

**ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАЦІЙНІ СХЕМИ РЕАЛІЗАЦІЇ
ВАРІАЦІЙНО-СІТКОВИХ МЕТОДІВ У ЗАДАЧАХ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО
ДЕФОРМУВАННЯ НЕОДНОРІДНИХ ТОНКОСТІННИХ КОНСТРУКЦІЙ**

Наведено проєкційно-ітераційні схеми реалізації варіаційно-сіткових методів (методів скінченних елементів і локальних варіацій) для розв'язування різних варіаційних задач механіки для пружних і пружно-пластичних тіл з включеннями та отворами. Вивчено взаємовплив отворів і включень на прикладах розв'язування задач пружно-пластичного деформування неоднорідних ізотропних пластин і циліндричних оболонок з різними отворами. Досліджено збіжність запропонованих схем, показано їх ефективність для зменшення витрат комп'ютерного часу розрахунків під час застосування на практиці.

Ключові слова: тонкостінні конструкції, неоднорідність, включення, отвори, пружно-пластичне деформування, метод скінченних елементів, метод локальних варіацій, проєкційно-ітераційні схеми.

Вступ. Задачі пружно-пластичного деформування механічних систем з різними неоднорідностями – конструкційними, технологічними або експлуатаційними (отвори, порожнини, тріщини, включення тощо) – відносять до задач механіки деформівного твердого тіла, які виникають у різних галузях сучасної техніки та промисловості.

Порушення суцільності, геометричні недосконалості (отвори, пори, тріщини) і різноманітні включення суттєво впливають на деформування і руйнування твердих тіл. Включення, зокрема накладки і підкріплення, змінюють жорсткість системи [13]. Ними моделюють мартенситні структури в аустенітному середовищі, що особливо притаманне матеріалам, які експлуатуються за криогенних температур [12, 17], а також смугастість феритно-перлітної структури в мікроструктурі металів, яка виникає за попереднього складного навантаження [10], та міжфазні дефекти.

Реальні процеси деформування твердих тіл і конструкцій часто супроводжуються появою у них пластичних деформацій, які можуть ініціювати початок руйнування. Порушення суцільності і включення є локальними концентраторами напружень, які за певних навантажень або умов експлуатації викликають недопустимі деформації або передчасне руйнування системи [1, 9, 20, 22–24]. Здебільшого осередки руйнування виникають у зоні пластичних деформацій. Тому важливо дослідити пружно-пластичне деформування структурно неоднорідних тіл та елементів конструкцій. Відшукати розв'язки задач міцності відповідних дво- і тривимірних механічних систем з урахуванням пластичних деформацій складно, бо для цього потрібні ефективні числові методи.

Кількість досліджень з цієї проблематики незрівнянно мала порівняно з публікаціями, де вивчено напружено-деформований стан (НДС) пружних неоднорідних тіл на основі аналітичних та аналітико-числових методів.

Використання аналітичних методів для розв'язування фізично нелінійних задач для неоднорідних тіл складної геометрії через громіздкість та неуніверсальність доволі обмежене, а іноді неможливе. Тому актуально розробити нові ефективні числові методи і розрахункові обчислювальні схеми та алгоритми, а також вдосконалити існуючі методики для визначення НДС складних неоднорідних конструкцій під час їх пружно-пластичного деформування, що дасть можливість суттєво зменшити витрати комп'ютерного часу [2–9, 20–24].

У праці [4] розроблені нові ефективні числові методики розв'язування задач пружно-пластичного деформування структурно-неоднорідних дво- і

* hart@ua.fm

тривимірних тонкостінних тіл скінченних розмірів і безмежних середовищ зі системою структур. Створені на їх основі розрахункові схеми, обчислювальні алгоритми і програмні засоби дають змогу досліджувати актуальні задачі механіки, які виникають під час розрахунків міцності неоднорідних конструкцій з різними геометричними, фізико-механічними параметрами, кількістю та розмірами отворів і включень. Результати розв'язаних задач для пластинчасто-оболонкових елементів конструкцій придатні для прогнозування безпечної роботи відповідних конструкцій у машинобудуванні, енергетиці, будівництві, аерокосмічній техніці тощо.

Нижче проаналізовані проекційно-ітераційні модифікації варіаційно-сіткових методів (методу скінченних елементів (МСЕ) та методу локальних варіацій (МЛВ)) розв'язування варіаційних задач для пружних і пружно-пластичних тіл з отворами і включеннями [4]. З їх допомогою досліджено НДС неоднорідних пластинчасто-оболонкових елементів конструкцій з різними отворами і включеннями. Приділено увагу збіжності та ефективності запропонованих схем для зменшення витрат комп'ютерного часу розрахунків.

1. Аналіз сучасного стану проблеми. На розвитку аналітичних і числових методів розрахунку НДС неоднорідних тіл, зокрема пластинчасто-оболонкових елементів конструкцій з отворами, включеннями і тріщинами, в тому числі з урахуванням пружно-в'язко-пластичних властивостей матеріалу, зосереджували увагу багато вітчизняних і закордонних учених [4]. Виділимо деякі знакові прізвища: О. А. Ільюшин [11], М. Я. Леонов, В. І. Моссаковський, В. В. Новожилов, Я. С. Підстригач [14], Г. С. Писаренко, Ю. М. Работнов, Г. М. Савін [15], D. C. Drucker, W. Koiter, W. Prager, O. C. Zienkiewicz [25].

Суттєве скорочення комп'ютерного часу розрахунків за використання сіткових методів (методу скінченних різниць (МСР), МСЕ) пов'язане зі створенням проекційно-ітераційних схем їх реалізації, основи яких закладені в працях вчених-математиків Л. В. Канторовича, М. О. Красносельського, В. І. Крилова, Г. І. Марчука, О. А. Самарського, В. В. Шайдурова, H. Gajewski, V. Hackbusch, R. Kluge та ін.

Застосовуючи проекційно-ітераційні схеми реалізації МСР і МСЕ для еліптичних крайових задач механіки деформівного твердого тіла, зокрема теорії пружності, виявили їх значні переваги над традиційними за обчислювальною швидкістю.

Під час аналізу суттєво неоднорідних напружених станів ефективний МЛВ, який у 1965 р. запропонував Ф. Л. Черноуський. Для вказаного класу задач він має низку переваг над іншими числовими методами: дає можливість розглядати різноманітні види навантаження та граничні умови, різну будову досліджуваних систем (для оболонково-пластинчастих структур – змінність жорсткості, отвори тощо). Однак, щоб розв'язати певні класи задач (наприклад, варіаційні, які зводять до лінійних крайових задач), потрібно більше часу для досягнення заданої точності.

Створивши ефективніші схеми реалізації МЛВ і МСЕ на основі ідеї проекційно-ітераційних методів, можна суттєво скоротити комп'ютерний час, що є актуальним для сучасної механіки деформівного твердого тіла, незважаючи на наявність ліцензійних пакетів прикладних програм. Дійсно, такі стандартні пакети програм скінченно-елементного аналізу дають можливість досліджувати різноманітні задачі динаміки і міцності неоднорідних конструкцій, але існують деякі особливості в їх використанні: вони визначають початковий і кінцевий етапи розрахунків, не дають можливості корегувати дані на проміжних етапах і потребують попередньої підготовки даних; як правило, дорогартісні. Тому розробка ефективних розрахункових схем на основі МСЕ (або МЛВ), які зменшують час комп'ютерних розрахунків і дають можливість втручатися в процес обчислень, викликає науковий і практичний інтерес, особливо під час проектувальних розрахун-

ків і відпрацювання конструкцій конкретних галузей техніки, коли необхідно виконувати велику кількість обчислень з корегуванням вихідних даних задачі.

В інженерній практиці найчастіше необхідно врахувати пластичне деформування матеріалу, що призводить до появи складних задач визначення НДС і несучої здатності конструкцій. Тому потрібні ефективні числові методи і алгоритми розв'язування нелінійних задач механіки деформівного твердого тіла, зокрема, для структурно-неоднорідних пружно-пластичних тіл з локальними концентраторами напружень. Такі обчислювальні схеми і методики можна побудувати, використовуючи ідеологію проекційно-ітераційних методів [4].

2. Загальна схема методів розв'язування варіаційних пружно-пластичних задач з нелінійним функціоналом. Ця схема, з одного боку, ґрунтується на співвідношеннях і методах деформаційної теорії пластичності [11], а з іншого – на варіаційно-сіткових методах дискретизації [19, 25] в поєднанні з ітераційними процесами [16].

Отже, розглянемо варіаційну задачу з нелінійним функціоналом $I[z]$, який заданий і обмежений знизу на множині Ω дійсного сепарабельного гільбертового простору H :

$$\inf_{z \in \Omega} I[z], \quad \Omega \subset H. \quad (1)$$

Застосовуючи метод пружних розв'язків (метод змінних параметрів пружності або метод додаткових навантажень), наближено замінимо функціонал задачі (1) послідовністю апроксимувальних функціоналів $I_n[z_n]$, які задані в підпросторах H_n простору H ($H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_n \subset \dots \subset H$), причому послідовність цих підпросторів є гранично щільною в H . Отже, варіаційну задачу (1) замінюємо послідовністю наближених варіаційних задач з квадратичними функціоналами:

$$\inf_{z_n \in \Omega_n} I_n[z_n], \quad \Omega_n \subset H_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

У підпросторах H_n , дотримуючись загальної теорії проекційно-ітераційних методів розв'язування операторних рівнянь у нормованих просторах [2], введемо лінійний неперервно обернений оператор Φ_n , для якого виконуються співвідношення $\Phi_n z_n = \mathcal{Z}_n$, $\Phi_n^{-1} \mathcal{Z}_n = z_n$ для усіх $z_n \in H_n$, $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{P}_n$, де \mathcal{P}_n – скінченновимірні простори, ізоморфні підпросторам $H_n \subset H$, та оператор $\bar{\Phi}_n$, який є розширенням Φ_n на весь простір H , тобто $\bar{\Phi}_n z = \mathcal{Z}_n$, $z \in H$.

Розв'язуємо кожну n -ну задачу (2), застосовуючи варіаційно-сіткові методи (МСЕ, МЛВ) на послідовності вкладених сіток, тобто для кожного n -го функціонала $I_n[z_n]$ будуємо послідовність функцій багатьох змінних $\mathcal{Y}_{nm}[\mathcal{Z}_n]$ ($m = 1, 2, \dots$; m – номер сітки). Таким чином, варіаційну задачу (1) для функціонала $I[z]$ замінюємо послідовністю задач умовної мінімізації:

$$\inf_{\mathcal{Y}_n \in \mathcal{Q}_n} \mathcal{Y}_{nm}[\mathcal{Z}_n], \quad \mathcal{Q}_n \subset \mathcal{P}_n \quad (n = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots), \quad (3)$$

де $\mathcal{Q}_n = \Phi_n \Omega_n$, $\Omega_n = \Omega \cap H_n$.

Загальна схема проекційно-ітераційної реалізації варіаційно-сіткових методів у поєднанні з методами пружних розв'язків ґрунтується на таких припущеннях:

- функціонали $I_n[\cdot]$ і $\mathcal{Y}_{nm}[\cdot]$ задовольняють умову

$$|I_n[\Phi_n^{-1}z_n] - \mathcal{I}_{nm}[z_n]| \leq \mathcal{O}_n, \quad z_n \in \mathcal{O}_n, \quad \mathcal{O}_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty; \quad (4)$$

– функціонали $I[\cdot]$ і $I_n[\cdot]$ та їх градієнти – умови

$$|I[\Phi_n^{-1}z_n] - I_n[\Phi_n^{-1}z_n]| \leq \beta_n, \quad z_n \in \mathcal{O}_n, \quad \beta_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty; \quad (5)$$

$$\|I'[\Phi_n^{-1}z_n] - I'_n[\Phi_n^{-1}z_n]\| \leq \mathcal{B}_n, \quad z_n \in \mathcal{O}_n, \quad \mathcal{B}_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty; \quad (6)$$

– множини Ω_n і \mathcal{O}_n пов'язані умовою близькості:

для будь-якого $z_n \in \Omega_n$ існує така послідовність $\{z_{nm}\}$, $z_{nm} \in \mathcal{O}_n$, що

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_n^{-1}z_{nm} = z_n; \quad (7)$$

– множини Ω і \mathcal{O}_n пов'язані умовою:

для будь-якого $z \in \Omega$ існує така послідовність $\{z_n\}$, $z_n \in \mathcal{O}_n$, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n^{-1}z_n = z. \quad (8)$$

Далі індекс m у $\mathcal{I}_{nm}[z_n]$ опускаємо, маючи на увазі, що мова йде про послідовність відповідних функцій багатьох змінних.

Нехай \mathcal{P}_n – простір векторів розмірності $N = N(n)$ з евклідовою метрикою. Задамо деяке початкове наближення $z_n^{(0)} = \{z_n^{(0)}, z_n^{(0)} \mathbf{K}, z_n^{(0)}\}$.

Побудувавши для функції $\mathcal{I}_n[z_n]$ (3) на множині $\mathcal{O}_n \subset \mathcal{P}_n$ декілька (k_n) наближень $z_n^{(k)}$ ($k=1,2,\dots,k_n$, $k_n \leq K$, K – деяке натуральне число) за методом поточної релаксації і взявши останнє з них за початкове наближення до розв'язку наступної задачі мінімізації функції $\mathcal{I}_{n+1}[z_{n+1}]$ на множині $\mathcal{O}_{n+1} \subset \mathcal{P}_{n+1}$, отримаємо послідовність наближень $\{\Phi_n^{-1}z_n^{(k_n)}\}$ до точки мінімуму z_n^* функціонала $I_n[z_n]$ (2) на $\Omega_n \subset H_n \subset H$: $z_n^{(k+1)} = \{z_n^{(k+1)}, z_n^{(k+1)} \mathbf{K}, z_n^{(k+1)}\}$, де $z_n^{(k+1)}$ визначаємо як розв'язок нерівності

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}_n[z_n^{(k+1)}, \mathbf{K}, z_n^{(k+1)}, z_n^{(k+1)}, z_n^{(k)}, \mathbf{K}, z_n^{(k)}] \leq \\ & \leq \mathcal{I}_n[z_n^{(k+1)}, \mathbf{K}, z_n^{(k+1)}, \mathcal{V}_i, z_n^{(k)}, \mathbf{K}, z_n^{(k)}] \end{aligned} \quad (9)$$

для таких всіх \mathcal{V}_i , що $(z_n^{(k+1)}, \mathbf{K}, z_n^{(k+1)}, \mathcal{V}_i, z_n^{(k)}, \mathbf{K}, z_n^{(k)}) \in \mathcal{O}_n$, $i=1,2,\mathbf{K},N$, $k=0,1,\mathbf{K},k_n-1$, $n=1,2,\mathbf{K}$; $z_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}^{-1}\Phi_n^{-1}z_n^{(k_n)}$, $z_n^{(0)} \in \mathcal{O}_n$.

Такі проекційно-ітераційні послідовності наближень $\{\Phi_n^{-1}z_n^{(k_n)}\}$ будемо для кожного номера n послідовності варіаційних задач (2) для функціоналів $I_n[z_n]$. За певних умов послідовність $\{z_n^*\}$, що складена з їх граничних точок, збігатиметься до розв'язку вихідної варіаційної задачі (1) для функціонала $I[z]$.

Теорема 1. *Нехай функціонали $I[z] \in C^1(\Omega)$, $I_n[z_n] \in C^1(\Omega_n)$ і $\mathcal{I}_n[z_n] \in C^1(\mathcal{O}_n)$ сильно опуклі, причому існує таке число $C > 0$, що $\mathcal{I}_n \geq C$, де \mathcal{I}_n – константа сильної опуклості $\mathcal{I}_n[z_n]$. Нехай, крім того, для $I_n[z_n]$ і $\mathcal{I}_n[z_n]$ виконана умова (4) і точка $z_n^* \in (\Omega_n)$ -апроксимувальною, тобто виконана умова (7).*

Тоді послідовність $\{\Phi_n^{-1}z_n^{(k_n)}\}$, де $z_n^{(k_n)}$ визначають за формулами (9), збігається до точки z_n^* мінімуму $I_n[z_n]$ на Ω_n . Якщо до того ж виконані умови (5), (6) і (8), то послідовність $\{z_n^*\}$ збігається до точки z^* мінімуму функціонала $I[z]$ на $\Omega \subset H$.

Крім того, за виконання умови

$$|\%_n[\bar{\Phi}_n z^*] - I[z^*]| \leq \%_n, \quad \%_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

де $\bar{\Phi}_n$ – оператор, який є розширенням Φ_n на весь простір H , послідовність $\{z_n^{(k_n)}\}$ збігається до $\bar{\Phi}_n z^*$.

Застосовуючи метод спряжених градієнтів до розв'язування кожної з задач (3) на $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n$, починаючи з деякого номера $n = N$, отримуємо такі формули для побудови проекційно-ітераційної послідовності $\{z_n^{(k_n)}\}$:

$$\begin{aligned} z_n^{(k+1)} &= z_n^{(k)} - \theta_n^{(k)} \rho_n^{(k)}, & z_{n+1}^{(0)} &= \Phi_{n+1} \Phi_n^{-1} z_n^{(k_n)}, \\ (k &= 1, 2, \mathbf{K}, k_n - 1; & n &= N, N+1, \mathbf{K}; & z_N^{(0)} &\in \mathcal{P}_N), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \rho_n^{(0)} &= \%_n[z_n^{(0)}], & \rho_n^{(k)} &= \%_n[z_n^{(k)}] - \theta_n^{(k)} \rho_n^{(k-1)} \\ (k &= 1, 2, \mathbf{K}, k_n; & n &= N, N+1, \mathbf{K}), \end{aligned}$$

де величини $\theta_n^{(k)}$, $\rho_n^{(k)}$ вибирали з умов

$$\theta_n^{(k)}(\rho_n^{(k)}) = \min_{\theta \geq 0} \mathcal{G}_n^{(k)}(\theta), \quad \mathcal{G}_n^{(k)}(\theta) \equiv \%_n[z_n^{(k)}] - \theta \rho_n^{(k)} \quad (11)$$

і

$$\theta_n^{(k)} = \begin{cases} (\%_n[z_n^{(k)}], \%_n[z_n^{(k-1)}] - \%_n[z_n^{(k)}]) / |\%_n[z_n^{(k-1)}]|^2, & k \in J_1^n, \\ 0, & k \in J_2^n, \end{cases} \quad (12)$$

а множини індексів J_1^n і J_2^n такі, що $J_1^n \cup J_2^n = \{0, 1, 2, \dots, k_n\}$, $0 \in J_2^n$. Залежно від вибору множин J_1^n і J_2^n можна отримати різні проекційно-ітераційні варіанти методу спряжених градієнтів.

Збіжність послідовності $\{z_n^{(k_n)}\}$ доведено за таких припущень: функціонали $I[z]$ і $\%_n[z_n]$ задовольняють умови близькості (4), (5) для всіх $z_n \in \mathcal{P}_n$ з $\alpha_n \rightarrow 0$, $\beta_n \rightarrow 0$, якщо індекс $n \rightarrow \infty$, причому $\sum_{n=N}^{\infty} \alpha_n < \infty$,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \beta_n < \infty, \quad \text{і за умови}$$

$$\|\%_n[z_n] - \bar{\Phi}_n I'[\Phi_n^{-1} z_n]\| \leq \mathcal{G}_n, \quad \mathcal{G}_n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (13)$$

послідовність підпросторів H_n гранично щільна в H , а простори H і \mathcal{P}_n пов'язані умовою (8).

Теорема 2. Нехай функціонали $I[z] \in C^1(H)$, $I_n[z_n] \in C^1(H_n)$, $\%_n[z_n] \in C^1(\mathcal{P}_n)$ є сильно опуклими, а також виконані умова Ліпшиця для

градієнта функціонала $I[z]$

$$\|I'[v] - I'[z]\| \leq L \|v - z\|, \quad z, v \in H, \quad L = \text{const} > 0,$$

умови близькості (4)–(8) і (13). Тоді за будь-якого вибору множини індексів J_1^n і J_2^n , $0 \in J_2^n$ і будь-якого початкового наближення $z_N^{(0)} \in \mathcal{H}_N$ послідовність $\{\Phi_n^{-1} z_n^{(k_n)}\}$, що задовольняє умови (10)–(12), збігається до точки z^* мінімуму функціонала $I[z]$, при цьому справедливі оцінки

$$\|\Phi_n^{-1} z_n^{(k_n)} - z^*\|^2 \leq 2\eta^{-1} (\alpha_n + \beta_n + (\gamma_n[z_n^{(0)}] - I^*) q_n^{k_n}),$$

$$0 \leq I[\Phi_n^{-1} z_n^{(k_n)}] - I[z^*] \leq \eta^{-1} \|I'[\Phi_n^{-1} z_n^{(k_n)}]\|^2,$$

$$\|\Phi_n^{-1} z_n^{(k_n)} - z^*\| \leq \eta^{-1} \|I'[\Phi_n^{-1} z_n^{(k_n)}]\|,$$

де

$$q_n = 1 - \left(\eta^3 / (2L_n(\eta^2 + L_n)) \right),$$

$$L_n = 2\alpha_n + CL_n, \quad \eta \geq C = \text{const} > 0, \quad 0 < q_n < 1,$$

η - константа сильної опуклості функціонала $I[z]$.

3. Застосування проекційно-ітераційних модифікацій варіаційно-сіткових методів (МСЕ, МЛВ) до розв'язування задач пружно-пластичного деформування тонких пластин з отворами і включеннями. Розглянемо вказані задачі для пластин з отворами і включеннями різних конфігурацій, розмірів, механічних властивостей, кількості і взаємного розташування за дії рівномірного одновісного навантаження; вивчимо закономірності лінійного і нелінійного деформування таких тіл за структурної неоднорідності матеріалу (пошкодження, включення, підкріплення, технологічні отвори тощо), виявили нові зв'язки між структурою матеріалу, характером зовнішнього впливу та процесами деформування, нові ефекти прогнозування поведінки таких тіл за різних механічних впливів, щоб передбачити неприпустимі деформації.

Розглянемо тонкі ізотропні прямокутні пластини зі сплаву Д16Т з одним або двома прямокутними, круговими та еліптичними отворами під дією рівномірного одновісного навантаження (розтяг/стиск), що призводить до появи пластичних деформацій.

У кожному наближенні методу змінних параметрів пружності під час визначення НДС пластини на основі проекційно-ітераційної модифікації МСЕ розв'язуємо неоднорідну задачу теорії пружності у варіаційному формулюванні, що пов'язано зі знаходженням мінімуму функціонала:

$$\gamma_n[u, v] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy - \int_{\Gamma_p} p v dx,$$

де u, v - проекції вектора переміщень на осі Ox і Oy ; Ω - область пластини; Γ_p - контур пластини, де прикладене навантаження p .

Розв'язок задачі про пружно-пластичне деформування прямокутної (квадратної) пластини $L \times L$ (L - безрозмірна величина) з одним отвором (прямокутним розміром $0.1L \times 0.1L$, або круговим радіусом $r = 0.05L$) за навантажень $20 \text{ МПа} \leq p \leq 180 \text{ МПа}$ отримали за допомогою проекційно-ітераційного варіанта МСЕ на послідовності семи вкладених вдвічі сіток із прямокутних лагранжевих чотиривузлових скінченних елементів у 46 разів

швидше, ніж на основі традиційних МСЕ та МСР (під час застосування однієї сітки). Результати добре узгоджуються з відомими [18] – відхилення не більше 3%, форми областей пластичних деформацій при цьому ідентичні.

Аналогічно досліджували НДС, а також умови виникнення і трансформації зон пластичних деформацій для пластин з двома прямокутними ($0.1L \times 0.1L$, $0.15L \times 0.15L$) і круговими ($r_1 = 0.05L$, $r_2 = 0.075L$) отворами різних розмірів за навантажень $20 \text{ МПа} \leq p \leq 180 \text{ МПа}$ та різних відстаней між центрами отворів l ($0.2L$; $0.25L$; $0.3L$; $0.35L$). Виявили, що у цьому випадку практична збіжність проекційно-ітераційного варіанта МСЕ майже в 32 рази швидша, ніж під час застосування традиційного МСЕ.

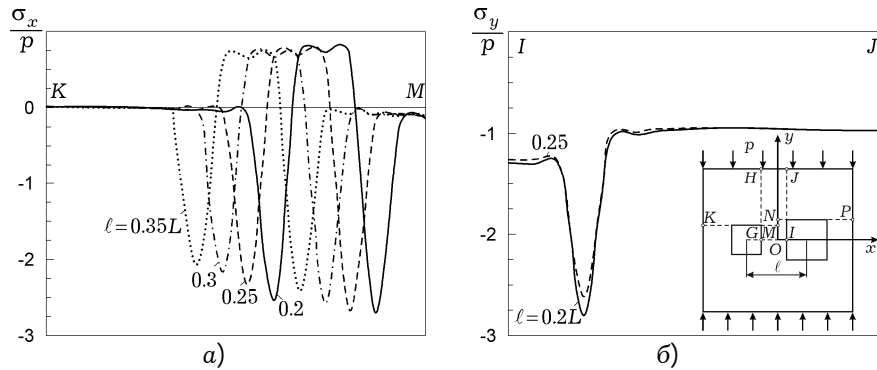


Рис. 1

Розподіл відносних напружень σ_x/p і σ_y/p у деяких перерізах пластин з прямокутними отворами для різних значень величини l при $p = 145 \text{ МПа}$ подано на рис. 1; розвиток зон пластичних деформацій для пластин з прямокутними і круговими отворами для різних відстаней l між центрами отворів зображено на рис. 2а – $l = 0.2L$ і рис. 2б – $l = 0.25L$.

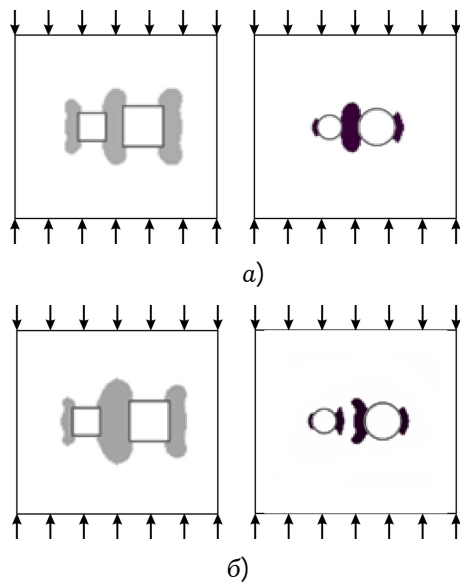


Рис. 2

За навантажень $p > 40 \text{ МПа}$ пластичні деформації виникають спочатку біля контурів більшого отвору, при цьому, якщо $p < 100 \text{ МПа}$, навколо кожного отвору розвиваються незв'язані області, які зі збільшенням навантаження або зменшенням відстані між центрами отворів зливаються, утворюючи загальну зону пластичних деформацій. Для кругових отворів цей процес відбувається дещо повільніше (рис. 2).

Аналогічні дослідження виконали для пластин з комбінаціями кругового ($r = 0.05L$; $0.075L$) та прямокутного ($0.1L \times 0.1L$; $0.15L \times 0.15L$) отворів різних розмірів за дії стисального навантаження $40 \text{ МПа} \leq p \leq 160 \text{ МПа}$ при $l = 0.15L$; $0.2L$; $0.25L$; $0.3L$.

На рис. 3а подано розподіл відносних напружень у вертикальному перерізі RQ пластини для $l = 0.25L$, $p = 130 \text{ МПа}$ (суцільні і штрихові лінії відповідають пластинам з більшим круговим і меншим прямокутним отво-

рами, і навпаки); рис. 3б, в ілюструють розвиток зон пластичних деформацій для $l = 0.25L$ при $p = 120$ і 130 МПа.

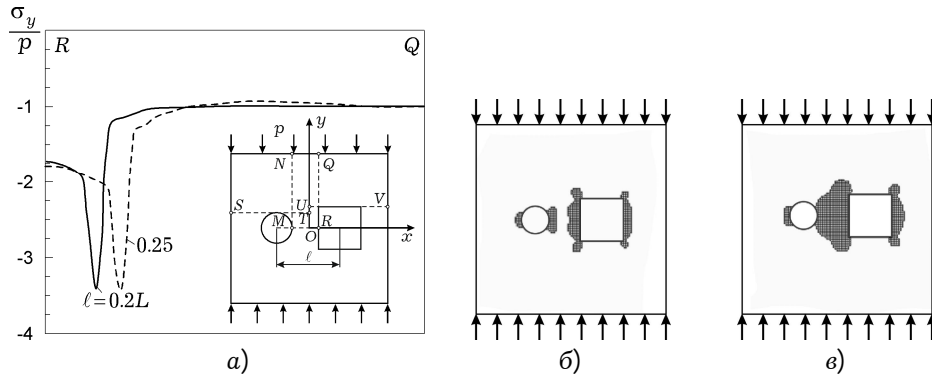


Рис. 3

Результати аналізу виникнення і трансформації зон пластичного деформування дали змогу знайти навантаження, за яких вони зникають: зі збільшенням відстані між отворами на 25 % зони пластичного деформування зливаються з підвищенням навантаження на ~ 10 %.

Для пластини з еліптичним (велика і мала півосі $a_1 = 0.1L$, $a_2 = 0.025L$) та круговим ($r = 0.05L$) отворами досліджено НДС залежно від відстані l між їх центрами ($0.1L$; $0.15L$; $0.2L$; $0.25L$) і зміни навантаження $20 \text{ МПа} \leq p \leq 180 \text{ МПа}$. На рис. 4 зображено зони пластичних деформацій при $l = 0.15L$, $p = 120$ МПа (рис. 4а) та при $p = 140$ МПа (рис. 4б), а також розподіл відносного напруження σ_y/p у вертикальному перерізі EF (рис. 4в) (лінії 1–3 відповідають значенням $p = 120$; 140 ; 160 МПа).

Пластичні деформації з'являються за навантажень $p > 25$ МПа біля еліптичного отвору, при цьому поява і розвиток зон пластичності біля кругового отвору суттєво залежить від відстані між центрами отворів.

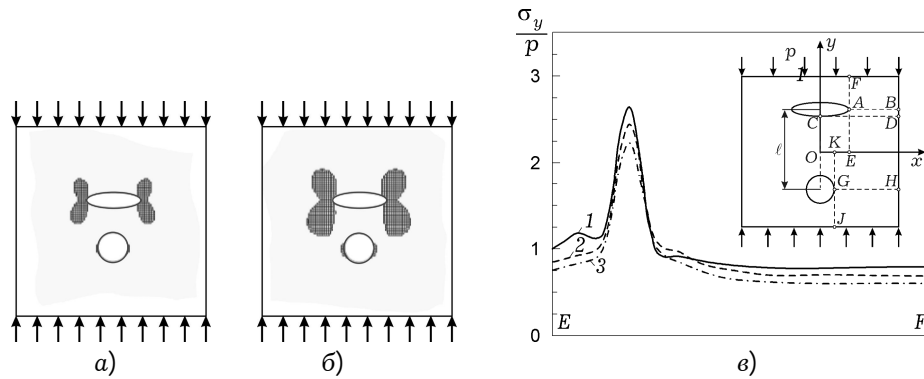


Рис. 4

На рис. 5 зображено зони пластичних деформацій у пластині при $p = 160$ МПа: а – $l = 0.1L$; б – $0.15L$; в – $0.2L$. За такого розташування зі збільшенням відстані між отворами за певного фіксованого рівня навантаження зони пластичних деформацій починають зростати насамперед біля кругового отвору і зникають з зонами, що з'явилися біля еліптичного отвору. Далі, зі збільшенням відстані між отворами, знову формуються незв'язані зони.

Розглянемо пластини з отворами і включеннями. Отвори в пластинах і оболонках суттєво змінюють їх реакцію на дію зовнішнього навантаження. Особливо важливо дослідити вплив підкріплень країв отворів на НДС пластинчасто-оболонкових елементів конструкцій. Для розв'язання відповідних задач необхідно вибрати геометричні параметри підкріплень і їх фізико-механічні властивості, які призводять до зменшення характеристик НДС.

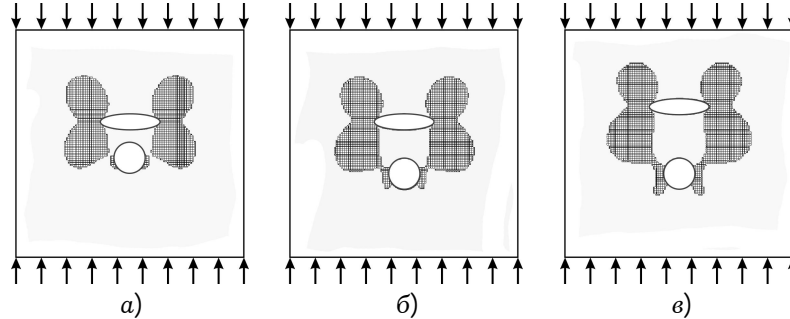


Рис. 5

Досліджували вплив різноманітних (Г-подібних, стрічкових, трикутних, округлих) кутових підкріплень прямокутних отворів та їх механічних характеристик на НДС пластини в зонах концентрації напружень.

На рис. 6 подано результати розрахунку НДС пружної однорідної ізотропної прямокутної пластини з прямокутним отвором під дією рівномірного одновісного стискального навантаження. Кутові підкріплення, що охоплюють краї отвору, моделювали включеннями (вставками) з іншого матеріалу такої ж товщини, як і пластини.

За плоского напруженого стану задачу зведемо до мінімізації функціонала:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_n[u, v] = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \left\{ 2\mu_1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} \left\{ 2\mu_2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy - \\ & - \int_{\Gamma} (p_x u + p_y v) d\gamma, \end{aligned}$$

де $\mu_1, \mu_2, \mu_1, \mu_2$ – сталі Ламе матеріалів пластини і включення відповідно; $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ – область визначення змінних x і y ; p_x, p_y – проекції вектора зовнішнього навантаження на осі Ox і Oy .

Розміри пластини $L \times L$, отвору $0.2L \times 0.2L$, включення (вставка): 1) $a = b = 0.1L$, $a_1 = b_1 = 0.05L$ (рис. 6а); 2) $a = 0.05L$, $b = 0.1L$, $a_1 = a/2$, $b_1 = b/2$ (рис. 6б); навантаження $p = 50$ МПа. На рис. 6 проілюстровано розподіл інтенсивності деформацій ϵ_i і відносних напружень σ_i/p у перерізі AB пластини: а – ϵ_i при $k=3$; б – σ_i/p при $k=3$; в – ϵ_i при $k=1/3$; г – σ_i/p при $k=1/3$. Штрихові лінії відповідають пластині без включень, суцільні і штрих-пунктирні – з включеннями (рис. 6а,б).

Розглянемо дві комбінації матеріалів пластини і включення, відносна жорсткість якого $k = G_{\text{вкл}}/G_{\text{пл}} = 3; 1; 1; 3$. Таке поєднання можливе, якщо, наприклад, розглядати сталь і алюміній або його сплави. Проекційно-ітераційний варіант МСЕ реалізували на шести вкладених вдвічі скінченно-

елементних сітках із прямокутних лагранжових елементів першого ступеня, при цьому час розрахунків скоротився майже в 30 разів, проти традиційного застосування МСЕ.

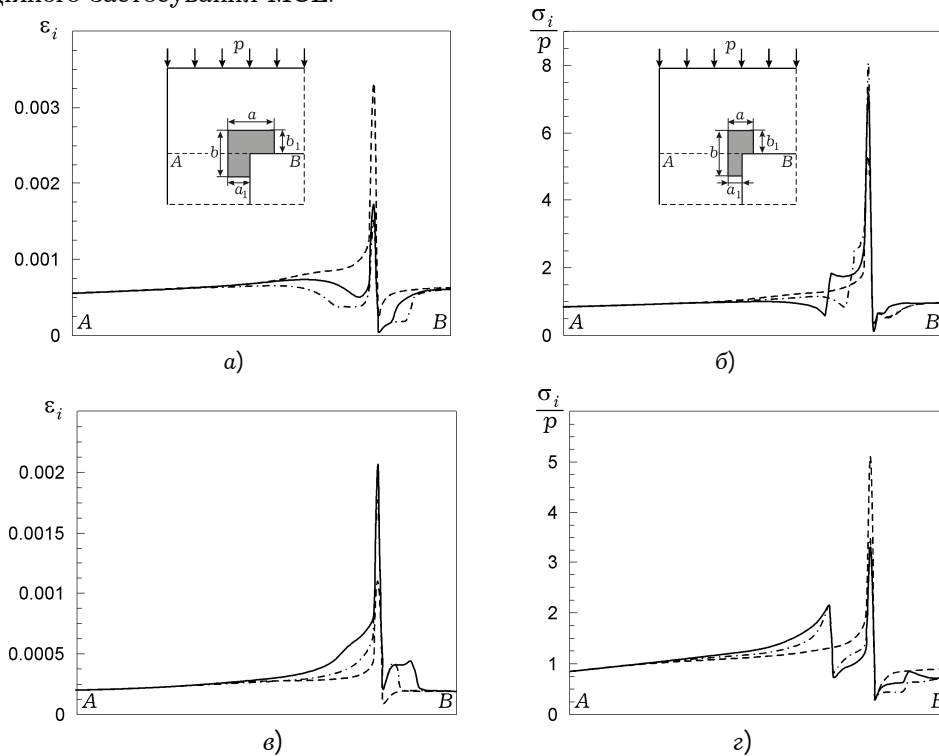


Рис. 6

Інтенсивність деформацій у місцях концентрації напружень у пластині за наявності жорсткіших включень зменшується (до ~30%), а напруження, навпаки, зростають. Цей ефект спостерігається для всіх розглянутих варіантів включень і підтверджується під час розв'язування задачі іншими числовими методами. Не зважаючи на деяке зростання напружень у місцях їх концентрації, жорсткіші включення підвищують жорсткість системи загалом.

Важливо, досліджуючи концентрацію НДС, вивчити зміну інтенсивності деформацій ε_i залежно від форми, розмірів включень і співвідношень модулів пружності матриці і включення. Зокрема, для багатьох пружно-пластичних матеріалів на діаграмі $\sigma_i : \varepsilon_i$ за пластичних деформацій різниця між умовною границею плинності σ_s і границею міцності σ_e незначна ($\sigma_e / \sigma_s \approx 1.2 \div 1.3$) порівняно з різницею між інтенсивністю деформацій ε_i , що визначає руйнування, і інтенсивністю деформацій ε_s , що відповідає умовній границі плинності σ_s (в 5 і більше разів). Тому доцільно вивчити інтенсивність деформацій ε_i під час визначення НДС тіл з локальними концентраторами напружень.

4. Застосування проєкційно-ітераційних модифікацій МСЕ до розв'язування задач пружно-пластичного деформування тонкостінних циліндричних оболонкових елементів конструкцій. Розглянемо оболонки з одним, двома та трьома отворами різної геометрії (прямокутної і кругової форми), різних розмірів і взаємним розташуванням за дії рівномірного одновісного стискального навантаження. Проаналізуємо обчислювальну ефективність цієї модифікації проти традиційного МСЕ (на одній сітці) та

верифікуємо результати розрахунків під час зіставлення їх з розв'язками деяких задач, отриманих іншими аналітичними або числовими методами. Вивчили закономірності нелінійного деформування таких структурно неоднорідних тіл, виявили нові ефекти, що дають змогу прогнозувати їх поведінку за різних механічних впливів і оцінювати їх несучу здатність, щоб запобігти передчасному руйнуванню елементів конструкцій.

Розглянемо однорідні ізотропні тонкостінні циліндричні оболонки з отворами за дії рівномірного стискального навантаження p , що викликає пластичні деформації. Для таких оболонок заздалегідь дослідили пружно-пластичну стійкість. Виявили, що критичні навантаження переважають ті, за яких вивчали НДС оболонок, тобто вони не втрачають стійкості.

Згідно зі загальною схемою проекційно-ітераційної модифікації МСЕ для розв'язування варіаційних задач пружно-пластичного деформування у поєднанні з методом послідовних наближень (1)–(3) у кожному наближенні методу змінних параметрів пружності розв'язували неоднорідну задачу теорії пружності для циліндричної оболонки, що пов'язано з мінімізацією функціонала потенціальної енергії деформації системи, який для геометрично лінійної теорії тонких оболонок має вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[u, v, w] = & \frac{h}{2} \int_{\Omega} \frac{\mu_0}{(1-\nu_0^2)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + 2\nu_0 \frac{\partial u}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{R} w \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{R} w \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (1-\nu_0) \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 \right] d\alpha d\beta + \frac{h^3}{24} \int_{\Omega} \frac{\mu_0}{(1-\nu_0^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right)^2 + 2\nu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right)^2 + 2(1-\nu_0) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 \right] d\alpha d\beta - \int_{\Gamma_p} (T_1 u + S_1 v + Q_1 w) d\beta, \end{aligned}$$

де u, v, w – переміщення точок серединної поверхні Ω оболонки в напрямку осей криволінійних координат α, β, ζ ; R, h – радіус і товщина циліндричної оболонки; Γ_p – границя оболонки, де діють крайові поздовжні T_1 , дотичні S_1 та поперечні Q_1 зусилля.

У деяких практичних випадках цей функціонал можна спростити і замість нього розглядати відповідний функціонал теорії пологих оболонок. Це доцільно, наприклад, під час розрахунків НДС оболонкових конструкцій ракетно-космічної техніки з отворами. Через геометричні параметри більшості таких елементів можна використовувати моделі теорії пологих оболонок для вивчення їх НДС у зоні концентрації напружень біля отворів.

Досліджували НДС циліндричних оболонок зі сплаву Д16Т з $R=L$, $h=0.004L$, довжиною $H=1.6L$ з одним отвором (прямокутним $0.4L \times 0.4L$ і круговим радіусом $r=0.2L$) за дії рівномірного стискального навантаження $10 \text{ МПа} \leq p \leq 70 \text{ МПа}$ (параметри H, R, h вибрали так, щоб деформування відбувалося за межами пружності). Проекційно-ітераційний варіант МСЕ реалізували на восьми вкладених удвічі скінченно-елементних сітках, починаючи з сітки 17×61 з прямокутних ермітових елементів, остання з яких містить більш ніж з 15 млн. елементів. Застосовуючи таку модифікацію, отримали розв'язок за 6 хв 40 с і зменшили час комп'ютерних розрахунків майже в 70 разів порівняно з традиційним МСЕ.

На рис. 7 зображено зони пластичних деформацій при $p=65 \text{ МПа}$ в проекції на площину розгортки оболонки з одним прямокутним (рис. 7а) і круговим (рис. 7б) отворами.

Досліджували пружно-пластичне деформування циліндричних оболонок з двома отворами (однаковими прямокутними з розмірами $0.4L \times 0.4L$ або круговими радіусом $r=0.2L$) за різних значень відстані l між їх центрами

($0.8L$; L ; $1.2L$), що дало змогу простежити їх взаємовплив. Геометричні і механічні характеристики оболонки такі ж, як у попередньому випадку.

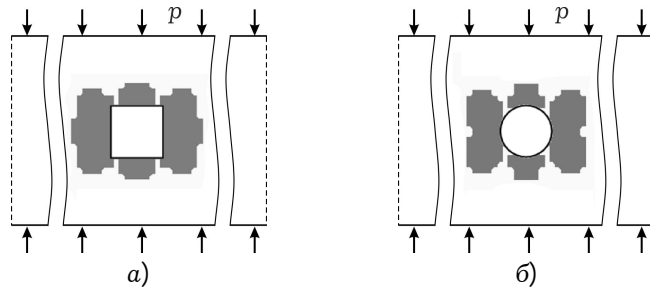


Рис. 7

На рис. 8а подано розподіл відносних напружень σ_α/ρ у перерізі QS оболонки з прямокутними отворами при $p = 65$ МПа для різних значень відстані l (суцільні і штрихові лінії відповідають $l = L$; $1,2L$), на рис. 8б – в перерізі GH для оболонки з круговими отворами. Результати дослідження виникнення і трансформації зон пластичних деформацій зі збільшенням навантаження p для різних значень l наведено відповідно на рис. 9а: $l = 0.8L$; рис. 9б: $l = L$; рис. 9в: $l = 1.2L$ і рис. 10а: $l = L$; рис. 10б: $l = 1,2L$ в проекції на площину розгортки оболонки.

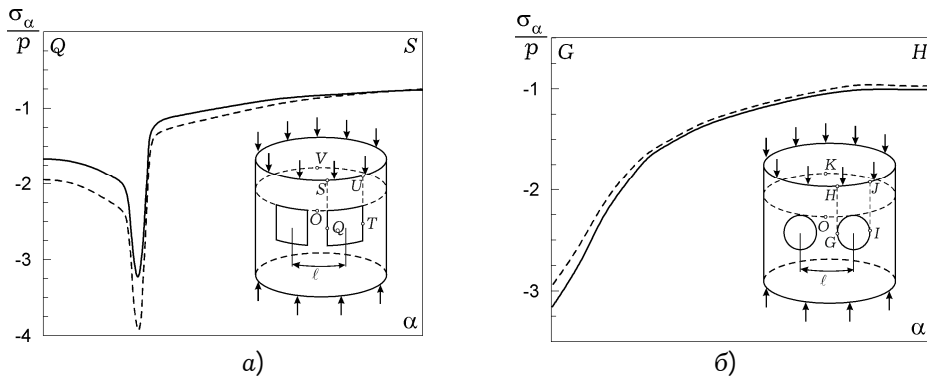


Рис. 8

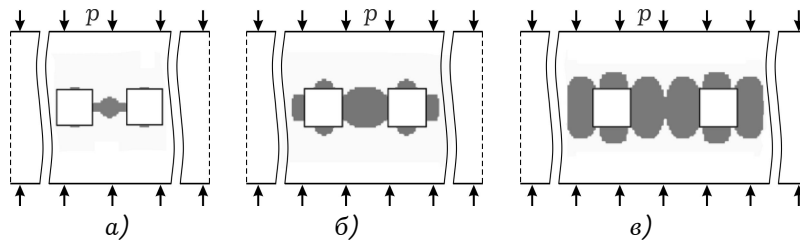


Рис. 9

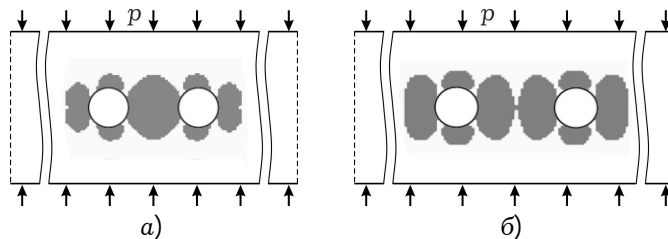


Рис. 10

Для оболонки з двома прямокутними отворами загальні зони пластичних деформацій з'являються раніше, ніж з круговими, але останнім притаманна дещо більша площа загальної пластичної зони між отворами за певних відстаней між їх центрами (рис. 9б і 10а).

Аналогічно досліджували оболонку з двома прямокутними отворами різних розмірів ($0.2L \times 0.2L$; $0.4L \times 0.4L$). Розподіл відносних напружень σ_α/ρ у вертикальному перерізі YZ оболонки подано на рис. 11а при $\rho = 80$ МПа і за різних значень відстані l між центрами отворів (суцільні і штрихові лінії $l = 0.8L$; $1.2L$ відповідно), а також проілюстровано розвиток зон пластичних деформацій при $\rho = 80$ МПа і за різних значень параметра l : $l = 0.8L$ (рис. 11б); $l = 1.2L$ (рис. 11в) у проекції на площину розгортки оболонки.

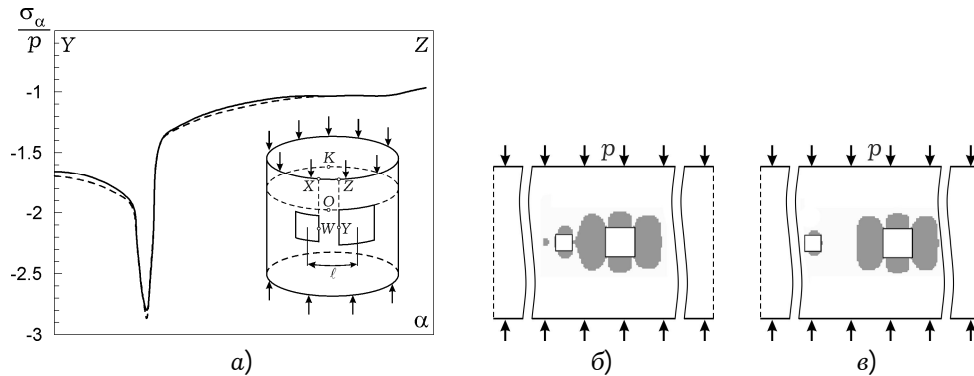


Рис. 11

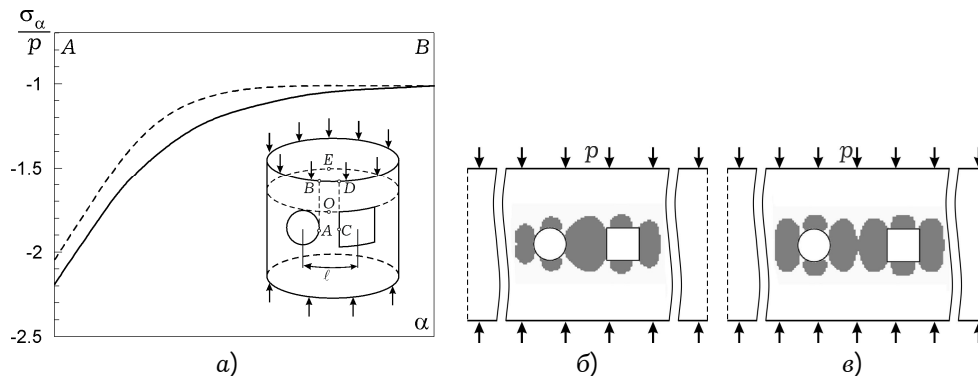


Рис. 12

Розглядали циліндричну оболонку з двома різними отворами – круговим радіусом $r = 0.2L$ і прямокутним $0.4L \times 0.4L$. На рис. 12а подано розподіл відносних напружень σ_α/ρ у вертикальному перерізі AB оболонки при $\rho = 85$ МПа для різних значень l (суцільні і штрихові лінії відповідають $l = L$; $1.2L$), а розвиток зон пластичних деформацій зі збільшенням рівня навантаження ілюструє рис. 12б: $\rho = 65$ МПа, $l = L$ і рис. 12в: $\rho = 85$ МПа, $l = 1.1L$.

Рис. 13 демонструє розвиток зон пластичних деформацій в оболонці з трьома прямокутними отворами ($0.4L \times 0.4L$, $0.2L \times 0.2L$, $0.4L \times 0.4L$) зі збільшенням навантаження і зменшенням відстані для: $\rho = 80$ МПа, $l = L$ (рис. 13а); $\rho = 85$ МПа, $l = 0.8L$ (рис. 13б). За навантаження $\rho = 85$ МПа зони пластичних деформацій зникають.

За трьох прямокутних отворів різних розмірів в оболонці змикання зон пластичності поліпшується, ніж коли їх два (див. рис. 9), для яких такі зони змикаються значно раніше (за меншого навантаження). Такий ефект зафіксували навіть для оболонки з двома круговими отворами (див. рис. 10) і комбінацією кругового і прямокутного (рис. 12). Водночас загальна площа областей пластичних деформацій для розглядуваних випадку є більшою (зона пластичних деформацій інтенсивніше охоплює прямокутні отвори з боків), а отже, області, де інтенсивність напружень велика, теж більші. Тому в кутах прямокутних отворів доцільно використовувати накладки або забезпечувати їх заокругленість.

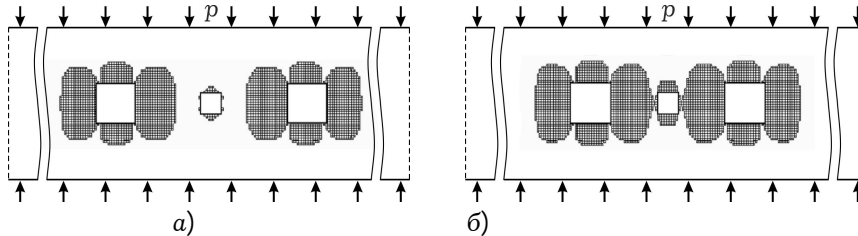


Рис. 13

Варіюючи розміри оболонок, отворів і відстані між їх центрами, можна досліджувати ступінь взаємовпливу отворів і прогнозувати небезпечні ситуації. За встановленими навантаженнями, коли зони пластичних деформацій змикаються, можна передбачати несучу здатність пластинчасто-оболонкових елементів конструкції. Починаючи з таких навантажень, суттєво зменшується жорсткість елемента конструкції. У цих випадках під час розрахунку НДС разом з модулем пружності використовують, як правило, дотичний або січний модулі, які менші за значеннями, що дає змогу враховувати падіння опору елементів конструкції дії навантаження.

Висновки. На основі створених ефективних проекційно-ітераційних модифікацій варіаційно-сіткових методів (методів скінчених елементів, локальних варіацій) і загальної методики дослідження фізично нелінійних задач механіки деформівного твердого тіла одержано розв'язки низки нових практично важливих задач пружно-пластичного деформування пластинчасто-оболонкових елементів конструкцій з отворами різних геометрії, кількості і розташування. За числової реалізації цих модифікацій суттєво скорочується комп'ютерний час розрахунків порівняно з традиційними варіаційно-сітковими методами МСЕ і МЛВ. В окремих випадках результати верифіковано на відомих розв'язках відповідних задач, отриманих іншими аналітичними або числовими методами, деякі з яких підтверджено експериментально.

Розроблені швидкозбіжні алгоритми розрахунку дають змогу ефективно досліджувати широкий спектр задач механіки деформування непружних неоднорідних тонкостінних конструкцій (різні форми і розміри отворів та включень, різні механічні характеристики матеріалу пластинчасто-оболонкових елементів та включень).

1. Вайнберг Д. В. Концентрация напряжений в пластинах около отверстий и выкружек. – Киев: Техніка, 1969. – 220 с.
2. Гарт Э. Л. Проекционно-итерационный вариант метода поточечной релаксации // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 4. – С. 70–79.
Те саме: Hart E. L. Projection-iterative version of the pointwise relaxation method // J. Math. Sci. – 2010. – 167, No. 1. – P. 76–88.
3. Гарт Э. Л. Конечноеэлементный анализ плоскодеформируемых сред с включениями // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2011. – 2, вип. 15 – С. 39–47.
4. Гарт Е. Л. Моделі та проекційно-ітераційні модифікації варіаційно-сіткових методів в задачах пружно-пластичного деформування структурно неоднорідних тіл: Дис. ... докт. фіз.-мат. наук. – Дніпро, 2017. – 354 с.

5. Гарт Э. Л., Гудрамович В. С. Применение проекционно-итерационной схемы метода локальных вариаций к решению задач устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций при локализованных воздействиях // Проблемы прочности. – 2018. – № 6. – С. 29–37.
6. Гарт Э. Л., Панченко С. В. Численный анализ напряжённо-деформированного состояния пластины с прямоугольным отверстием, подкреплённым треугольными накладками // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Дніпропетровськ: Ліра, 2015. – Вип. 24. – С. 35–47.
7. Гудрамович В. С., Гарт Е. Л., Марченко О. А. Вплив форми підкріплень на напружено-деформований стан циліндричної оболонки з видовженими прямокутними отворами // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Дніпро: Ліра, 2017. – Вип. 27. – С. 52–64.
8. Гудрамович В. С., Гарт Е. Л., Панченко С. В. Вплив смугових накладок на напружено-деформований стан пластины з видовженим прямокутним отвором // Техн. механіка. – 2018. – № 1. – С. 13–19.
9. Гудрамович В. С., Клименко Д. В., Гарт Э. Л. Влияние вырезов на прочность цилиндрических отсеков ракет-носителей при неупругом деформировании материала // Космічна наука і технологія. – 2017. – 23, № 6. – С. 12–20.
10. Гультаев В. И., Зубчанинов В. Г., Зубчанинов Д. В. Структурные изменения стали 45 в процессе деформирования // Изв. Тульск. гос. ун-та. Сер. Строит. материалы, конструкции и сооружения. – 2005. – Вып. 8. – С. 26–29.
11. Ильюшин А. А. Труды (1946–1966): в 4-х т. – Т. 2: Пластичность. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 480 с.
12. Коваль Ю. Н., Лободюк В. А. Деформационные и релаксационные явления при превращениях мартенситного типа. – Киев: Наук. думка, 2010. – 288 с.
13. Лизин В. Т., Пяткин В. А. Проектирование тонкостенных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1994. – 384 с.
14. Підстигач Я. С. Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
15. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 892 с.
16. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 592 с.
17. Солнцев Ю. П., Ермаков Б. С., Слепцов О. И. Материалы для низких и криогенных температур. – Санкт-Петербург: Химиздат, 2008. – 768 с.
18. Угодчиков А. Г., Коротких Ю. Г. Некоторые методы решения на ЭЦВМ физически нелинейных задач теории пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1971. – 220 с.
19. Черноуцько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. – Москва: Наука, 1973. – 238 с.
20. Gudramovich V. S., Gart E. L., Strunin K. A. Modeling of the behavior of plane-deformable elastic media with elongated elliptic and rectangular inclusions // Mat. Sci. – 2017. – 52, No. 6. – P. 768–774.
21. Hart E. L., Hudramovich V. S. Projection-iterative modification of the method of local variations for problems with a quadratic functional // J. Appl. Math. Mech. – 2016. – 80, No. 2. – P. 156–163.
22. Hart E. L., Hudramovich V. S. Projection-iterative schemes for the realization of the finite-element method in problems of deformation of plates with holes and inclusions // J. Math. Sci. – 2014. – 203, No. 1. – P. 55–69.
23. Hudramovich V., Hart E., Ryabokon' S. Elastoplastic deformation of nonhomogeneous plates // J. Eng. Math. – 2013. – 78, No. 1. – P. 181–197.
24. Hudramovich V. S., Hart E. L., Klymenko D. V., Rjabokon S. A. Mutual influence of openings on strength of shell-type structures under plastic deformation // Strength of Mat. – 2013. – 45, No. 1. – P. 1–9.
25. Zienkiewicz O. C., Morgan K. Finite elements and approximation. – New York: Wiley & Sons, 1983. – 328 p.

**ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ РЕАЛИЗАЦИИ
ВАРИАЦИОННО-СЕТОЧНЫХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Приведены проекционно-итерационные схемы реализации вариационно-сеточных методов (методов конечных элементов и локальных вариаций) для решения широкого круга вариационных задач механики для упругих и упругопластических

тел с включениями и отверстиями. Изучено взаимодействие отверстий и включений на примерах решения задач упругопластического деформирования неоднородных изотропных пластин и цилиндрических оболочек с различными отверстиями. Исследована сходимость предложенных схем, показана их эффективность для уменьшения затрат компьютерного времени.

Ключевые слова: тонкостенные конструкции, неоднородность, включения, отверстия, упругопластическое деформирование, метод конечных элементов, метод локальных вариаций, проекционно-итерационные схемы.

PROJECTIVE-ITERATIVE SCHEMES FOR THE IMPLEMENTATION OF VARIATIONAL-GRID METHODS IN THE PROBLEMS OF ELASTOPLASTIC DEFORMATION OF INHOMOGENEOUS THIN-WALLED STRUCTURES

Projective-iterative schemes for the implementation of variational-grid methods (finite element methods and local variations) for solution a wide range of variational mechanics problems for elastic and elastoplastic solids with inclusions and holes are given. The interaction of holes and inclusions with examples of solving problems of elastoplastic deformation of inhomogeneous isotropic plates and cylindrical shells with various holes is studied. The convergence of the proposed schemes is investigated, their effectiveness to reduce the cost of computer time calculations when applied in practice is shown.

Key words: thin-walled structures, inhomogeneity, inclusions, holes, elastoplastic deformation, finite element method, local variation method, projective-iterative schemes.

¹Дніпровськ. нац. ун-т

ім. О. Гончара, Дніпро,

²Ін-т техн. механіки НАН України

і Держ. косм. агентства України, Дніпро