

СТРУКТУРНО-ВЕРОЯТНОСТНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДЕФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Предлагается структурно-вероятностный подход к описанию деформирования упругопластических материалов. Вероятностная природа предлагаемого подхода связана со случайным характером распределения пределов текучести в деформируемых структурных элементах материала. Различия в значениях пределов текучести структурных элементов обусловлены анизотропией их свойств и отличиями в ориентации относительно направления действующего напряжения. Согласно предлагаемому подходу к описанию пластического деформирования эффекты типа упрочнения при первичном и повторяющихся нагружениях и др. объясняются особенностями изменения концентрации пластических элементов в процессе нагружения.

Ключевые слова: образец, предел текучести, структурный элемент, упрочнение, диаграмма деформирования.

Введение. Основными особенностями пластического деформирования материалов являются: нелинейная связь между деформациями и вызывающими их напряжениями, необратимость процесса деформирования вследствие перехода энергии пластического деформирования в другие виды энергии, упрочнение при первичном и повторных нагружениях.

К настоящему времени предложены различные варианты детерминированных и статистических подходов к описанию обсуждаемого явления [1–5, 8, 10–12, 14]. Вместе с тем не описан физический механизм явления пластичности, из которого бы следовали перечисленные особенности пластического деформирования.

В настоящей работе на основе структурного подхода, развитого в современной теории разрушения материалов [6, 7, 9, 13, 15–17, 18], излагается структурно-вероятностная интерпретация деформационной теории пластичности. Из предлагаемой интерпретации следует физический механизм сущности пластического деформирования, с помощью которого возможно наглядное объяснение эффектов, сопровождающих пластическое деформирование.

1. Физическая постановка задачи. Для описания процесса пластического деформирования привлекается предложенная в [2] модель накопления структурных элементов в текучем состоянии. Согласно этой модели предполагается, что единичный объем материала состоит из N структурных элементов. Считается, что структурные элементы имеют эллипсоидальную (a' , b' – большая и меньшая полуоси эллипсоида вращения) либо сферическую (a' – радиус сферы) формы. Для оценки объема материала, перешедшего в пластическое состояние, вводится численная характеристика $V_p = N_0 \langle v' \rangle$, где N_0 – количество пластических структурных элементов в единичном объеме, $\langle v' \rangle = \frac{4\pi}{3} \langle a' b'^2 \rangle$ – средний объем структурных элементов материала. Если общее количество структурных элементов в единице объема равно $N = 1/\langle v' \rangle$, то объемная концентрация пластического материала будет определяться выражением $p = N_0/N$.

Известно [2, 10, 14], что с ростом нагрузки пластическое деформирование связано с последовательным переходом отдельных групп структурных элементов материала в состояние текучести, которое происходит в

* domval@ukr.net

некоторых плоскостях кристаллических решеток в определенных направлениях при достижении касательными напряжениями предельных значений текучести, зависящих от ориентации кристаллических структурных элементов. Структурные элементы при равномерном растяжении либо сжатии образца деформируются упруго вплоть до достижения в них локального предела текучести τ . В дальнейшем деформирование происходит при постоянном значении напряжения в конкретном структурном элементе, равном значению предела текучести этого элемента. Локальные пределы текучести отличаются значениями в силу анизотропии структурных элементов. Реализация их конкретных значений в структурных элементах связана с ориентацией последних относительно направления действия напряжений в образце. В результате текучести в структурных элементах часть работы деформирующей силы расходуется на пластическое деформирование. Эта работа связана с необратимыми изменениями размеров образца и формы переходит в немеханические виды энергии. Ориентации плоскостей течения связаны с видами кристаллической решетки конкретных материалов, которые не являются предметом изучения в механике деформируемого твердого тела в рамках модели сплошной среды. Поэтому в указанных рамках плоскостями пластического скольжения отдельных групп зерен с определенной степенью приближения можно считать плоскости максимальных касательных напряжений либо октаэдрические плоскости. Например, при одноосном растяжении – сжатии образца напряжением $\sigma_{33} \geq \sigma_T$ такими плоскостями будут сечения, ориентированные к направлению действия главного нормального напряжения σ_{33} под углом 45° , в которых компоненты касательных напряжений достигают максимальных значений $\sigma_{\max} = \frac{\sigma_{33}}{2}$. В этом случае в соответствии с изложенным выше в отдельных структурных элементах при напряжениях $\sigma_{\max} \geq \tau$ деформирование продолжается до предельного значения деформации текучести [6], отождествляемой со значением макродеформации связанной совокупности структурных элементов в растягиваемом либо сжимаемом образце.

Физическая интерпретация возможности отождествления октаэдрических плоскостей с плоскостями течения сводится к следующему [10, 14]. Октаэдрическое касательное напряжение представляет собой осредненное значение касательных напряжений, действующих на площадках всех возможных ориентаций в окрестности точки с заданными главными напряжениями. В каждом структурном элементе возможность течения определяется величиной касательного напряжения в определенной плоскости скольжения и определенном направлении. Поэтому в поликристаллическом элементарном объеме, в котором всевозможные ориентации плоскостей скольжения структурных элементов равновероятны, естественно связать наступление течения с величиной, представляющей собою среднее значение касательного напряжения на площадках всех возможных ориентаций.

Таким образом, в процессе пластического деформирования при нагружении образца напряжениями σ_{33} отдельные группы структурных элементов материала при повышении нагрузки переходят в состояние текучести последовательно в зависимости от уровня значений их пределов текучести в направлении действия нагрузки. В соответствии с изложенным, механизм упрочнения материала при первичном нагружении можно увязать с различием в значениях пределов текучести структурных элементов материала. Наступление вязкого (образование шейки) разрушения образца при этом происходит при переходе в текучее состояние определенной (критической) доли структурных элементов в поперечных сечениях.

Практическая реализация структурно-вероятностного описания явления пластического деформирования связана с выбором теоретических зако-

нов распределения пределов текучести структурных элементов материала, адекватных экспериментальным диаграммам деформирования, и с наличием достоверных статистически обработанных данных по основным механическим свойствам материала.

В соответствии с изложенным выше предлагается структурно-вероятностная трактовка деформационной теории пластичности материалов.

2. Определяющие соотношения. В деформационной теории пластичности напряжения и деформации связаны однозначными зависимостями типа закона Гука, которые в системе координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с представительным объемом тела, имеют вид [7, 10]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_s} [\sigma_{11} - \nu_s (\sigma_{22} + \sigma_{33})], & \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_s} [\sigma_{22} - \nu_s (\sigma_{11} + \sigma_{33})], \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{G_s} \sigma_{12}, & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{G_s} \sigma_{13}, & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{G_s} \sigma_{23}.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь обозначено: E_s , ν_s , $G_s = \frac{E_s}{2(1 + \nu_s)}$ – соответственно секущие нормальный модуль, коэффициент поперечного сужения, модуль сдвига.

Кроме соотношений (1), в деформационной теории пластичности принимается дополнительное предположение, в соответствии с которым изменение объема считается упругим:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) &= K (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \\ K &= \frac{E_s}{3(1 - 2\nu_s)} = \frac{E_0}{3(1 - 2\nu_0)} = \text{const}.\end{aligned}\quad (2)$$

Деформационные параметры при пластическом деформировании определяются экспериментально при чистых растяжении, сжатии либо сдвиге.

Ниже излагается процедура определения указанных параметров аналитическим путем с использованием стандартных характеристик основных механических свойств материалов: E_0 – модуль упругости, ν_0 – коэффициент Пуассона, $\sigma_{0,02}$, $D_{0,02}^2$, $w_{0,02}$ – предел пропорциональности, соответствующие дисперсия либо коэффициент вариации; $\sigma_{0,2}$, $D_{0,2}^2$, $w_{0,2}$ – условный предел текучести, соответствующие дисперсия либо коэффициент вариации; σ_b , D_b^2 , w_b – временное сопротивление, соответствующие дисперсия либо коэффициент вариации. Для этой цели применяется принцип баланса энергии, сущность которого состоит в приравнивании плотностей энергий деформирования при заданном виде нагружения тела (образца) согласно континуальной модели деформационной теории пластичности и предлагаемой структурно-вероятностной модели пластичности.

Рассмотрим одноосное растяжение образца в упругопластической области деформирования. Известно [10], что при статическом растяжении образца напряжением $\sigma_{33} > \sigma_{0,02}$ плотность энергии деформирования определяется площадью фигуры, ограниченной диаграммой растяжения, осью абсцисс (0ε) и прямой, соединяющей точку диаграммы (σ_{33} , ε_{33}) с точкой на оси абсцисс (ε_{33}) соответствующей достигнутой деформации:

$$U + W = \int_0^{\varepsilon_{33}} \sigma d\varepsilon.\quad (3)$$

В равенстве (3) через U обозначена упругая энергия деформирования, через W – энергия пластического деформирования.

Для приближенного представления выражения (3) применяется известный прием [10] схематизации экспериментальной диаграммы. Суть такой операции состоит в замене криволинейного участка экспериментальной диаграммы другой кривой, описываемой простым алгебраическим уравнением. В зависимости от кривизны диаграммы деформирования, для схематизации применяются координаты определенного количества точек данной диаграммы некоторых значений деформации текучести, ограниченных связями в виде смежных упругих структурных элементов. Значение деформации структурных элементов в состоянии текучести приближенно отождествляется со значением макродеформации ε_{33} , представляющей собой предельное значение из возможных значений для пластических структурных элементов, связанных с упругодеформируемыми элементами. Последний вариант правомочен для материалов с диаграммами упрочнения малой кривизны. Если схематизировать криволинейный участок такой экспериментальной диаграммы прямым лучом, соединяющим точки с ординатами $\sigma_{0.02}$ и σ_{33} , обозначающие соответственно предел пропорциональности и значение текущего напряжения, то из (3) получим такое выражение для энергии деформирования:

$$U + W \cong \frac{1}{2} \sigma_{0.02} \varepsilon_{0.02} + \sigma_{0.02} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{0.02}) + \frac{1}{2} (\sigma_{33} - \sigma_{0.02}) (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{0.02}). \quad (4)$$

С учетом равенств $\varepsilon_{0.02} = \sigma_{0.02}/E_0$, $\varepsilon_{33} = \sigma_{33}/E_s$, где E_s – секущий модуль, определяемый тангенсом угла наклона луча, соединяющего начало координат с конечной точкой схематизированного участка диаграммы ($\varepsilon_{33}, \sigma_{33}$), соотношение (4) запишется в виде

$$U + W \cong \frac{1}{2} \frac{\sigma_{33}^2}{E_s} \left(1 + \frac{\sigma_{0.02}}{\sigma_{33}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\sigma_{33}^2}{E_0} \frac{\sigma_{0.02}}{\sigma_{33}}. \quad (5)$$

Выражением (5) определяется плотность энергии деформирования образца, единица объема которого состоит, например, из N эллипсоидальных структурных элементов, часть из которых деформируется упруго. Оставшаяся часть состоит из структурных N_0 элементов с пределом текучести, равным или меньшим действующего напряжения σ_{33} , вследствие чего они переходят в состояние текучести, т.е. деформируются при постоянном напряжении до достижения предельного значения деформации текучести.

В соответствии с изложенным плотность энергии деформирования образца с позиции структурной модели можно представить соотношением

$$U + W = \sum_{n=1}^N \frac{4}{3} \pi a_n b_n^2 (U_f + U_v) + \sum_{n=1}^{N_0} \frac{4}{3} \pi a_n b_n^2 (W_p - U_v - U_f), \quad (6)$$

где $U_v = \frac{1-2\nu_0}{6E_0} \sigma_{33}^2$ – плотность энергии изменения объема, $U_f = \frac{1+\nu_0}{3E_0} \sigma_{33}^2$

– плотность энергии упругого формоизменения, $U_v + U_f = \frac{\sigma_{33}^2}{2E_0}$. Через W_p здесь обозначена плотность энергии пластического деформирования структурного элемента в состоянии текучести при сложном напряженном состоянии, которая определяется выражением [14]

$$W_p = (\sigma'_{11} \varepsilon'_{11} + \sigma'_{22} \varepsilon'_{22} + \sigma'_{33} \varepsilon'_{33} + \sigma'_{12} \varepsilon'_{12} + \sigma'_{13} \varepsilon'_{13} + \sigma'_{23} \varepsilon'_{23}). \quad (7)$$

Символами σ_{ij} , ε'_{ij} , $j = 1, 2, 3$, в (7) обозначены локальные нормальные напряжения, компоненты касательных напряжений и соответствующие

деформации на площадках текучести структурных элементов. Для описания ориентации площадок текучести вводятся две системы координат. В неподвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с представительным объемом тела, задаются действующие на тело напряжения σ_{jj} , $j = 1, 2, 3$. С предполагаемыми площадками текучести, в которых предел текучести отождествляется, например, с октаэдрическим либо полным максимальным касательным напряжением, связываются подвижные системы координат $O'x'_1x'_2x'_3$ с взаимно перпендикулярными осями $O'x'_i$, $i = 1, 2$, в площадках текучести (например, меридиональные либо параллельные им сечения структурных элементов) и осью $O'x'_3$, нормальной к площадке текучести. Локальные напряжения σ'_{i3} , $i = 1, 2, 3$, действующие в направлениях осей подвижных систем координат, и заданные в теле средние напряжения σ_{ij} связаны преобразованием

$$\sigma'_{ik} = \sigma_{mn} \alpha_{im} \alpha_{kn}, \quad (8)$$

где α_{ik} – определяемые углами Эйлера направляющие косинусы собственной системы координат площадок текучести по отношению к лабораторной системе координат [18]:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta, \\ \alpha_{12} &= \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta, \\ \alpha_{13} &= \sin \varphi \sin \vartheta, \\ \alpha_{21} &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta, \\ \alpha_{22} &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta, \\ \alpha_{23} &= \cos \varphi \sin \vartheta, \\ \alpha_{31} &= \sin \psi \sin \vartheta, \\ \alpha_{33} &= \cos \vartheta, \\ \alpha_{32} &= -\cos \psi \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь ϑ – угол нутации, ψ – угол прецессии, φ – угол собственного вращения.

С учетом (1) в сочетании с предположением относительно предельных значений деформации текучести в пластических структурных элементах, соотношение (7) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} W_p &= \frac{1}{E_s} (\sigma'^2_{11} + \sigma'^2_{22} + \sigma'^2_{33}) - 2 \frac{\nu_s}{E_s} (\sigma'_{11} \sigma'_{22} + \sigma'_{11} \sigma'_{33} + \sigma'_{22} \sigma'_{33}) + \\ &+ \frac{1}{G_s} (\sigma'^2_{12} + \sigma'^2_{13} + \sigma'^2_{23}). \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) в случае одноосного растяжения напряжением σ_{33} независимо от вида критерия текучести (критерий Сен-Венана либо Губера – Мизеса – Генки) энергия текучести определяется выражением

$$W_p = \frac{\sigma_{33}^2}{E_s}. \quad (11)$$

С учетом приближенного равенства $\frac{4}{3} \pi a_n b_n^2 \cong \left\langle \frac{4}{3} \pi a_n b_n^2 \right\rangle = \frac{1}{N}$ и (11) соотношение (6) преобразуется к виду

$$U + W = \sigma_{33}^2 \left[\frac{1}{2E_0} + \frac{N_0}{N} \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{2E_0} \right) \right]. \quad (12)$$

Из принципа эквивалентности энергии для растягиваемого образца с учетом (5) и (12) следует равенство

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma_{33}^2}{E_s} \left(1 + \frac{\sigma_{0.02}}{\sigma_{33}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\sigma_{33}^2}{E_0} \frac{\sigma_{0.02}}{\sigma_{33}} = \sigma_{33}^2 \left[\frac{1}{2E_0} + \frac{N_0}{N} \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{2E_0} \right) \right], \quad (13)$$

из которого получаем соотношения

$$E_s = \frac{1 + \frac{\sigma_{0.02}}{\sigma_{33}} - 2 \frac{N_0}{N}}{1 + \frac{\sigma_{0.02}}{\sigma_{33}} - \frac{N_0}{N}} E_0, \quad p = \frac{N_0}{N} = \frac{\left(1 + \frac{\sigma_{0.02}}{\sigma_{33}} \right) \left(1 - \frac{E_s}{E_0} \right)}{2 - \frac{E_s}{E_0}}. \quad (14)$$

В (14) выражение $p = N_0/N$ обозначает долю структурных элементов в единице объема образца, перешедших при растяжении напряжением σ_{33} в состояние текучести, т.е. долю элементов со значением предела текучести, равным или меньшим значению действующего напряжения σ_{33} .

Распределение пределов текучести по структурным элементам можно описать различными законами.

Выбор адекватного закона распределения пределов текучести структурных элементов и определение параметров соответствующей интегральной функции распределения по стандартным данным для основных механических свойств материалов являются основной предпосылкой достоверного статистического описания пластического деформирования.

В [2] показано, что для описания распределения пределов текучести структурных элементов, отождествляемых с нормальным напряжением (критерий текучести по максимальным нормальным напряжениям), с полным максимальным касательным напряжением (критерий текучести Сен-Венана) либо с октаэдрическим касательным напряжением (критерий Губера – Мизеса – Генки), можно воспользоваться степенным законом.

В частности, плотность и интегральная функция распределения сдвиговых пределов текучести представляются в виде

$$f(\tau) = \frac{dp(\tau)}{d\tau} = \alpha \left(\frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \right) \left(\frac{\tau - \tau_0}{\tau_1 - \tau_0} \right)^{\alpha-1}, \quad (15)$$

$$p(\tau) = \left(\frac{\tau - \tau_0}{\tau_1 - \tau_0} \right)^\alpha. \quad (16)$$

В формулах (15), (16) введены обозначения: τ – случайные значения пределов текучести структурных элементов при сдвиге; τ_0 , τ_1 , α – соответственно минимальное и максимальное значения указанных величин и коэффициент рассеивания пределов текучести.

Ниже представлены два подхода к определению параметров функции распределения пределов текучести (16).

Критерии текучести структурных элементов материала при сдвиге максимальными касательными либо октаэдрическими касательными напряжениями имеют вид

$$\tau'_{\max} \geq \tau, \quad \tau'_{\text{oct}} \geq \tau. \quad (17)$$

При достижении касательными напряжениями предельных для некоторого структурного элемента значений τ на площадке их действия начинается течение материала. С учетом вышеизложенного концентрации пластических элементов при статически прикладываемых касательных напряжениях τ'_i , τ'_{\max} , τ'_{oct} будут определяться выражениями вида

$$p_i = p_{0i} + (1 - p_{0i}) \left(\frac{\tau'_i - \tau_{0i}}{\tau_{1i} - \tau_{0i}} \right)^{\alpha_i}, \quad i = 1, 2. \quad (18)$$

где p_{0i} – начальная концентрация пластических структурных элементов.

В (18) индексом $i = 1$ обозначены параметры распределения микро-текучности согласно критерию пластичности Сен-Венана, индексом $i = 2$ – согласно критерию Губера – Мизеса – Генки.

Параметры интегральной функции распределения пределов текучести структурных элементов (16) определяются с использованием характеристик микропластичности структурных элементов методом моментов.

В силу малости размеров структурных элементов прямое определение параметров τ_{0i} , τ_{1i} , α_i неосуществимо. Поэтому необходимо воспользоваться опосредованным приемом определения этих величин по справочным данным для указанных выше основных механических свойств материалов (средние значения, дисперсии либо коэффициенты вариации пределов пропорциональности, текучести, временного сопротивления и др.).

Проиллюстрируем процедуру определения указанных параметров для интегральной функции распределения пределов текучести (16). Считаем, что текучесть структурных элементов начинается при касательных напряжениях, превосходящих предел пропорциональности материала. Поскольку минимальный предел пропорциональности большинства конструкционных материалов является не физической, а условной величиной, то в качестве минимального значения предела текучести структурных элементов приближенно примем $\tau_0 \geq \tau_{0.02}$.

С учетом (16) найдем основные моменты распределения пределов текучести структурных элементов в интервале $\tau_{0.02} \leq \tau \leq \tau_{0.2}$:

$$\tau_{0.2} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \tau f d\tau = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} \bar{\tau}_1 + \tau_0, \quad (19)$$

$$D_{0.2}^2 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\tau - \tau_{0.2})^2 f d\tau = \frac{\alpha_1}{(\alpha_1 + 1)^2 (\alpha_1 + 2)} \bar{\tau}_1^2, \quad (20)$$

где $\bar{\tau}_1 = \tau_1 - \tau_0$.

Из (19), (20) следует

$$k_1^2 = \frac{D_{0.2}^2}{(\tau_{0.2} - \tau_0)^2} = \frac{w_{0.2}^2}{\left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0.2}}\right)^2} = \frac{1}{\alpha_1(\alpha_1 + 2)},$$

$$\alpha_1 = -1 + \frac{1}{k_1} \sqrt{1 + k_1^2}, \quad k_1 = \frac{w_{0.2}}{1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0.2}}}, \quad (21)$$

$$\tau_1 = \bar{\tau}_1 + \tau_0 = \frac{1 + \alpha_1}{\alpha_1} (\tau_{0.2} - \tau_0). \quad (22)$$

Отметим, что приведенные параметры распределения условных пределов текучести имеют место в случае, когда различие в рассеивании последних небольшое, т.е. коэффициенты вариации для значений пределов текучести во всем диапазоне их изменения $(\tau_{0.02}, \tau_{0.2})$ близки.

Другой способ определения параметров функции распределения пределов текучести связан со вторым из соотношений (14), из которого определяются два значения концентрации пластичных структурных элементов, соответствующих условному пределу текучести $\sigma_{0.2}$ и временному сопротивлению σ_b . С этой целью по стандартным данным $(\sigma_{0.2}, \varepsilon_{0.02} + \varepsilon_{0.2}; \sigma_b, \varepsilon_b)$

определяем значения секущих модулей $E_{0.2}$, E_b и соответствующие концентрации пластических структурных элементов $(p_{0.2}, p_b)$. В результате получаем систему двух уравнений относительно неизвестных параметров σ_1 , α :

$$p_{0.2} = \left(\frac{\sigma_{0.2} - \sigma_{0.02}}{\sigma_1 - \sigma_{0.02}} \right)^\alpha, \quad p_b = \left(\frac{\sigma_b - \sigma_{0.02}}{\sigma_1 - \sigma_{0.02}} \right)^\alpha, \quad (23)$$

из которой определяем параметры распределения α и σ_1 .

В (23) $\sigma_{0.02}$, $\sigma_{0.2}$, σ_b соответственно обозначают стандартные данные для нормальных предела пропорциональности, условного предела текучести и временного сопротивления.

Необходимо отметить, что предлагаемые функции распределения при одноосном растяжении, построенные с использованием критериев текучести Сен-Венана, Губера – Мизеса – Генки и максимальных нормальных напряжений, эквивалентны в связи с тем, что стандартные данные для касательных напряжений пересчитываются известным способом по соответствующим данным для нормальных напряжений.

3. Иллюстративный пример. Для иллюстрации возможностей структурного варианта деформационной теории пластичности построим диаграмму деформирования стали 15Х2МФА. Значения стандартных характеристик основных механических свойств стали составляли [12]

$$\begin{aligned} E_0 &= 0.2 \cdot 10^{12} \text{ Па}, & \nu_0 &= 0.3, \\ \sigma_{0.02} &= 0.287 \cdot 10^9 \text{ Па}, & w_{0.02} &= 0.146, \\ \sigma_{0.2} &= 0.414 \cdot 10^9 \text{ Па}, & w_{0.2} &= 0.129, \\ \varepsilon_{0.02} + \varepsilon_{0.2} &= 0.407 \cdot 10^{-2}, \\ \sigma_b &= 0.657 \cdot 10^9 \text{ Па}, & w_b &= 0.07, \quad \varepsilon_b = 0.089. \end{aligned}$$

Расчитанные значения секущих модулей и концентрации пластических структурных элементов, соответствующие условному пределу текучести и временному сопротивлению, равнялись

$$\begin{aligned} E_{0.2} &= 0.102 \cdot 10^{12} \text{ Па}, & E_b &= 0.735 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \\ p_{0.2} &= 0.558, & p_b &= 0.705. \end{aligned}$$

Параметры функции распределения пределов текучести, вычисленные с использованием системы уравнений (23), составляли:

$$\alpha = 0.218, \quad \sigma_1 = 1.829 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \sigma_0 = 0.287 \cdot 10^9 \text{ Па}.$$

Диаграмма деформирования строится с использованием первого из соотношений (14) для определения значений секущего модуля E_c . Концентрацию структурных элементов, переходящих в состояние текучести при последовательном увеличении значений растягивающего напряжения σ_{33} , определяем по формуле

$$p = \left(\frac{\sigma_{33} - 0.287 \cdot 10^9}{1.829 \cdot 10^9 - 0.287 \cdot 10^9} \right)^{0.218}.$$

Диаграмма деформирования для стали 15Х2МФА, построенная в соответствии с изложенной процедурой, изображена на рис. 1.

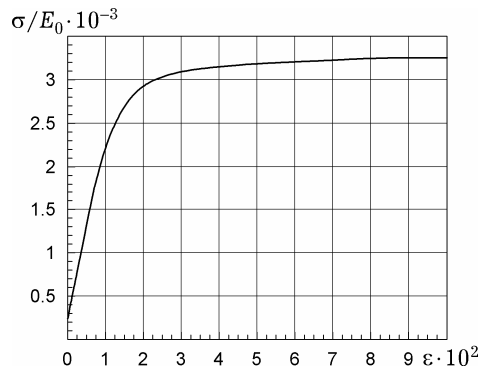


Рис. 1. Теоретическая диаграмма деформирования стали 15Х2МФА при растяжении.

Диаграмма деформирования связана с интервалом нагружения $[0, \sigma_b]$, при котором происходит однородное деформирование образцов.

Участок диаграммы деформирования образцов при $\sigma_{33} > \sigma_b$, соответствующий неоднородному деформированию в области шейки, требует отдельного рассмотрения в силу перехода образца из состояния одноосного однородного по длине деформирования в состояние локального трехмерного деформирования, приводящего к нарушению целостности образца.

Заключение. Изложен структурно-вероятностный подход к описанию пластичного деформирования материалов. Вероятностная природа предложенного подхода связана со случайным характером распределения значений предела текучести в деформируемых структурных элементах материала. Разброс в значениях пределов текучести обусловлен отличием в ориентации структурных элементов и анизотропией их свойств. С позиции структурно-вероятностного подхода к описанию явления пластического деформирования эффекты типа упрочнения при первичном и повторных нагружениях объясняются особенностями изменения концентрации структурных элементов, переходящих в состояние текучести.

1. *Афанасьев Н. Н.* Статистическая теория усталостной прочности металлов. – Киев: Изд-во АН УССР, 1953. – 128 с.
2. *Болотин В. В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – Москва: Машиностроение, 1984. – 312 с.
3. *Владимиров В. И.* Физическая теория пластичности и прочности. Ч. 2. Точечные дефекты. Упрочнение и возврат. – Ленинград: Изд-во Ленингр. политехн. ин-та, 1975. – 152 с.
4. *Волков С. Д.* Статистическая теория прочности. – Москва: Машгиз, 1960. – 176 с.
5. *Гольденблат И. И., Копнов В. А.* Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. – Москва: Машиностроение, 1968. – 192 с.
6. *Гузъ А. Н.* Основы механики разрушения композитов при сжатии: В 2 т. – Т. 1. Разрушение в структуре материала. – Киев: Литера, 2008. – 592 с.
7. *Канторова Т. А., Френкель Я. И.* Статистическая теория хрупкой прочности реальных кристаллов // Журн. техн. физики. – 1941. – **11**, вып. 3. – С. 173–181.
8. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1956. – 324 с.
9. *Кильчевский Н. А.* Курс теоретической механики: В 2 т. – Т. 2. – Москва: Наука, 1977. – 544 с.
10. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – Москва: Машиностроение, 1968. – 400 с.
11. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.* Сопротивление полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
12. *Махутов Н. А., Зацаринный В. В., Базарас Ж. М.* Статистические закономерности малоциклового нагружения. – Москва: Наука, 1989. – 252 с.
13. *Новиков И. И., Ермишкин В. А.* Микромеханизмы разрушения металлов. – Москва: Наука, 1991. – 367 с.

14. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов. – Москва: Физматгиз, 1962. – 455 с.
15. Салганик Р. Л. Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 149–158.
То же: *Salganik L. Mechanics of bodies with many cracks // Mech. Solids.* – 1973. – 8, No. 4. – P. 135–143.
16. Тамуж В. П., Куксенко В. С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
17. Фрейденталь А. М. Статистический подход к хрупкому разрушению // Разрушение / Ред. Г. Либовиц: В 7 т. – Москва: Мир, 1975. – 764 с. – Т. 2: Математические основы теории разрушения. – С. 616–645.
18. Babich D. V., Bastun V. N. On dispersed microdamageability of elastic-brittle materials under deformation // *J. Strain Analysis.* – 2010. – 45, No. 1. – P. 57–66.
<https://doi.org/10.1243/03093247JSA557>.

СТРУКТУРНО-ЙМОВІРНІСНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ДЕФОРМАЦІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ

Пропонується структурно-ймовірнісний підхід до опису деформування пружно-пластичних матеріалів. Ймовірнісна природа запропонованого підходу пов'язана з випадковим характером розподілу границь текучості в деформованих структурних елементах матеріалу. Відмінності в значеннях границь текучості структурних елементів обумовлені анізотропією їх властивостей та відмінностями в орієнтації відносно напрямку діючого напруження. Згідно з запропонованим підходом до опису пластичного деформування ефекти типу зміцнення при первинному і повторних навантаженнях та ін. пояснюються особливостями зміни концентрації пластичних елементів у процесі навантаження.

Ключові слова: зразок, межа текучості, структурний елемент, зміцнення, діаграма деформування.

STRUCTURAL-PROBABILISTIC INTERPRETATION OF THE DEFORMATION THEORY OF PLASTICITY

The structural-probabilistic approach to the description of deformation of elastic-plastic materials is developed. The probabilistic nature of the proposed approach is associated with the random character of the distribution of the yield strengths in the deformable structural elements of the material. The difference in the values of the yield strengths of structural elements is due to the anisotropy of their properties and differences in orientation relative to the direction of the acting stress. According to the proposed approach to the description of plastic deformation, the effects such as hardening at the primary and repeated loadings etc., are explained by the peculiarities of changes in concentration of plastic elements in the process of loading.

Key words: sample, yield strength, structural element, hardening, strain diagram.

Ин-т механики им. С. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Получено
04.05.17