УДК 539.3

Г. С. Кіт, Р. М. Андрійчук*

ФУНКЦІЇ БУССІНЕСКА ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРІВ З ДЖЕРЕЛОМ АБО ДИПОЛЕМ ТЕПЛА

Побудовано функції Буссінеска задач термопружності для півбезмежного простору із вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за нульової температури або теплоізоляції на ній під дією стаціонарного джерела або диполя тепла. Функції Ґріна, отримані з використанням функцій Буссінеска, можна використати для визначення термопружного стану півпростору, зумовленого тепловиділенням у паралельній до межі області або збуренням заданого теплового потоку паралельним до межі теплонепроникним тонким включенням.

***Ключові слова**: півпростір, джерело і диполь тепла, задача термопружності, функції Буссінеска, функції Ґріна.*

У працях [1–3] з використанням термопружних потенціалів переміщень і бігармонічних функцій Лява побудовані функції Ґріна задач термопружності для півпросторів з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за дії точкового стаціонарного джерела або диполя тепла. Метод функцій Лява зручний, коли термопружний потенціал переміщень виражений інтегралом Ганкеля. Якщо ж цей потенціал задано в явному вигляді, то зручніше користуватися функціями Буссінеска, вираженими через гармонічні функції.

У цій статті в замкнутому вигляді побудовано функції Буссінеска задач термопружності для півбезмежних тіл із вказаними вище крайовими умовами на межі.

1. **Формулювання задачі**. Розглянемо півпростір з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею, на якій підтримується нульова температура або теплоізоляція. Введемо циліндричну систему координат з початком на межі півпростору і віссю Oz, перпендикулярною до неї. На віддалі h від межі діє джерело або диполь тепла сталої потужності. У цій системі координат граничні умови для температури $t(r,z)$ при $z=0$ мають вигляд

$$t(r,z)\big|_{z=0}=0 \qquad \text{або} \qquad \left.\frac{\partial t(r,z)}{\partial z}\right|_{z=0}=0\,.$$

Механічні крайові умови подамо так:

– *для вільної межі*

$$\sigma_{zz}(r,0)=0, \qquad \sigma_{rz}(r,0)=0\,; \tag{1}$$

– *для жорстко закріпленої*

$$u_r(r,0)=0, \qquad u_z(r,0)=0\,; \tag{2}$$

– *для гладко закріпленої*

$$u_z(r,0)=0, \qquad \sigma_{rz}(r,0)=0\,; \tag{3}$$

– *для гнучко закріпленої*

$$u_r(r,0)=0, \qquad \sigma_{zz}(r,0)=0\,. \tag{4}$$

Температурне поле запишемо у вигляді:

від джерела тепла сталої потужності w

$$t_1(r,z)=\frac{w}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1(r,z)}+\frac{(-1)^k}{R_2(r,z)}\right);$$

---

* andriychukroman@gmail.com

від диполя тепла потужності γ

$$t_2(r,z)=\frac{\gamma}{4\pi}\left(\frac{z-h}{R_1^3(r,z)}-(-1)^k\frac{z+h}{R_2^3(r,z)}\right),$$

$$R_1(r,z)=\sqrt{r^2+(z-h)^2},\qquad R_2(r,z)=\sqrt{r^2+(z+h)^2}\ ,$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності; $k=1$ відповідає нульовій температурі межі тіла, а $k=2$ – її теплоізоляції.

Компоненти вектора переміщень і тензора напружень шукаємо у вигляді суми

$$u(r,z)=\bar{u}(r,z)+\bar{\bar{u}}(r,z),\qquad \sigma(r,z)=\bar{\sigma}(r,z)+\bar{\bar{\sigma}}(r,z)\ ,\tag{5}$$

де доданки $\bar{u}(r,z)$, $\bar{\sigma}(r,z)$ характеризують напружено-деформований стан безмежного тіла, а доданки $\bar{\bar{u}}(r,z)$, $\bar{\bar{\sigma}}(r,z)$ – переміщення і напруження у півпросторі $z\ge 0$, які забезпечують виконання граничних умов (1)–(4).

2. **Напружено-деформований стан безмежного тіла**. Зумовлені тепловим джерелом і диполем тепла переміщення і напруження у безмежному тілі визначає термопружний потенціал переміщень $f(r,z)$, який задовольняє рівняння Пуассона

$$\Delta f_i(r,z)=mt_i(r,z),\qquad m=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t,\qquad \mathrm{i}=1,2\ ,$$

де α_t і ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона. Частковим розв'язком цього рівняння є функції

$$f_1(r,z)=A_1[R_1(r,z)+(-1)^k R_2(r,z)],\qquad A_1=\frac{mw}{8\pi\lambda};$$

$$f_2(r,z)=-A_2\left[\frac{z-h}{R_1(r,z)}-(-1)^k\frac{z+h}{R_2(r,z)}\right],\qquad A_2=\frac{m\gamma}{8\pi}.$$

Компоненти вектора переміщень і тензора напружень

$$\bar{u}_r=\frac{\partial f_i}{\partial r},\qquad \bar{u}_z=\frac{\partial f_i}{\partial z},$$

$$\bar{\sigma}_{zz}=2G\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial z^2}-mt_i\right),\qquad \bar{\sigma}_{rz}=2G\frac{\partial^2 f_i}{\partial r\partial z},$$

$$\bar{\sigma}_{rr}=2G\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial r^2}-mt_i\right),\qquad \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}=2G\left(\frac{\partial f_i}{r\partial r}-mt_i\right),\tag{6}$$

де G – модуль зсуву.

Подані формули за нульової температури або теплоізоляції в площині $z=0$ описують також напружено-деформований стан півпростору з джерелом або диполем тепла, межа якого перебуває за нульової температури $(k=1)$ і закріплена гнучкою нерозтяжною плівкою ($u_r=0$, $\sigma_{zz}=0$, $\sigma_{rr}=0$, $\sigma_{\varphi\varphi}=0$), або теплоізольована $(k=2)$ і гладко закріплена ($u_z=0$, $\sigma_{rz}=0$).

3. **Визначення переміщень і напружень через функцію Буссінеска**. Переміщення $\bar{\bar{u}}(r,z)$ і напруження $\bar{\bar{\sigma}}(r,z)$ знайдемо за допомогою функції Буссінеска F, яку подамо як суму двох гармонічних функцій [5]:

$$F(r,z)=\varphi(r,z)+z\psi(r,z)\ ,$$

$$\bar{\bar{u}}_r=\frac{\partial F}{\partial r},\qquad \bar{\bar{u}}_z=\frac{\partial F}{\partial z}-4(1-\nu)\psi;$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz}=2G\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}-2(2-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right],\qquad \bar{\bar{\sigma}}_{rz}=2G\left[\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial z}-2(1-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial r}\right],$$

$$\overline{\overline{\sigma}}_{rr} = 2G\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - 2\nu\frac{\partial\psi}{\partial z}\right), \qquad \overline{\overline{\sigma}}_{\varphi\varphi} = 2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} - 2\nu\frac{\partial\psi}{\partial z}\right). \tag{7}$$

Згідно з формулами (5)–(7) запишемо переміщення і напруження у вигляді

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi + f_i + z\psi), \qquad u_z = -4(1-\nu)\psi + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi + f_i + z\psi),$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_{zz} = -2(1-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\varphi + f_i\right) + z\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - mt_i,$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_{rz} = -(1-2\nu)\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r\partial z}(\varphi + f_i) + z\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z},$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_{rr} = -2\nu\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\varphi + f_i) + z\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - mt_i,$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_{\varphi\varphi} = -2\nu\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\varphi + f_i) + \frac{z}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - mt_i. \tag{8}$$

З використанням виразів (8) побудову функцій Буссінеска за відомим термопружним потенціалом переміщень $f(r,z)$ зводимо до визначення гармонічних функцій φ і ψ у півпросторі.

Запишемо ці функції для різних крайових умов.

Джерело тепла.

Нульова температура на вільній межі:

$$\varphi(r,z) = 4A_1(1-\nu)h\ln\left[R_2(r,z) + z + h\right], \quad \psi(r,z) = \frac{2A_1 h}{R_2(r,z)}.$$

Нульова температура на жорстко закріпленій межі:

$$\varphi(r,z) = 0, \quad \psi(r,z) = -\frac{2A_1 h}{(3-4\nu)R_2(r,z)}.$$

Нульова температура на гладко закріпленій межі:

$$\varphi(r,z) = 2A_1 h\ln\left[R_2(r,z) + z + h\right], \quad \psi(r,z) = 0.$$

Теплоізольована вільна межа:

$$\varphi(r,z) = -2A_1(1-2\nu)\left\{z\ln\left[R_2(r,z) + z + h\right] - R_2(r,z)\right\},$$

$$\psi(r,z) = -2A_1\left\{\ln\left[R_2(r,z) + z + h\right] - \frac{h}{R_2(r,z)}\right\}.$$

Теплоізольована жорстко закріплена межа:

$$\varphi(r,z) = 2A_1\left\{z\ln\left[R_2(r,z) + z + h\right] - R_2(r,z)\right\},$$

$$\psi(r,z) = \frac{2A_1}{3-4\nu}\left\{\ln\left[R_2(r,z) + z + h\right] - \frac{h}{R_2(r,z)}\right\}.$$

Теплоізольована гнучко закріплена межа:

$$\varphi(r,z) = 2A_1\left\{z\ln\left[R_2(r,z) + z + h\right] - R_2(r,z)\right\}, \quad \psi(r,z) = 0.$$

Вирази для φ і ψ для задач (4.1) і (4.2) збігаються з наведеними у праці [6], а для задач (4.2) і (4.5) – у праці [4].

Диполь тепла.

Нульова температура на вільній межі:

$$\varphi(r,z) = 4A_2(1-\nu)\left\{\ln\left[R_2(r,z) + z + h\right] + \frac{h}{R_2(r,z)}\right\},$$

$$\psi(r,z)=2A_2\left[\frac{1}{R_2(r,z)}-\frac{h(z+h)}{R_2^3(r,z)}\right].$$

Нульова температура на жорстко закріпленій межі:

$$\varphi(r,z)=0\,,\quad \psi(r,z)=-\frac{2A_2}{(3-4\nu)}\left[\frac{1}{R_2(r,z)}-\frac{h(z+h)}{R_2^3(r,z)}\right].$$

Нульова температура на гладко закріпленій межі:

$$\varphi(r,z)=2A_2\left\{\ln\left[R_2(r,z)+z+h\right]+\frac{h}{R_2(r,z)}\right\},\quad \psi(r,z)=0\,.$$

Теплоізольована вільна межа:

$$\varphi(r,z)=\frac{2A_2h(1-2\nu)}{R_2(r,z)},\quad \psi(r,z)=-\frac{2A_2h(z+h)}{R_2^3(r,z)}.$$

Теплоізольована жорстко закріплена межа:

$$\varphi(r,z)=-\frac{2A_2h}{R_2(r,z)},\quad \psi(r,z)=\frac{2A_2h(z+h)}{(3-4\nu)R_2^3(r,z)}.$$

Теплоізольована гнучко закріплена межа:

$$\varphi(r,z)=-\frac{2A_2h}{R_2(r,z)},\quad \psi(r,z)=0\,.$$

4. **Тепловиділення або теплоізоляція у паралельній до межі півпростору області**. Співвідношення для переміщень і напружень, отримані з використанням функцій Буссінеска, є відповідними функціями Ґріна і придатні для визначення термопружного стану півпростору, зумовленого джерелами або диполями тепла, розподіленими в області S, розміщеній у паралельній до межі площині. Для цього необхідно перенести джерело і диполь тепла в точку $(\xi_1,\xi_2,0)$ декартової системи координат з початком в області S. У прямокутній системі координат $Ox_1x_2x_3$ напруження

$$\sigma_{11}=\sigma_{rr}\cos^2\varphi+\sigma_{\varphi\varphi}\sin^2\varphi,\quad \sigma_{22}=\sigma_{rr}\sin^2\varphi+\sigma_{\varphi\varphi}\cos^2\varphi,\quad \sigma_{33}=\sigma_{zz}\,,$$

$$\sigma_{12}=\frac{1}{2}(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi})\sin 2\varphi,\quad \sigma_{13}=\sigma_{rz}\cos\varphi,\quad \sigma_{23}=\sigma_{rz}\sin\varphi\,,$$

де

$$\cos\varphi=\frac{x_1-\xi_1}{r},\quad \sin\varphi=\frac{x_2-\xi_2}{r},\quad r=\left[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2\right]^{1/2}.$$

У формули для температури, переміщень і напружень слід підставити

$$R_1(r,z)=\sqrt{r^2+z^2},\qquad R_2(r,z)=\sqrt{r^2+(z+2h)^2}\,.$$

За відомими функціями Ґріна визначаємо температуру, переміщення і напруження, зумовлені розподіленими в області S джерелами тепла з інтенсивністю $w(\xi_1,\xi_2)$:

$$t^*(x_1,x_2,z)=\iint_S w(\xi_1,\xi_2)\,t(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2\,,$$

$$u_i^*(x_1,x_2,z)=\iint_S w(\xi_1,\xi_2)u_i(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2\,,$$

$$\sigma_{ij}^*(x_1,x_2,z)=\iint_S w(\xi_1,\xi_2)\sigma_{ij}(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2.$$

Відповідні формули знайдено для диполів тепла потужності $\gamma(\xi_1,\xi_2)$.

Висновки. Побудовано функції Буссінеска стаціонарних задач теплопровідності й термопружності для півпросторів із вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за нульової температури або теплоізоляції на ній за дії джерела або диполя тепла. З їх використанням знайдено функції Ґріна, придатні для дослідження напруженого стану півбезмежних тіл, зумовленого тепловиділенням або збуренням заданого теплового потоку в теплоізольованій області, розміщеній у паралельній до межі площині.

1. *Кіт Г. С., Андрійчук Р. М.* Вплив стаціонарного джерела тепла на напружений стан півпростору з жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 4. – С. 78–86.
   Те саме: *Kit H. S., Andriichuk R. M.* Influence of a Stationary Heat Source on the Stress State of a Half Space with Rigidly, Smoothly, or Flexibly Fastened Boundary // J. Math. Sci. – 2018. – 228, No. 2. – P. 91–104.
2. *Кіт Г. С., Андрійчук Р. М.* Термонапружений стан півпростору з вільною межею за теплоізоляції у паралельній до неї круговій області // Вісник Київськ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2017. – Вип. 3. – С. 79–82.
3. *Кіт Г. С., Андрійчук Р. М.* Термонапружений стан півпростору з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за теплоізоляції в області, розміщеній у паралельній до межі площині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – 60, № 4. – С. 111–123.
4. *Кіт Г. С., Андрійчук Р. М.* Термопружний стан півпростору із закріпленою межею за тепловиділення у паралельній до неї круговій області // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2017. – 53, № 3. – С. 98–104.
   Те саме: *Kit H. S., Andriychuk R. M.* Thermoelastic State of a Half Space with Fixed Boundary Under the Conditions of Heat Generation in a Circular Domain Parallel to the Boundary // Materials Science. – 2017. – 53, No. 3. – P. 398–406.
5. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
   Те саме: Nowacki, W. Thermoelasticity. – London: Pergamon Press, 1962.
6. *Wang Min-zhong, Huang Ke-fu.* Thermoelastic problems in the half space – An application of the general solution in elasticity // Appl. Math. Mech. – 1991. – 12, No. 9. – P. 849–862.

ФУНКЦИИ БУССИНЕСКА ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ИСТОЧНИКОМ ИЛИ ДИПОЛЕМ ТЕПЛА

Построены функции Буссинеска задач термоупругости для полубесконечного пространства со свободной, жестко, гладко или гибко закрепленной границей при нулевой температуре на ней или теплоизоляции при воздействии стационарного источника или диполя тепла. Функции Грина, полученные с использованием функций Буссинеска, можно использовать при определении термоупругого состояния полупространства, обусловленного тепловыделением в параллельной к его границе области или возмущением заданного теплового потока параллельным к границе теплонепроницаемым тонким включением.

Ключевые слова: *полупространство, источник и диполь тепла, задача термоупругости, функции Буссинеска, функции Грина.*

BOUSSINESQ'S FUNCTIONS OF THE 3D THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR HALF-SPACE AT THE ACTION OF A HEAT SOURCE OR THERMAL DIPOLE

At the action of a stationary heat source or thermal dipole, Boussinesq's functions of the thermoelasticity problems for half-space with free, rigidly, smoothly or flexibly fastened boundary, on which zero temperature or thermal insulation is given, are constructed. Green`s functions, derived by using Boussinesq's functions, can be used to determine thermoelastic state of the half-space caused by heat generation in a parallel to the boundary domain or perturbation of a given heat flux by heat-proof thin inclusion parallel to the boundary of a half-space.

Key words: *half-space, heat source and thermal dipole, thermoelasticity problem, Boussinesq's functions, Green`s functions.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
25.07.18