{k}\right) = \frac{1}{4}\left|a^2 - kb^2\right|.$$

Асоційовні елементи мають одне й те ж значення евклідової норми. Зауважимо, що елемент u є оборотним тоді й тільки тоді, коли $e(u) = \pm 1$.

Наведемо деякі властивості евклідової норми елементів квадратичного евклідового кільця.

Евклідові норми елементів кільця $\mathbb{K}$ мають властивість мультиплікативності, тобто евклідова норма добутку елементів $a, b \in \mathbb{K}$ дорівнює добутку їх евклідових норм: $e(ab) = e(a)e(b)$. Звідси одержимо властивість норми частки: $e\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{e(a)}{e(b)}$.

Сформулюємо таку лему.

Лема 1 [7]. *Елементів a із квадратичного евклідового уявного кільця $\mathbb{K}$, які мають одне й те саме значення евклідової норми, є скінченна кількість.*

Розглянемо лінійне діофантове рівняння

$$ax + by = c, \tag{4}$$

де a, b, c − відомі елементи з кільця $\mathbb{K}$, а x, y − невідомі. Нехай $(a, b) = d$ − найбільший спільний дільник a і b.

Лема 2. *Якщо рівняння* (4) *є розв'язним, то існує розв'язок $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{K}$ цього рівняння такий, що*

$$e(\tilde{x}) < \frac{e(b)}{e(d)}. \tag{5}$$

Якщо $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ − квадратичне евклідове уявне кільце, тоді таких розв'язків рівняння (4) *є скінченна кількість.*

Д о в е д е н н я. Нехай x_0, y_0 − частковий розв'язок рівняння (4). Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t, \qquad y = y_0 - \frac{a}{d}t, \qquad t \in \mathbb{K}.$$

Поділивши x_0 на $\frac{b}{d}$, отримаємо $x_0 = q_0 \frac{b}{d} + \tilde{x}$, де $e(\tilde{x}) < e\left(\frac{b}{d}\right)$. Легко перевірити, що

$$\tilde{x} = x_0 - q_0 \frac{b}{d}, \qquad \tilde{y} = y_0 + q_0 \frac{a}{d}$$

є розв'язком рівняння (4). Застосувавши властивість норми частки елементів, отримаємо умову (5). Згідно з лемою 1, множина елементів квадратичного евклідового уявного кільця $\mathbb{K}$, що задовольняють умову (5), є скінченною. Лему доведено. ♦

2. Стандартна форма матриць стосовно (z,k)-еквівалентності. Надалі через $M(n,\mathbb{K})$ будемо позначати кільце квадратних матриць n-го порядку над квадратичним евклідовим кільцем $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$.

Означення 1. Матриці A і B із кільця $M(n,\mathbb{Z}[\sqrt{k}])$ називатимемо (z,k)-*еквівалентними*, якщо існують оборотні матриця U над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ і матриця V над квадратичним кільцем $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ такі, що $A = UBV$.

Теорема 1. *Нехай $A \in M(n,\mathbb{Z}[\sqrt{k}])$ – неособлива матриця з канонічною діагональною формою (формою Сміта) $D^A = \operatorname{diag}(\mu_1^A,\ldots,\mu_n^A)$. Тоді матриця A є (z,k)-еквівалентною до трикутної матриці T^A, тобто існують оборотні матриця U над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ і матриця V над квадратичним кільцем $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ такі, що*

$$T^A = UAV = \begin{Vmatrix} \mu_1^A & 0 & \ldots & 0 \\ t_{21}\mu_1^A & \mu_2^A & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}\mu_1^A & t_{n2}\mu_2^A & \ldots & \mu_n^A \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ t_{21} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \mu_1^A & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2^A & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_n^A \end{Vmatrix} = TD^A, \tag{6}$$

де

1°) $t_{ij} = 0$, *якщо* $\mu_i^A = 1$, $i,j = 1,\ldots,n$, $j < i$,

2°) $e(t_{ij}) < \dfrac{e(\mu_i^A)}{e(\mu_j^A)}$, *якщо* $t_{ij} \neq 0$, $i,j = 1,\ldots,n$, $j < i$.

Якщо $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ – квадратичне евклідове уявне кільце, тоді трикутних форм T^A вигляду (6) *матриці A відносно (z,k)-еквівалентності є скінченна кількість.*

Д о в е д е н н я. Першу частину теореми можна легко довести на основі методики з [2].

Згідно з лемою 1, існує скінченна кількість елементів $t_{ij} \neq 0$, $i,j = 1,\ldots,n$, $j < i$, матриці T^A над квадратичним уявним кільцем таких, що

$$e(t_{ij}) < \frac{e(\mu_i^A)}{e(\mu_j^A)}.$$

Таким чином, матриць T^A над цим кільцем вигляду (6) з умовами ***1°***, ***2°*** є скінченна кількість. Доведення завершено. ♦

Означення 2. Трикутну форму T^A вигляду (6) називаємо *стандартною формою* матриці A відносно (z,k)-еквівалентності.

Означення 3. Пари матриць (A_1, A_2) і (B_1, B_2), де A_i, $B_i \in M(n, \mathbb{Z}[\sqrt{k}])$, $i = 1,2$, називаємо (z,k)-*еквівалентними*, якщо існують такі оборотні матриця U над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ і матриці V_{A_1}, V_{A_2} над квадратичним кільцем $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$, що $A_1 = UB_1V_{A_1}$ і $A_2 = UB_2V_{A_2}$.

Аналогічно встановлюємо, що (z,k)-еквівалентними перетвореннями пара матриць (A,B) над квадратичним евклідовим кільцем зводиться до пари (T^A, T^B), де T^A і T^B – стандартні форми вигляду (6) матриць A і B для певних класів пар матриць, зокрема, якщо визначники матриць A і B є взаємно простими [14] тощо.

3. Структура розв'язків матричного рівняння $AX + YB = C$**.** Розглянемо матричне рівняння (1) над квадратичним евклідовим кільцем $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$, тобто $A, B, C \in M(n, \mathbb{K})$ – відомі і $X, Y \in M(n, \mathbb{K})$ – невідомі матриці.

Нехай пара матриць (A,B) із матричного рівняння (1) є (z,k)-еквівалентною до пари (T^A, T^B) в стандартних формах T^A і T^B вигляду (6) матриць A і B, тобто для деяких оборотних матриць $U \in GL(n, \mathbb{Z})$ і $V_A, V_B \in GL(n, \mathbb{Z}[\sqrt{k}])$ маємо для T^A

$$T^A = UAV_A = \left\| \begin{matrix} \mu_1^A & 0 & \dots & 0 \\ t_{21}^A \mu_1^A & \mu_2^A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}^A \mu_1^A & t_{n2}^A \mu_2^A & \dots & \mu_n^A \end{matrix} \right\|, \tag{7}$$

де

$1°$) $t_{ij}^A = 0$, якщо $\mu_i^A = 1$, $i, j = 1, \dots, n$, $j < i$,

$2°$) $e(t_{ij}^A) < \dfrac{e(\mu_i^A)}{e(\mu_j^A)}$, якщо $t_{ij} \neq 0$, $i, j = 1, \dots, n$, $j < i$,

і для T^B

$$T^B = UBV_B = \left\| \begin{matrix} \mu_1^B & 0 & \dots & 0 \\ t_{21}^B \mu_1^B & \mu_2^B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}^B \mu_1^B & t_{n2}^B \mu_2^B & \dots & \mu_n^B \end{matrix} \right\|, \tag{8}$$

де

$1°$) $t_{ij}^B = 0$, якщо $\mu_i^B = 1$, $i, j = 1, \dots, n$, $j < i$,

$2°$) $e(t_{ij}^B) < \dfrac{e(\mu_i^B)}{e(\mu_j^B)}$, якщо $t_{ij} \neq 0$, $i, j = 1, \dots, n$, $j < i$.

Тоді з матричного рівняння (1) одержимо таке рівняння:

$$T^A H + W T^B = \tilde{C}, \tag{9}$$

де

$$H = V_A^{-1} X V_B, \qquad W = UYU^{-1}, \qquad \tilde{C} = UCV_B. \tag{10}$$

Рівняння (1) і (9) еквівалентні, тобто рівняння (1) є розв'язним тоді й тільки тоді, коли розв'язним є рівняння (9), і кожному розв'язку X, Y рівняння (1) відповідає розв'язок H, W рівняння (9), і навпаки, згідно зі співвідношеннями (10).

Таким чином, опис розв'язків рівняння (1) зводимо до опису розв'язків еквівалентного рівняння (9).

Зауважимо, що, за критерієм Roth-а [11], матричне рівняння (1) є розв'язним тоді й тільки тоді, коли матриці

$$\begin{Vmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{Vmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{Vmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{Vmatrix}$$

еквівалентні.

Теорема 2. *Якщо матричне рівняння* (9) *є розв'язним, то воно має розв'язки*

$$H = \left\| h_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}, \qquad W = \left\| w_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}$$

такі, що

$$\textit{1°)} \quad h_{ij} = 0, \qquad \textit{якщо} \quad \mu_i^B = 1, \quad i = 1,\dots,n, \quad j = 1,\dots,\ell, \tag{11}$$

$$\textit{2°)} \quad e(h_{ij}) < \frac{e(\mu_j^B)}{e(d_{ij}^{A,B})}, \qquad \textit{якщо} \quad h_{ij} \neq 0, \quad i = 1,\dots,n, \quad j = \ell+1,\dots,n, \tag{12}$$

де $d_{ij}^{(A,B)}$ *– найбільший спільний дільник інваріантних множників* μ_i^A *і* μ_j^B *матриць* A *і* B.

Якщо $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ *– квадратичне евклідове уявне кільце, то матричне рівняння* (9) *має скінченну кількість розв'язків* H, W *з умовами* (11) *і* (12).

Д о в е д е н н я. Із матричного рівняння (9) запишемо систему рівнянь у послідовності відповідно до діагоналей матриці H, починаючи з елемента в правому верхньому куті: h_{1n}; $h_{1,n-1}, h_{2n}$; $h_{1,n-2}, h_{2,n-1}, h_{3n}$ і т.д. Одержимо систему $2n-1$ рівнянь такого вигляду:

$$\begin{aligned}
&\mu_1^A h_{1n} + \mu_n^B w_{1n} = \tilde{c}_{1n},\\
&\mu_1^A h_{1,n-1} + \mu_{n-1}^B w_{1,n-1} + t_{n,n-1}^B \mu_{n-1}^B w_{1n} = \tilde{c}_{1,n-1},\\
&\mu_1^A t_{21}^A h_{1,n} + \mu_2^A h_{2n} + \mu_n^B w_{2n} = \tilde{c}_{2n},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&t_{n1}^A \mu_1^A h_{11} + t_{n2}^A \mu_2^A h_{21} + \ldots + \mu_n^A h_{n1} + \mu_1^B w_{n1} +\\
&\qquad\qquad + t_{21}^B \mu_1^B w_{n2} + \cdots + t_{n1}^B \mu_1^B w_{nn} = \tilde{c}_{n1}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Оскільки, відповідно до умови теореми, рівняння (9) є розв'язним, то і система (13) також розв'язна. Нехай $h_{ij} = \alpha_{ij}$, $w_{ij} = \beta_{ij}$, $i, j = 1,\dots,n$, – її розв'язки. Розглянемо перше рівняння системи (13):

$$\mu_1^A h_{1n} + \mu_n^B w_{1n} = \tilde{c}_{1n}. \tag{14}$$

Згідно з лемою 2 існує розв'язок

$$h_{1n}^0 = \alpha_{1n} - \frac{\mu_n^B}{d_{1n}^{(A,B)}} q_{1n}, \qquad w_{1n}^0 = \beta_{1n} + \frac{\mu_1^A}{d_{1n}^{(A,B)}} q_{1n}$$

рівняння (14) такий, що

$$e(h_{1n}^0) < \frac{e(\mu_n^B)}{e(d_{1n}^{(A,B)})}.$$

Далі розглянемо наступні два рівняння системи (13):

$$\mu_1^A h_{1,n-1} + \mu_{n-1}^B w_{1,n-1} + t_{n,n-1}^B \mu_{n-1}^B w_{1n} = \tilde{c}_{1,n-1}, \tag{15}$$

$$\mu_1^A t_{21}^A h_{1,n} + \mu_2^A h_{2n} + \mu_n^B w_{2n} = \tilde{c}_{2n}. \tag{16}$$

Оскільки рівняння (15) є розв'язним, то очевидно, що $d_{1,n-1}^{(A,B)}$ ділить $\tilde{c}_{1,n-1}$. Тоді у рівняння (15) підставимо $w_{1n}^0 = \beta_{1n} + \dfrac{\mu_1^A}{d_{1n}^{(A,B)}} q_{1n}$ із розв'язку рівняння (14). Одержимо таке рівняння:

$$\mu_1^A h_{1,n-1} + \mu_{n-1}^B w_{1,n-1} = \tilde{c}_{1,n-1} - t_{n,n-1}^B \mu_{n-1}^B \left(\beta_{1n} + \frac{\mu_1^A}{d_{1n}^{(A,B)}} q_{1n}\right). \tag{17}$$

Оскільки $\tilde{c}_{1,n-1}$ ділиться на $d_{1,n-1}^{(A,B)}$, то рівняння (17) є розв'язним. Згідно з лемою 2, рівняння (17) має розв'язки $h_{1,n-1}^0$, $w_{1,n-1}^0$ такі, що

$$e(h_{1,n-1}^0) < \frac{e(\mu_{n-1}^B)}{e(d_{2,n}^{(A,B)})}.$$

Аналогічно міркуючи, встановлюємо, що і рівняння (16) має розв'язок h_{2n}^0, w_{2n}^0 такий, що

$$e(h_{2n}^0) < \frac{e(\mu_n^B)}{e(d_{1,n-1}^{(A,B)})}.$$

Далі, розглянувши наступні рівняння системи (13), що залишилися, і міркуючи аналогічно, отримаємо розв'язки h_{ij}^0, w_{ij}^0 системи, для яких виконується умова (12).

Зауважимо, що систему (13) розглянуто у випадку, коли $\mu_j^B \neq 1$. Якщо ж $\mu_j^B = 1$ для деяких $j = 1,\dots,\ell$, тоді очевидно, що $h_{ij} = 0$, $i = 1,\dots,n$.

Якщо $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ − квадратичне евклідове уявне кільце, то на основі леми 1 існує скінченна кількість елементів кільця з однаковими евклідовими нормами. Отже, матричне рівняння (9) має скінченну кількість розв'язків $H = \left\|h_{ij}^0\right\|_{i,j=1}^n$, $W = \left\|w_{ij}^0\right\|_{i,j=1}^n$ з умовами (11), (12).

Теорему доведено. ♦

Наслідок 1. *Нехай канонічною діагональною формою матриці* T^B *з матричного рівняння* (9) *є*

$$D^B = \operatorname{diag}\left(\underbrace{1,\dots1}_{\ell}, \mu_{\ell+1}^B, \dots, \mu_n^B\right), \qquad \mu_{\ell+1}^B \neq 1.$$

Якщо матричне рівняння (9) *є розв'язним, то воно має розв'язки* H, W *такі, що в матриці* H *стовпці* $j = 1,\dots,\ell$ *є нульовими, а елементи стовпців* $j = \ell+1,\dots,n$ *мають евклідові норми менші, ніж евклідові норми відповідних інваріантних множників* $\mu_{\ell+1}^B,\dots,\mu_n^B$ *матриці* T^B.

Означення 4. *Евклідовою* нормою $e(A) = s$ матриці A називаємо найбільшу евклідову норму $e(a_{pq}) = s$ елемента a_{pq} серед усіх елементів матриці A.

Наслідок 2. *Якщо матричне рівняння* (9) *є розв'язним, то це рівняння має розв'язки* H, W *такі, що евклідова норма* $e(H)$ *матриці* H *менша, ніж евклідова норма* $e(\mu_n^B)$ *останнього інваріантного множника* μ_n^B *матриці* B: $e(H) < e(\mu_n^B)$.

За розв'язками H, W матричного рівняння (9) будуємо розв'язки X, Y матричного рівняння (1) відповідно до співвідношень (10).

1. *Бондаренко В. М.* Зображення гельфандових графів. − Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. − 228 с.
2. *Зеліско В. Р., Ладзоришин Н. Б., Петричкович В. М.* Про еквівалентність матриць над квадратичними евклідовими кільцями // Прикл. проблеми механіки і математики. − 2006. − Вип. 4. − С. 16−21.
3. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. − Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2015. − 282 с.
4. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. − Київ: Наук. думка, 1977. − С. 61−66.
5. *Ладзоришин Н. Б.* Цілочислові розв'язки матричних лінійних односторонніх і різносторонніх рівнянь над квадратичними кільцями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. − 2015. − **58**, № 2 − С. 47−54.
   Те саме: *Ladzoryshyn N. B.* The integral solutions of matrix linear unilateral and bilateral equations over quadratic rings // J. Math. Sci. − 2017. − **223**, No. 1. − P. 50−59. − doi:10.1007/s10958-017-3337-0.
6. *Петричкович В. М.* Узагальнена еквівалентність матриць і їх наборів та факторизація матриць над кільцями. − Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2015. − 312 с.
7. *Родосский К. А.* Алгоритм Евклида. − Москва: Наука, 1988. − 240 с.
8. *Dlab V., Ringel C. M.* Canonical forms of pairs of complex matrices // Linear Algebra Appl. − 1991. − **147.** − P. 387−410. − doi:10.1016/0024-3795(91)90240-W.
9. *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* The matrix linear unilateral and bilateral equations with two variables over commutative rings // Int. Scholarly Research Network (ISRN) Algebra. − **2012**. − Article ID 205478. − 14 pages.
   − doi: 10.5402/2012/205478.
10. *Feinstein J., Bar-Ness Y.* On the uniqueness minimal solution of the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ // J. Franklin Inst. − 1980. − **310**, No. 2. − P. 131−134.
   − doi: 10.1016/0016-0032(78)90012-1.
11. *Gustafson W. H.* Roth's theorems over commutative rings // Linear Algebra Appl. − 1979. − **23.** − P. 245−251.
   − https://doi.org/10.1016/0024-3795(79)90106-X.
12. *Kaczorek T.* Polynomial and rational matrices. Applications in dynamical systems theory. − London: Springer, 2007. − 503 p.
13. *Kučera V.* Algebraic theory of discrete optimal control for single-variable systems. I. Preliminaries // Kybernetika. − 1973. − **9**, No. 2. − P. 94−107.
14. *Ladzoryshyn N., Petrychkovych V.* Equivalence of pairs of matrices with relatively prime determinants over quadratic rings of principal ideals // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. − 2014. − No. 3 (76). − P. 38−48.
15. *Petrychkovych V.* Generalized equivalence of pairs of matrices // Linear Multilinear Algebra. − 2000. − **48**, No. 2. − P. 179−188.
   − doi: 10.1080/03081080008818667.
16. *Petrychkovych V.* Standard form of pairs of matrices with respect to generalized equivalence // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. − 2003. − Вип. 61. − С. 148−155.
17. *Sergeichuk V. V.* Canonical matrices of isometric operators on indefinite inner product spaces // Linear Algebra Appl. − 2008. − **428**, No. 1 − P. 154−192.
   − doi: 10.1016/j.laa.2007.08.016.
18. *Shavarovskii B. Z.* Toeplitz matrices in the problem of semiscalar equivalence of second-order polynomial matrices // Int. J. Analysis. − 2017. − Article ID 6701078. 14 pages. − doi:org/10.1155/2017/6701078.

СТАНДАРТНАЯ ФОРМА МАТРИЦ НАД КВАДРАТИЧНЫМИ КОЛЬЦАМИ ОТНОСИТЕЛЬНО (z,k) -ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ МАТРИЧНЫХ ДВУХСТОРОННИХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введено понятие (z,k) -эквивалентности матриц над квадратичными кольцами. Полученная стандартная форма матриц относительно (z,k) -эквивалентности использована для описания структуры решений матричного уравнения $AX + YB = C$ над квадратичными евклидовыми кольцами. Доказано существование решений с минимальной евклидовой нормой и показано, что это уравнение имеет конечное количество таких решений над квадратичными евклидовыми мнимыми кольцами.

Ключевые слова: *квадратичное кольцо, (z,k) −эквивалентность матриц, стандартная форма матрицы, матричное уравнение.*

THE STANDARD FORM OF MATRICES OVER QUADRATIC RINGS WITH RESPECT TO (z,k) -EQUIVALENCE AND STRUCTURE OF SOLUTIONS OF MATRIX BILATERAL LINEAR EQUATIONS

The notion of the (z,k) -equivalence of matrices over quadratic rings is introduced. The obtained standard form of matrices with respect to the (z,k) -equivalence is used to describe the structure of solutions of the matrix equation $AX + YB = C$ over quadratic Euclidean rings. The existence of solutions with minimal Euclidean norm is proved and it is shown that this equation has a finite number of such solutions over quadratic Euclidean imaginary rings.

Key words: *quadratic ring, (z,k) -equivalence of matrices, standard form of matrix, matrix equation.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
12.03.18