УДК 512.64

В. П. Щедрик *

КЛАСИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ МАТРИЧНИХ ОДНОСТОРОННІХ РІВНЯНЬ ЗА ПЕРЕТВОРЮВАЛЬНИМИ МАТРИЦЯМИ ЇХ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ МАТРИЦЬ

Досліджено розв'язки односторонніх матричних рівнянь над алгебраїчно замкненими полями характеристики нуль у деякому трансцедентному розширенні основного поля, що породжені певною множиною оборотних матриць. Встановлені умови, за яких корені, що відповідають різним оборотним матрицям з цієї множини, збігаються.

Ключові слова: *форма Сміта, форма Жордана, перетворювальні матриці, група Зеліска, матричні рівняння.*

Продовжуючи дослідження, започатковані раніше [2], розглянемо одностороннє матричне рівняння

$$A(X) = X^k A_k + X^{k-1} A_{k-1} + \mathbf{L} + A_0 = 0\,, \tag{1}$$

де A_i – $n \times n$ матриці над F-алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль. Поставимо йому у відповідність характеристичну матрицю

$$A(x) = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \mathbf{L} + A_0\,,$$

яку запишемо у вигляді $A(x) = P^{-1}(x)\,\mathrm{E}(x) Q^{-1}(x)$, де $\mathrm{E}(x)$ – форма Сміта, а $P(x)$, $Q(x)$ – ліва та права перетворювальні матриці $A(x)$. Зауважимо, що пара матриць $P(x)$, $Q(x)$ визначена неоднозначно. Зокрема, будь-яка інша ліва перетворювальна матриця $P_1(x)$ має вигляд $P_1(x) = H(x)P(x)$, $H(x) \in \mathrm{G_E}$, де $\mathrm{G_E}$ – група Зеліска, тобто мультиплікативна група

$$\mathrm{G_E} = \left\{ H(x) \in GL_n(F[x]) \mid \exists\, K(x) \in GL_n(F[x]) : H(x)\mathrm{E}(x) = \mathrm{E}(x) K(x) \right\}.$$

Згідно з узагальненою теоремою Безу, матриця B є розв'язком рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли

$$A(x) = (Ix - B)C(x),$$

де I – одинична матриця. Матрицю $\operatorname{diag}(d_1(x), \mathbf{K}\ ,\ d_n(x))$, де $d_i(x)$ – нормовані поліноми, з умовою $d_i(x) \mid d_{i+1}(x)$ називатимемо d-матрицею. Оскільки форма Сміта дільника ділить форму Сміта самої матриці [6], то потенційними формами Сміта дільників є всі d-матриці, що ділять $\mathrm{E}(x)$. Зваживши на скінченну кількість таких матриць, можемо розбити задачу пошуку всіх коренів рівняння (1) на декілька кроків, поетапно описуючи корені, характеристичні матриці яких мають наперед задану форму Сміта. Досліджуючи таку задачу, П. Казімірський [3, 4] вказав критерій розв'язності рівняння (1), який ґрунтувався на введених ним поняттях визначальної матриці та значенні матриці на системі коренів полінома. Цей результат у дещо модифікованому вигляді сформульовано в праці [2, Теорема 3]: B є коренем рівняння $A(X) = 0$ тоді і тільки тоді, коли матриця $Ix - B$ має форму Сміта $\Phi(x)$, причому $\deg\det\Phi(x) = n$ і $\det M_{V(\mathrm{E},\Phi)P(x)}(\Phi) \neq 0$. Якщо ці умови виконуються, то розв'язок рівняння (1) знаходимо за формулою

$$X_P = M^{-1}{}_{V(\mathrm{E},\Phi)P(x)}(\Phi) J(\Phi) M_{V(\mathrm{E},\Phi)P(x)}(\Phi)\,. \tag{2}$$

Цей розв'язок є матрицею над $F(k_{ij})$-трансцендентним розширенням поля

* shchedrykv@ukr.net

F внаслідок приєднання параметрів k_{ij}, які фігурують у визначальній матриці $V(\mathrm{E},\Phi)$. Щоб отримати розв'язки над F, потрібно всім параметрам k_{ij} надати допустимих значень із F (за яких $\det M_{V(\mathrm{E},\Phi)P(x)}(\Phi) \neq 0$). Запропонований метод лише за умов, що сформульовані в праці [5], описує всі шукані корені. Якщо ж ці умови не виконуються, то необхідно знайти корені, неохоплені формулою (2). Розширити множину отриманих коренів можна заміною перетворювальної матриці $P(x)$ у формулі (2) на деяку іншу $P_1(x)$, оскільки вибір перетворювальної матриці суттєво впливає на вигляд розв'язку X_P. Продемонструємо це на конкретному прикладі.

Розглянемо матричне рівняння

$$A(X) = X^3 \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} + X^2 \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} + X \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = 0, \tag{3}$$

якому відповідає характеристична матриця

$$A(x) = \begin{Vmatrix} -x^2+2x-1 & x^3-x^2 \\ x-1 & -x^2+x \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & x \\ 1 & x-1 \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x(x-1) \end{Vmatrix} = P_1^{-1}(x)\mathrm{E}(x).$$

Знайдемо розв'язки рівняння (3), характеристичні матриці яких мають форму Сміта $\Phi(x) = \operatorname{diag}(1, x(x-1))$. У цьому випадку визначальна матриця $V(\mathrm{E},\Phi) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ ax & 1 \end{Vmatrix}$. З теореми 3 із праці [2] випливає, що перетворювальна матриця $P_1(x)$ породжує параметричний розв'язок $X_1 = \dfrac{1}{2a+1}\begin{Vmatrix} a+1 & a \\ a+1 & a \end{Vmatrix}$. Якщо ж за перетворювальну вибрати матрицю $P_2(x) = \begin{Vmatrix} -1 & -x+2 \\ 1 & x-1 \end{Vmatrix}$, то їй відповідатиме параметричний розв'язок $X_2 = \begin{Vmatrix} 1-a & a \\ 1-a & a \end{Vmatrix}$.

Тому слід визначити, коли різним перетворювальним матрицям відповідає один і той самий параметричний розв'язок. Нижче даємо вичерпну відповідь на це питання.

Розглянемо мультиплікативну групу

$$\mathrm{G}_\Phi^* = \{H(x) \in GL_n(F(k_{ij})[x]) \mid \exists\, K(x) \in GL_n(F(k_{ij})[x]) : H(x)\mathrm{E}(x) = \mathrm{E}(x)K(x)\},$$

структура якої описана раніше [7].

Теорема 1. *Нехай матричне рівняння* $A(X) = 0$ *має розв'язок, характеристична матриця якого має форму Сміта* Φ. *Для того, щоб перетворювальним матрицям* $P(x)$, $P_1(x) = H(x)P(x)$ *відповідав один і той самий параметричний розв'язок, необхідно та достатньо, щоб*

$$N = V(\mathrm{E},\Phi)H(x)V^{-1}(\mathrm{E},\Phi) \in \mathrm{G}_\Phi^*.$$

Перед доведенням дослідимо властивості матриці N.

Нехай рівняння $A(X) = 0$ має розв'язок, характеристична матриця якого має форму Сміта $\Phi(x)$. І нехай $P(x)$, $P_1(x)$ – ліві перетворювальні матриці $A(x)$, де $P_1(x) = H(x)P(x)$, $H(x) \in \mathrm{G}_\mathrm{E}$. Тоді матриці $M_{V(\mathrm{E},\Phi)P(x)}(\Phi)$, $M_{V(\mathrm{E},\Phi)P_1(x)}(\Phi)$ – неособливі. Отже, існує єдина матриця S, що задовольняє рівність

$$M_{V(\mathrm{E},\Phi)P_1(x)}(\Phi) = SM_{V(\mathrm{E},\Phi)P(x)}(\Phi). \tag{4}$$

Теорема 2. *Нехай* S *– матриця з рівності* (4). *Для того, щоб*

$$SJ(\Phi) = J(\Phi)S,$$

необхідно та достатньо, щоб $N = V(\mathrm{E},\Phi)H(x)V^{-1}(\mathrm{E},\Phi) \in \mathrm{G}^{*}_{\Phi}$.

Д о в е д е н н я. Без обмеження загальності можна вважати, що $\varphi_1(x) = 1$. В іншому випадку, зваживши на те, що $\Phi(x)$ є d-матрицею, причому $\deg\det\Phi(x) = n$, приходимо до висновку, що $\Phi = (x-\alpha)I$. За такої умови $V(\mathrm{E},\Phi) = I$. Тобто існує єдиний шуканий корінь, який отримуємо з формули (2) і який не залежить від вибору матриці $P(x)$. При цьому $N = H(x) \in \mathrm{G}_{\Phi} = \mathrm{G}^{*}_{\Phi}$.

Достатність. Нехай $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{k-1}(x) = 1$, $\deg\varphi_k(x) > 0$, причому

$$\varphi_i(x) = (x-\alpha)^{s_i}(x-\alpha_1)^{s_{i1}} \cdots (x-\alpha_m)^{s_{im}}, \quad i = k, k+1, \ldots, n,$$

де $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – різні корені полінома $\varphi_n(x)$. Позначимо через $h^1_j(x)$ та $t_j(x)$ відповідно j-ті рядки матриць N, $R^1(x) = V(\mathrm{E},\Phi)P(x)$, $j = 1, \ldots, n$. Тоді

$$M_{V(\mathrm{E},\Phi)H(x)P(x)}(\Phi) = M_{NR^1(x)}(\Phi) = \begin{Vmatrix} M_{h^1_k(x)R^1(x)}(\varphi_k) \\ \cdots\cdots\cdots \\ M_{h^1_n(x)R^1(x)}(\varphi_n) \end{Vmatrix}.$$

Оскільки $N \in \mathrm{G}^{*}_{\Phi}$, то

$$h^1_i(x) = \begin{Vmatrix} \varphi_i a_{i1} & \ldots & \varphi_i a_{ik-1} & \dfrac{\varphi_i}{\varphi_k} a_{ik} & \ldots & \dfrac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} a_{ii-1} & a_{ii} & \ldots & a_{in} \end{Vmatrix}, \; i = k, \ldots, n.$$

Тому перші $k-1$ елементів кожного рядка $M_{h^1_i(x)R^1(x)}(\phi_i)$ є нулями. Позначимо

$$h_i(x) = \begin{Vmatrix} \dfrac{\varphi_i}{\varphi_k} a_{ik} & \ldots & \dfrac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} a_{ii-1} & a_{ii} & \ldots & a_{in} \end{Vmatrix}, \; i = k, \ldots, n,$$

$R(x)$ – отримано з $R^1(x)$ викресленням перших $k-1$ рядків. Тоді

$$M_{NR^1(x)}(\Phi) = \begin{Vmatrix} M_{h_k(x)R(x)}(\varphi_k) \\ \cdots\cdots\cdots \\ M_{h_n(x)R(x)}(\varphi_n) \end{Vmatrix}.$$

Переставляючи рядки матриці $M_{NR^1(x)}(\Phi)$, що рівносильно домноженню її на деяку елементарну числову матрицю F, одержуємо:

$$FM_{NR^1(x)}(\Phi) = \begin{Vmatrix} M_{h_k(x)R(x)}[\alpha^{(s_k)}] \\ \cdots\cdots\cdots \\ M_{h_n(x)R(x)}[\alpha^{(s_n)}] \\ \cdots\cdots\cdots \\ M_{h_n(x)R(x)}[\alpha_m{}^{(s_{nm})}] \end{Vmatrix}.$$

Скориставшись формулою похідної добутку матриць, отримаємо:

$$FM_{NR^1(x)}(\Phi) = \left(N^1(\alpha) \oplus \cdots \oplus N^1(\alpha_m)\right) \times$$

$$\times\left\| R(\alpha)\ R'(\alpha)\,\mathbf{K}\,R^{(s_n-1)}(\alpha)\,\mathbf{K}\,R(\alpha_m)\ R'(\alpha_m)\,\mathbf{K}\,R^{(s_{nm}-1)}(\alpha_m)\right\|^T = \\ = N^1 M_{R(x)}(\varphi_n). \qquad (5)$$

Символ ^{T} означає блочне транспонування. Для зменшення кількості індексів наведемо лише структуру блоку $N^1(\alpha)$, оскільки інші мають аналогічну будову:

$$N^1(\alpha) = \left\| L_k(\alpha)\ L_{k+1}(\alpha)\ \mathbf{K}\ L_n(\alpha)\right\|^T,$$

де

$$L_j(\alpha) = \left\| \begin{matrix} h_j(\alpha) \\ h_j'(\alpha)\ h_j(\alpha) \\ \mathbf{L\ L\ L\ L\ L\ L} \\ h_j^{(s_j-1)}(\alpha)\ \mathbf{K} \begin{pmatrix} s_j-1 \\ s_i-1 \end{pmatrix} h_j^{(s_j-s_i)}(\alpha)\,\mathbf{K}\,h_j(\alpha) \end{matrix} \right\|.$$

Матриця $M_{R^1(x)}(\Phi)$ містить рядки $t_i(\alpha), t_i'(\alpha)\,\mathbf{K}, t_i^{(s_i-1)}(\alpha)$, $k \le i \le n$, а матриця $M_{R(x)}(\varphi_n)$ при $s_n > s_i$, окрім цих рядків – ще й $t_i^{(s_i)}(\alpha), \mathbf{K}, t_i^{(s_n-1)}(\alpha)$. Тобто всі рядки матриці $M_{R^1(x)}(\Phi)$ містяться в матриці $M_{R(x)}(\varphi_n)$. Нехай $\varphi_j(x)$ – такий поліном, у якого $s_j - s_i = t \ge 1$, але вже $s_j - 1 = s_i$. Тоді

$$\frac{\varphi_j(x)}{\varphi_i(x)} = (x-\alpha)^t q(x),\ \ q(\alpha) \ne 0.$$

Звідси випливає, що α буде коренем всіх похідних полінома $\dfrac{\varphi_j(x)}{\varphi_i(x)}$ до $(t-1)$-ої включно. Тому в рядках $h_j(\alpha), h_j'(\alpha), \mathbf{K}, h_j^{(s_j-s_i-1)}(\alpha)$ на $(i+1-r)$-му місці стоятимуть нулі. Оскільки матриця Φ є d-матрицею, приходимо до висновку, що стовпці матриці $N^1(\alpha)$, в яких знаходяться ці нулі, є нульовими. У добутку матриць $N^1 M_{R(x)}(\varphi_n)$ елементи цих нульових стовпців множимо на $t_i^{(s_i)}(\alpha), \mathbf{K}, t_i^{(s_n-1)}(\alpha)$. Тому, викресливши нульові елементи і ті, на які їх множимо, отримаємо матрицю $N^{11} M^1_{R(x)}(\varphi_n)$, яка дорівнює матриці $FM_{NR^1(x)}(\Phi)$. Виконавши аналогічні дії з коренями $\alpha_1, \mathbf{K}, \alpha_m$, одержимо матрицю

$$N^* M^*_{R(x)}(\varphi_n) = FM_{NR^1(x)}(\Phi).$$

Оскільки матриця $M^*_{R(x)}(\varphi_n)$ відрізняється від матриці $M_{R^1(x)}(\Phi)$ лише порядком запису рядків, то існує така неособлива матриця N_1, що

$$N_1 M_{R(x)}(\varphi_n) = M_{R^1(x)}(\Phi).$$

Тоді

$$FM_{NR^1(x)}(\Phi) = N^* N_1^{-1} N_1 M^*_{R(x)}(\varphi_n) = N^* N_1 M_{R^1(x)}(\Phi)$$

або

$$FM_{NR^1(x)}(\Phi) = F^{-1} N^* N_1 M_{R^1(x)}(\Phi).$$

Матриця N_1 впорядковує рядки матриці $M^*_{R(x)}(\varphi_n)$ у тій послідовності, в якій вони знаходяться в матриці

$$M_{R^1(x)}(\Phi) = \begin{Vmatrix} M_{t_k}[\alpha^{(s_k)}] \\ \ldots \\ M_{t_k}[\alpha_m^{(s_{km})}] \\ \ldots \\ M_{t_n}[\alpha_m^{(s_{nm})}] \end{Vmatrix}.$$

Тоді матриця N_1^{-1} впорядковуватиме стовпці матриці N^* за їх множенням на рядки матриці $M_{R^1(x)}(\Phi)$. Розбиття матриці $M_{R^1(x)}(\Phi)$ індукує розбиття матриці $N^*N_1^{-1}$ на вертикальні смуги. Оскільки поміняли місцями стовпці матриці N^*, то в рядках матриці $N^*N_1^{-1}$ залишаться значення спочатку на корені α, після – на α_1 і т.д. – на α_m.

Матриця F^{-1} переставляє рядки матриці $N^*N_1^{-1}$. Тому відразу не отримаємо значення рядків $h_i(x)$ на поліномі $\varphi_i(x)$, $i = k, \ldots, n$. Розіб'ємо матрицю $F^{-1}N^*N_1^{-1} = S'$ на горизонтальні смуги так, щоб у першу попали значення рядка $h_k(x)$ на $[\alpha^{(s_k)}]$, у другу – його значення на $[\alpha_1^{(s_{k1})}]$ і т.д. – на $[\alpha_m^{(s_{km})}]$. Аналогічно чинемо з рештою рядків. Тоді в одну смугу потрапляють значення деякого рядка на одному корені. Таким чином, матрицю S' розбили на блоки. Зі структури матриці N^* і способу розбиття матриці S' на блоки видно, що

$$S' = \begin{Vmatrix} D_{kk}(\alpha) & 0 & & D_{ki}(\alpha) & & \\ 0 & D_{kk}(\alpha_1) & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{ik}(\alpha) & & & D_{ii}(\alpha) & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & & D_{nn}(\alpha_m) \end{Vmatrix},$$

де нульовими блоками є ті, над (під) якими діагональний блок відповідає одному кореню, а правий (лівий) – іншому:

$$D_{kk}(\alpha) = \begin{Vmatrix} a_{kk}(\alpha) & 0 & & 0 & 0 \\ a'_{kk}(\alpha) & a_{kk}(\alpha) & & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \\ a_{kk}^{(s_k-1)}(\alpha) & \binom{s_k-1}{s_k-2} a_{kk}^{(s_k-2)}(\alpha) & \ldots & (s_k-1)a'_{kk}(\alpha) & a_{kk}(\alpha) \end{Vmatrix}.$$

Інші діагональні блоки $D_{pp}(\alpha_j)$ мають аналогічну структуру. Вважатимемо, що блок $D_{pp}(\alpha_j)$ визначають поліном $a_{pp}(x)$ й корінь α_j. Розглянемо ті блоки, що не знаходяться на головній діагоналі. Розбиття матриці S' на блоки залежить від виділення діагональних блоків. На перетині смуг, що визначаються діагональними блоками $D_{kk}(\alpha), D_{ii}(\alpha)$, знаходяться блоки $D_{ik}(\alpha), D_{ki}(\alpha)$. Якщо $s_k = s_i$, то ці блоки квадратні зі структурою, аналогічною до діагональних, і визначаються поліномами $a_{ik}(x), a_{ki}(x)$ та коренем

α. Якщо $s_i - s_k = t \geq 1$, то поліном $b_{ik}(x) = \dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi_k(x)} a_{ik}$ можна записати у вигляді $b_{ik}(x) = (x-\alpha)^t g_{ik}(x)$. Отже, α буде коренем усіх похідних полінома $b_{ik}(x)$ до $(t-1)$-ої включно. Тому

$$D_{kk}(\alpha) = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{ik}^{(t)}(\alpha) & 0 & \ldots & 0 \\ b_{ik}^{(t+1)}(\alpha) & \binom{t+1}{t} b_{ik}^{(t)}(\alpha) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{ik}^{(s_i-1)}(\alpha) & \binom{s_i-1}{s_i-2} b_{ik}^{(s_i-2)}(\alpha) & \ldots & \binom{s_i-1}{s_k-1} b_{ik}^{(t)}(\alpha) \end{matrix} \right\|,$$

$$D_{ki}(\alpha) = \left\| \begin{matrix} a_{ki}(\alpha) & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a'_{ki}(\alpha) & a_{ki}(\alpha) & & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ a_{ki}^{(s_k-1)}(\alpha) & \binom{s_k-1}{s_k-2} a_{ki}^{(s_k-2)}(\alpha) & \ldots & a_{ki}(\alpha) & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Матриця $J(\Phi)$ є прямою сумою блоків вигляду

$$J_{\alpha^{(k)}} = \left\| \begin{matrix} \alpha & & & & 0 \\ 1 & \alpha & & & \\ & 2 & \alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & k-1 & \alpha \end{matrix} \right\|.$$

Тоді

$$T_{\alpha^{(k)}}^{-1} J_{\alpha^{(k)}} T_{\alpha^{(k)}} = \left\| \begin{matrix} \alpha & & & & 0 \\ 1 & \alpha & & & \\ & 1 & \alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & \alpha \end{matrix} \right\| = J_{\alpha^{(k)}}^{*},$$

де

$$T_{\alpha^{(k)}} = \mathrm{diag}\left(1, 1!, 2!, \ldots, (k_i-1)!\right), \quad T_{\alpha^{(k)}}^{-1} = \mathrm{diag}\left(1, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \ldots, \frac{1}{(k_i-1)!}\right).$$

Таким чином, перехід від матриці $J(\Phi)$ до її форми Жордана $J_*(\Phi)$ здійснюємо за допомогою матриць T, T^{-1}, які є прямою сумою матриць вигляду $T_{\alpha^{(k)}}, T_{\alpha^{(k)}}^{-1}$, відповідно. Тобто $J_*(\Phi) = T^{-1} J(\Phi) T$. Для завершення доведення достатності потрібно пересвідчитись, що матриця $T^{-1} S' T$ комутує з $J_*(\Phi)$. Структура матриць, що комутують з $J_*(\Phi)$, описана в праці [1, стор. 192].

Виберемо довільний елемент матриці $T^{-1}S'T$:

$$\binom{t}{p}\frac{(t-p)!}{t!}a_{ij}^{(p)}(\alpha)=\frac{1}{p!}a_{ij}^{(p)}(\alpha).$$

Не важко зауважити, що біля однакових похідних стоять однакові коефіцієнти. Враховуючи структуру матриці S', отримуємо $S'J(\Phi)=J(\Phi)S'$.

Необхідність. Припустимо, що $N=V(\mathrm{E},\Phi)H(x)V^{-1}(\mathrm{E},\Phi)\notin \mathrm{G}_{\Phi}^{*}$. Це означає, що в матриці N існує елемент $b_{ij}(x)=(x-\alpha)^{\beta}g_{ij}(x)$, $g_{ij}(\alpha)\neq 0$, $i\geq k$, $i>j$, де $\beta<t=s_i-s_j$.

Використавши формулу похідної добутку двох матриць, як і під час доведення достатності, розглянемо рівність (5). Випишемо з блоку $N^1(\alpha)$ горизонтальну смугу, в якій знаходяться значення полінома $b_{ij}(x)$ на системі коренів $(x-\alpha)^{s_i}$, але при цьому нульові блоки, якщо вони є, не виписуємо і стовпці переставляємо так:

$$\left\|B_{i1}(\alpha)\quad \ldots \quad B_{ij}(\alpha)\quad \ldots \quad B_{in}(\alpha)\right\|\left\|\begin{matrix} M_{t_1}[\alpha^{(s_i)}] \\ \ldots\ldots \\ M_{t_j}[\alpha^{(s_i)}] \\ \ldots\ldots \\ M_{t_n}[\alpha^{(s_i)}]\end{matrix}\right\| = N_{i\alpha}M_{R^1(x)}(I(x-\alpha)^{s_i}),$$

де

$$B_{ij}(\alpha)=\left\|\begin{matrix} b_{ij}(\alpha) & 0 & & 0 & 0 \\ b_{ij}'(\alpha) & b_{ij}(\alpha) & & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \\ b_{ij}^{(s_i-1)}(\alpha) & \binom{s_i-1}{s_i-2}b_{ij}^{(s_k-2)}(\alpha) & \ldots & (s_i-1)b_{ij}'(\alpha) & b_{ij}(\alpha)\end{matrix}\right\|.$$

Матрицю $N_{i\alpha}$ розіб'ємо на блоки так, щоб в один блок потрапило значення одного полінома $b_{il}(x)$ на корені α. Цей блок називатимемо таким, що відповідає $b_{il}(\alpha)$. Згідно з умовою теореми, матриця S комутує з $J(\Phi)$, а отже, має таку саму структуру, як і матриця S'. Розглянемо горизонтальну смугу матриці S, яка складається з рядків, що мають однакові номери з тими, які виділили з матриці $N^1(\alpha)$, причому нульові блоки не виписуємо:

$$S_{i\alpha}=\left\|S_{i\alpha}^{k}\quad \ldots \quad S_{i\alpha}^{k+g}\quad \ldots \quad S_{i\alpha}^{n}\right\|,$$

де блоки $S_{i\alpha}^{p}$ мають структуру, аналогічну до структури блоків $D_{ip}(\alpha)$ матриці S'. Елементи блоку $S_{i\alpha}^{p}$ позначатимемо так само, як і елементи $D_{ip}(\alpha)$, лише похідні позначимо як $a^{[q]}(x)$.

Нехай $\Phi_{\alpha}(x)=\mathrm{diag}((x-\alpha)^{s_r},(x-\alpha)^{s_{r+1}},\ldots,(x-\alpha)^{s_n})$. Розглянемо матрицю $S_{i\alpha}M_{R(x)}(\Phi_{\alpha})$. Розіб'ємо $S_{i\alpha}$ на блоки так, щоб в один потрапили числа з однаковими нижніми індексами. Тоді блоки, в яких містяться числа a_{ip}, $i<p\leq n$, якщо $s_p>s_i$, міститимуть s_p-s_i останні нульові стовпці. Викреслимо їх, а також відповідні їм за нумерацією рядки матриці

$M_{R(x)}(\Phi_\alpha)$. Таким чином, отримали матрицю $S^*_{i\alpha}M_{R(x)}(\Phi_{i\alpha}) = S_{i\alpha}M_{R(x)}(\Phi_\alpha)$, де

$$\Phi_{i\alpha}(x) = \operatorname{diag}((x-\alpha)^{s_r}, \ldots, (x-\alpha)^{s_{i-1}}, (x-\alpha)^{s_i}, (x-\alpha)^{s_i}, \ldots, (x-\alpha)^{s_i}).$$

Доповнимо матрицю $M_{R(x)}(\Phi_{i\alpha})$ до матриці $M_{R^1(x)}(I(x-\alpha)^{s_i})$. Щоб добуток $S^*_{i\alpha}M_{R(x)}(\Phi_{i\alpha})$ не змінився, на відповідних місцях у матриці $S^*_{i\alpha}$ допишемо нульові стовпці. Отриману матрицю позначимо через $S^{**}_{i\alpha}$. Тоді

$$N_{i\alpha}M_{R^1(x)}(I(x-\alpha)^{s_i}) = S^{**}_{i\alpha}M_{R^1(x)}(I(x-\alpha)^{s_i}).$$

Отже,

$$\left(N_{i\alpha} - S^{**}_{i\alpha}\right)M_{R^1(x)}(I(x-\alpha)^{s_i}) = 0. \tag{6}$$

Позначимо $c^{[l]}_{ik} = b^{[l]}_{ik} - a^{[l]}_{ik}$. З рівності (6) отримуємо:

$$\left\| c_{i1} \quad \ldots \quad c_{ij} \quad \ldots \quad c_{in} \right\| R^1(\alpha) = \left\| c_{i1} \quad \ldots \quad c_{ij} \quad \ldots \quad c_{in} \right\| V(\mathrm{E},\Phi)_\alpha P(\alpha) = 0,$$

де $V(\mathrm{E},\Phi)_\alpha$ – значення матриці $V(\mathrm{E},\Phi)$ на корені α. Оскільки

$$\det(V(\mathrm{E},\Phi)_\alpha P(\alpha)) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \left\| c_{i1} \quad \ldots \quad c_{ij} \quad \ldots \quad c_{in} \right\| = 0,$$

то другий рядок матриці (6)

$$\left\| c^{[1]}_{i1} \quad \ldots \quad c^{[1]}_{ij} \quad \ldots \quad c^{[1]}_{in} \right\| R^1(\alpha) + \left\| c_{i1} \quad \ldots \quad c_{ij} \quad \ldots \quad c_{in} \right\| R^1(\alpha) = 0.$$

Аналогічно показуємо, що $\left\| c^{[1]}_{i1} \quad \ldots \quad c^{[1]}_{ij} \quad \ldots \quad c^{[1]}_{in} \right\| = 0$. Міркуючи далі, отримаємо $N_{i\alpha} = S^{**}_{i\alpha}$. Розглянемо тепер блоки, що відповідають $a_{ij}(\alpha), b_{ij}(\alpha)$, які згідно зі щойно доведеним збігаються. Маємо:

$$a^{[\beta]}_{ij}(\alpha) = 0 = b^{(\beta)}_{ij}(\alpha),$$

що суперечить нашому припущенню. Теорему доведено.

Доведення теореми 1. Згідно з умовою теореми матричне рівняння $A(X) = 0$ має корінь, характеристична матриця якого має форму Сміта $\Phi(x)$. Тоді перетворювальні матриці $P(x)$, $P_1(x) = H(x)P(x)$, $H(x) \in \mathrm{G}_\Phi$ породжують відповідно корені

$$X_P = M^{-1}{}_{V(\mathrm{E},\Phi)P(x)}(\Phi)J(\Phi)M_{V(\mathrm{E},\Phi)P(x)}(\Phi), \tag{7}$$

$$X_{P_1} = M^{-1}{}_{V(\mathrm{E},\Phi)P_1(x)}(\Phi)J(\Phi)M_{V(\mathrm{E},\Phi)P_1(x)}(\Phi).$$

Останню рівність перепишемо так:

$$X_{P_1} = M^{-1}{}_{N(x)V(\mathrm{E},\Phi)P(x)}(\Phi)J(\Phi)M_{N(x)V(\mathrm{E},\Phi)P(x)}(\Phi).$$

Оскільки $\det M_{V(\mathrm{E},\Phi)P(x)}(\Phi) \neq 0$ і

$$M_{V(\mathrm{E},\Phi)P_1(x)}(\Phi) = M_{N(x)V(\mathrm{E},\Phi)P(x)}(\Phi) \neq 0,$$

то існує така неособлива матриця S, що

$$M_{N(x)V(\mathrm{E},\Phi)P(x)}(\Phi) = SM_{V(\mathrm{E},\Phi)P(x)}(\Phi).$$

Тоді

$$X_{P_1} = M^{-1}{}_{V(\mathrm{E},\Phi)P(x)}(\Phi)S^{-1}J(\Phi)SM_{V(\mathrm{E},\Phi)P(x)}(\Phi). \tag{8}$$

Згідно з умовою теореми $X_{P_1} = X_P$. Тоді з (7) та (8) випливає, що $SJ(\Phi) = J(\Phi)S$. На підставі теореми 2 це означає, що $N = V(\mathrm{E},\Phi)H(x)V^{-1}(\mathrm{E},\Phi) \in \mathrm{G}^*_\Phi$.

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1988. – 552 с.
2. *Зеліско В. Р., Щедрик В. П.* Матриця значень на системі коренів діагональних елементів матриці та її застосування // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 4. – С. 38–47.
3. *Казимирский П. С.* Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена // Укр. мат. журн. – 1980. – 32, № 4. – С. 483–498.
4. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
5. *Щедрик В. П.* Один клас дільників матриць над комутативною областю елементарних дільників // Мат. студії. – 2002. – 17, №. 1. – С. 23–28.
6. *Ingraham M. N.* Rational method in matrix equation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1941. – 47. – P. 61–70.
7. *Shchedryk V.* Factorization of matrices over elementary divisor domain // Algebra and Discrete Mathematics. – 2009. – No. 2. – P. 79–99.

КЛАССИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНЫХ ОДНОСТОРОННИХ УРАВНЕНИЙ ПО ПРЕОБРАЗУЮЩИМ МАТРИЦАМ ИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ

Исследованы решения односторонних матричных уравнений над алгебраически замкнутыми полями характеристики ноль в некотором трансцедентном расширении основного поля, которые порождены определенным множеством обратимых матриц. Установлены условия, когда корни, соответствующие различным обратимым матрицам из этого множества, совпадают.

Ключевые слова: *форма Смита, форма Жордана, преобразующие матрицы, группа Зелиско, матричные уравнения.*

CLASSIFICATION OF PARAMETRIC SOLUTIONS OF MATRIX ONE-SIDED EQUATIONS BY THE TRANSFORMING MATRICES OF THEIR CHARACTERISTIC MATRICES

The solutions of one-sided matrix equations over algebraically closed fields of characteristic zero in a certain transcendental extension of the main field, which are generated by a certain set of invertible matrices, are investigated. The conditions are established under which the roots corresponding to various invertible matrices from this set coincide.

Keywords: Smith normal form, Jordan normal form, transforming matrices, Zelisko group, matrix equations.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
20.06.18