

## ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИЙ ГРАНИЧНИЙ СТАН НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ З ВНУТРІШНІМИ ТРІЩИНАМИ

З використанням аналога  $\delta_c$ -моделі задачу про напружений стан та граничну рівновагу неоднорідної оболонки обертання, послабленої внутрішньою тріщиною довільної конфігурації, на продовженні якої вузькою смугою розвиваються пластичні деформації, зведено до пружної задачі, а останню – до системи сингулярних інтегральних рівнянь з невідомими межами інтегрування і розривними функціями в правих частинах. Запропоновано алгоритм числового розв'язання таких систем сумісно з умовами пластичності тонких оболонок та умовами обмеженості напружень. Для виготовлених з функціонально-градієнтних матеріалів циліндричної та сферичної оболонок з внутрішньою параболічною тріщиною досліджено вплив навантаження, геометричних і механічних параметрів на розкриття тріщини та розміри пластичних зон.

**Ключові слова:** неоднорідні за товщиною оболонки обертання, внутрішні тріщини, гранична рівновага, пружно-пластичне деформування, функціонально-градієнтний матеріал, розкриття тріщини.

У сучасній техніці неоднорідні елементи конструкцій, зокрема тонкостінні, часто виготовляють з функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ), властивості яких неперервно змінюються за товщиною елемента, що дає можливість ефективно використовувати їх за дії на поверхню агресивних фізико-хімічних чинників [12]. Результати досліджень розподілів напружень у циліндричній та сферичній оболонках, а також у порожнистому циліндрі з ФГМ, зумовлених температурою або силовими навантаженнями, наведено в [11, 14–16].

Раніше авторами розглянуто випадки, коли поверхнева або внутрішня тріщини у неоднорідній за товщиною (ФГМ) циліндричній чи сферичній оболонках є обмежена лініями, паралельними до осей координат [2, 3, 6, 13]. Тут досліджено такого ж типу пружно-пластичну оболонку обертання, яка послаблена внутрішньою плоскою тріщиною довільної конфігурації.

**1. Постановка задачі.** Розглянемо неоднорідну за товщиною тонку безмежну оболонку обертання радіуса  $R$  постійної товщини  $2h$ . Серединну поверхню оболонки віднесено до ортогональної системи координат  $\alpha\beta\gamma$ . Оболонку послаблено поздовжньою чи поперечною внутрішньою плоскою тріщиною довільної конфігурації завдовжки  $2\ell_0$ . Глибину тріщини задано двома гладкими кривими  $d_1(x)$  і  $d_2(x)$ , де для поздовжньої тріщини  $x \equiv \alpha$ , а для поперечної –  $x \equiv \beta$ . Вважаємо тріщину глибокою:  $\min(d_1 + d_2) \leq 0.4h$ . Початок координат вибрано в центрі тріщини.

Вважаємо, що оболонку та береги тріщини, які при деформуванні не контактують, навантажено лише симетричними відносно площини тріщини зусиллями і моментами. Площу тріщини, зовнішні навантаження та властивості ФГМ вважаємо такими, що допускають виникнення та розвиток пластичних деформацій у вузьких смугах поблизу тріщини за всією товщиною оболонки. Поза цими зонами матеріал вважаємо пружним. Відповідно до аналога  $\delta_c$ -моделі Леонова – Панасюка – Дагдейла [2, 7] замінимо зони пластичних деформацій поверхнями розриву пружних переміщень і кутів повороту, а реакцію зон пластичних деформацій на пружний об'єм – відомими і невідомими зусиллями та моментами, що протидіють розкриттю

\* dyrector@iapmm.lviv.ua

тріщини і задовольняють певні умови пластичності тонких оболонок. Вважатимемо, що в пластичних зонах на продовженні тріщини вглибину до зовнішньої чи внутрішньої поверхні оболонки діють сталі напруження

$$\sigma_i^0 = \frac{1}{2}(\sigma_B^i + \sigma_T^i), \quad (1)$$

де  $i = 1, 2$  відповідно над і під тріщиною, а  $\sigma_B^i$  та  $\sigma_T^i$  – границя міцності та поріг текучості матеріалу оболонки. У пластичних зонах на продовженні тріщини за її довжиною діють невідомі нормальні зусилля  $N^i$  та згинальні моменти  $M^i$ ,  $i = 1, 2$ , які протидіють розкриттю тріщини та задовольняють певні умови пластичності тонких оболонок (рис. 1).

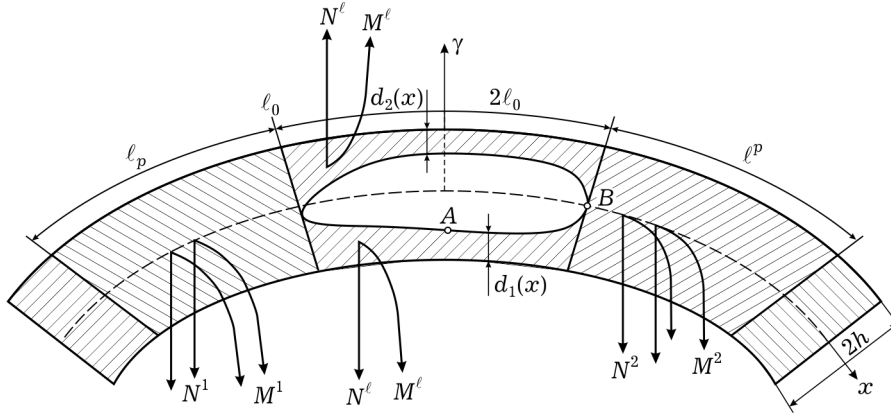


Рис. 1

Вважаємо, що матеріалу оболонки притаманне зміцнення, тому вимагатимемо, щоб  $N^i$  та  $M^i$  уздовж пластичних смуг були розподілені лінійно:

$$N^i(x) = O_i \left( (1 - m^*) \frac{|x| - x_0}{x_1 - x_0} + m^* \right),$$

$$M^i(x) = P_i \left( (1 - m^*) \frac{|x| - x_0}{x_1 - x_0} + m^* \right), \quad x_0 \leq |x| \leq x_1, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Тут  $m^* = \sigma_B / \sigma_T$ ;  $\sigma_B$ ,  $\sigma_T$  – відповідно інтегральні характеристики границі міцності та порога текучості на проміжку  $\gamma \in [-h, h]$ ;  $O_i$ ,  $P_i$  – невідомі сталі, які задовольняють прийнятну умову пластичності тонких оболонок, наприклад, умову пластичного шарніра Треска [10]

$$\left( \frac{O_i}{2h\sigma^*} \right)^2 + \frac{|P_i|}{h^2\sigma^*} = 1.$$

Тоді

$$\left( \frac{N^i(x)}{2h\sigma^*} \right)^2 + \frac{|M_i(x)|}{h^2\sigma^*} = 1,$$

де  $\sigma^*(x) = (\sigma_T - \sigma_B)(|x| - x_0)/(x_1 - x_0) + \sigma_B$ ,  $i = 1, 2$ , а відстань між нейтральним волокном і лінією серединної поверхні вздовж пластичної смуги є постійною.

Таким чином, у рамках прийнятого аналога  $\delta_c$ -моделі пружно-пластичну задачу про граничну рівновагу неоднорідної за товщиною оболонки обертання з внутрішньою тріщиною заданої довжини  $2l_0$  зведено до задачі про пружну рівновагу такої ж оболонки з фіктивною наскрізною тріщиною

невідомої довжини  $2\ell_1 = 2\ell_0 + \ell_p + \ell^p$ , до берегів якої прикладено зусилля та моменти

$$N_2(x) = \begin{cases} N_2^{(1)} + N^\ell - N_2^0, & |x| < \ell_0, \\ N^1 - N_2^0, & -\ell_p - \ell_0 \leq x \leq -\ell_0, \\ N^2 - N_2^0, & \ell_0 \leq x \leq \ell_0 + \ell^p, \end{cases}$$

$$M_2(x) = \begin{cases} M_2^{(1)} + M^\ell - M_2^0, & |x| < \ell_0, \\ M^1 - M_2^0, & -\ell_p - \ell_0 \leq x \leq -\ell_0, \\ M^2 - M_2^0, & \ell_0 \leq x \leq \ell_0 + \ell^p. \end{cases} \quad (3)$$

Тут  $\ell_p$  та  $\ell^p$  – довжини пластичних зон зліва та справа на продовженні тріщини;  $N^\ell$ ,  $M^\ell$  – нормальне зусилля та згинальний момент, які є реакцією матеріалу на розрив внутрішніх зв'язків над і під тріщиною і згідно з припущеннями про напруження у цих смугах визначені за формулами

$$N^\ell = \sigma^0 \int_{-h}^{d_1(x)} d\gamma + \sigma^0 \int_{d_2(x)}^h d\gamma, \quad M^\ell = \sigma^0 \int_{-h}^{d_1(x)} \gamma d\gamma + \sigma^0 \int_{d_2(x)}^h \gamma d\gamma;$$

$N_2^{(1)}$ ,  $M_2^{(1)}$  – зусилля та момент, прикладені до берегів реальної тріщини;  $N_2^0$ ,  $M_2^0$  – ці ж параметри основного напруженого стану на лінії тріщини в оболонці без тріщини.

**2. Основні співвідношення для неоднорідної за товщиною оболонки обертання з тріщиною.** Вважаємо, що модуль пружності  $E = E(\gamma)$  і коефіцієнт Пуассона  $\nu = \nu(\gamma)$  є функціями нормальної до серединної поверхні координати  $\gamma$  такими, що виконується узагальнений закон Гука та є справедливою гіпотеза Лява [1]. Для отримання системи ключових рівнянь, яка враховує наявність тріщини в оболонці обертання, подамо компоненти тензора малої деформації  $\{e_{ij}\}$  у вигляді

$$e_{ij} = e_{ij}^s + e_{ij}^0, \quad (4)$$

де  $e_{ij}$  – компоненти повної деформації, які задовольняють рівняння нерозривності деформацій [8]

$$\frac{\partial B x_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} x_1 - A \frac{\partial x_{12}}{\partial \beta} + k_1 \left( -\frac{\partial B \varepsilon_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_1 + A \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \beta} \right) = 0,$$

$$A \frac{\partial x_1}{\partial \beta} - \frac{\partial B x_{12}}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} x_{12} + k_2 \left( -A \frac{\partial B \varepsilon_1}{\partial \beta} + \frac{\partial B \varepsilon_{12}}{\partial \alpha} + \frac{k_1}{k_2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_{12} \right) = 0,$$

$$k_2 x_1 + k_1 x_2 - \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{A} \left( -\frac{\partial B \varepsilon_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_1 + \frac{1}{2} A \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{B} \left( -A \frac{\partial B \varepsilon_1}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial B \varepsilon_{12}}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_{12} \right) \right) = 0;$$

$e_{ij}^s$  – компоненти тензора пружної деформації, пов'язані з напруженнями  $\sigma_{ij}$  за допомогою узагальненого закону Гука:  $e_{11}^s = (\sigma_{11} - \nu(\gamma)\sigma_{22})/E(\gamma)$ ,  $e_{22}^s = (\sigma_{22} - \nu(\gamma)\sigma_{11})/E(\gamma)$ ,  $e_{12}^s = 2(1 + \nu(\gamma))\sigma_{12}/E(\gamma)$ ,  $e_{13}^s = e_{23}^s = e_{33}^s = 0$ ;  $\sigma_{33} = 0$ ;  $e_{ij}^0$  – компоненти вільної від напружень деформації, несумісність яких

зумовлює напруження  $\sigma_{ij}$ ;  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\alpha_{ij}$  – компоненти деформації серединної поверхні;  $k_1$ ,  $k_2$  – головні кривини серединної поверхні;  $A$ ,  $B$  – коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні оболонки.

Подамо  $e_{ij}^0$  через компоненти вільної від напружень деформації  $\varepsilon_{ij}^0$  та  $\alpha_{ij}^0$  серединної поверхні оболонки:

$$e_{ij}^0 = \varepsilon_{ij}^0 + \gamma \alpha_{ij}^0, \quad (5)$$

Підставивши (4), (5) у рівняння рівноваги оболонок обертання отримаємо систему рівнянь рівноваги в переміщеннях:

$$L_{ij}(u_i) = F_j(\varepsilon_{ij}^0, \alpha_{ij}^0), \quad (6)$$

де  $L_{ij}$ ,  $F_j$  – диференціальні оператори не вище четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами;  $u_i$  – переміщення серединної поверхні.

Враховуючи, що при переході через тріщину компоненти переміщень мають стрибки, а компоненти зусиль та моментів є неперервними функціями,  $\varepsilon_{ij}^0$  та  $\alpha_{ij}^0$  виражено через стрибки переміщень і кутів повороту. Побудувавши фундаментальний розв'язок системи ключових рівнянь (6) і використавши операцію згортки, отримаємо інтегральне подання переміщень чи напружень через фундаментальний розв'язок і стрибки узагальнених переміщень. Тоді з вимоги виконання умови (3) отримаємо систему нелінійних сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) з невідомими межами інтегрування і правими частинами, які є розривними функціями та містять невідомі зусилля і моменти, що діють у пластичних зонах. Тому систему СІР розв'язуємо сумісно з умовами пластичності (2), умовами обмеженості зусиль і моментів біля фіктивної тріщини та умовами однозначності переміщень. Алгоритм аналітично-числового розв'язання таких систем наведено в [2]. Якщо ж фундаментальний розв'язок системи (6) є невідомим, то побудуємо його з використанням числового методу [5].

Для циліндричної оболонки з наскрізною поздовжньою тріщиною завдовжки  $2\ell_1$  система ключових рівнянь (6) має вигляд

$$L_{ij}u_i = q_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Тут

$$\begin{aligned} L_{11} &= C_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad L_{12} = L_{21} = \left( C_{11} - C_{66} + \frac{K_{11}}{R} \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}, \\ L_{13} &= L_{31} = C_{12} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{K_{11}}{R} \left( \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right), \\ L_{22} &= \left( C_{11} + \frac{1}{R} \left( 2K_{11} - \frac{1}{R} D_{11} \right) \right) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \left( C_{66} + \frac{1}{R} \left( 2K_{66} + \frac{4}{R} D_{66} \right) \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \\ L_{23} &= L_{32} = \left( C_{11} + \frac{K_{11}}{R} \right) \frac{\partial}{\partial \beta} - \\ &\quad - \frac{1}{R} \left( K_{11} + \frac{D_{12} + 4D_{66}}{R} \right) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} - \frac{1}{R} \left( K_{11} + \frac{D_{11}}{R} \right) \frac{\partial^3}{\partial \beta^3}, \\ L_{33} &= C_{11} - \frac{2}{R} \left( K_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + K_{11} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + \frac{1}{R^2} D_{11} \nabla^2 \nabla^2, \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad q_1 = R \frac{\partial}{\partial \alpha} (C_{12} \varepsilon_{22}^0 + K_{12} \alpha_{22}^0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_2 &= \frac{\partial}{\partial \beta} (RC_{12} + K_{11})\varepsilon_{22}^0 + (RK_{11} + D_{11})\varkappa_{22}^0, \\
q_3 &= R(C_{11}\varepsilon_{22}^0 + K_{11}\varkappa_{22}^0) - \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (K_{12}\varepsilon_{22}^0 + D_{12}\varkappa_{22}^0) - \\
&\quad - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (K_{11}\varepsilon_{22}^0 + D_{11}\varkappa_{22}^0), \\
C_{ij} &= \int_{-h}^h B_{ij}(\gamma) d\gamma, \quad K_{ij} = \int_{-h}^h B_{ij}(\gamma) \gamma d\gamma, \quad D_{ij} = \int_{-h}^h B_{ij}(\gamma) \gamma^2 d\gamma, \\
B_{11}(\gamma) &= \frac{E(\gamma)}{1 - \nu^2(\gamma)}, \quad B_{12}(\gamma) = \nu(\gamma)B_{11}, \quad B_{66}(\gamma) = \frac{E(\gamma)}{2(1 + \nu(\gamma))}, \\
\varepsilon_{22}^0 &= \frac{1}{R} [u_2(\alpha)] \delta(\beta), \quad \varkappa_{22}^0 = -[\theta_2(\alpha)] \delta(\beta), \tag{8}
\end{aligned}$$

$[u_2(\alpha)]$ ,  $[\theta_2(\alpha)]$  – стрибки переміщення і кута повороту,  $\delta(z)$  – функція Дірака. При цьому формули для визначення збурених нормального зусилля та згинального моменту отримано у вигляді

$$\begin{aligned}
N_2 &= \frac{C_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \left( C_{11} + \frac{K_{11}}{R} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \\
&\quad + \frac{1}{R} \left( C_{11} + \frac{1}{R} \left( K_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + K_{11} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \right) u_3 - \\
&\quad - \frac{1}{R} \left( C_{11} + \frac{K_{11}}{R} \right) \varepsilon_{22}^0 - \frac{1}{R^2} K_{11} \varkappa_{22}^0, \\
M_2 &= \frac{K_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \left( K_{11} + \frac{D_{11}}{R} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \\
&\quad + \frac{1}{R} \left( K_{11} + \frac{1}{R} \left( D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + D_{11} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \right) u_3 - \\
&\quad - \frac{1}{R^2} D_{11} \varkappa_{22}^0 - \frac{1}{R} \left( K_{11} + \frac{D_{11}}{R} \right) \varepsilon_{22}^0. \tag{9}
\end{aligned}$$

Для поперечної тріщини в системі (7) слід замінити  $L_{ij}$  та  $q_j$ , співвідношення (8) замінити на відповідні

$$\varepsilon_{11}^0 = \frac{1}{R} [u_1(\beta)] \delta(\alpha), \quad \varkappa_{11}^0 = -\frac{1}{R} [\theta_1(\beta)] \delta(\alpha),$$

а замість виразів (9) для  $N_2$  та  $M_2$  записати аналогічні вирази для  $N_1$ ,  $M_1$ .

У випадку сферичної оболонки з фіктивною наскрізною тріщиною довжини  $2\ell_1$  система ключових рівнянь для функції напружень  $\varphi(x, y)$  та прогину  $w(x, y)$ , отримана за допомогою методу дисторсій тонких оболонок [9], набуде вигляду

$$\begin{aligned}
\frac{B}{\ell_1^2} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{d_{22}}{\ell_1^2} \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{R} \nabla^2 w &= -F_1^0(x, y), \\
\frac{A}{\ell_1^2} \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{d_{22}}{\ell_1^2} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{1}{R} \nabla^2 \varphi &= -AF_2^0(x, y). \tag{10}
\end{aligned}$$

Тут  $A$ ,  $B$ ,  $d_{22}$  виражено через  $E(\gamma)$  та  $v(\gamma)$ , а  $F_1^0(x, y)$ ,  $F_2^0(x, y)$  – через функції стрибка переміщення  $[v(x)]$  і кута повороту  $[\theta_2(x)]$ .

**3. Інтегральні рівняння задачі.** Розв'язуючи систему диференціальних рівнянь (7) операторним методом [8] і враховуючи (8), для визначення переміщень  $u_i$  отримаємо

$$u_i = L_i \varphi_2 + P_i \psi_2, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

де  $L_i$ ,  $P_i$  – диференціальні оператори, не вище сьомого порядку [4], а функції  $\varphi_2(\alpha, \beta)$ ,  $\psi_2(\alpha, \beta)$  задовольняють рівняння

$$D\varphi_2 = \varepsilon_{22}^0, \quad D\psi_2 = x_{22}^0. \quad (12)$$

Тут

$$D = D^0 + \frac{4R}{d_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( (C_{11}K_{66} - C_{66}K_{11}) \nabla^2 \nabla^2 + RC_{66}(C_{11} - K_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right),$$

$$d_1 = C_{11}D_{11} - K_{11}^2, \quad D^0 = \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2.$$

На основі побудованого за допомогою інтегрального перетворення Фур'є фундаментального розв'язку рівнянь (12) та операції згортки запишемо інтегральне подання ключових функцій [2]:

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y) &= \frac{1}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{\delta_{0n}}{2} \right) \cos(ny) \times \\ &\quad \times \int_{-x_1}^{x_1} [u_2(\xi)] [\Phi_n^0(\xi - x) - \Phi_n^*(\xi - x)] d\xi, \\ \psi_2(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{\delta_{0n}}{2} \right) \cos(ny) \times \\ &\quad \times \int_{-x_1}^{x_1} [\theta_2(\xi)] [\Phi_n^0(\xi - x) + \Phi_n^*(\xi - x)] d\xi. \end{aligned} \quad (13)$$

Тут

$$\Phi_n^*(z) = \Phi_n(z) - \Phi_n^0(z),$$

$$\Phi_n^0(z) = \frac{|z|^7}{2 \cdot 7!}, \quad \Phi_n^0(z) = \frac{1}{96n!} e^{-n|z|} (n^3 |z|^3 + 15n|z| + 15), \quad n \geq 1,$$

$\Phi_n(z)$  – фундаментальний розв'язок рівняння

$$\begin{aligned} &\left( \frac{d^8}{dx^8} - (4n^2 - A) \frac{d^6}{dx^6} + (6n^2 - 2An^2 + B) \frac{d^4}{dx^4} - \right. \\ &\quad \left. - n^4(4n^2 - A) \frac{d^2}{dx^2} + n^8 \right) \Phi_n(z) = \delta(z), \end{aligned}$$

$$A = 4R \frac{C_{11}K_{66} - C_{66}K_{11}}{D_{11}C_{11} - K_{11}^2}, \quad B = 4R^2 \frac{C_{66}(C_{11} - C_{66})}{D_{11}C_{11} - K_{11}^2}, \quad \delta_{0n} - \text{символ Кронекера.}$$

Підставляючи співвідношення (13) у формули (11), а результат – у (9), отримаємо інтегральні подання для визначення нормального зусилля і згинального моменту в довільній точці оболонки. Вимагаючи виконання умов типу (3), задачу зведемо до розв'язування системи нелінійних СІР

$$\sum_{j=1-\alpha_1}^2 \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} F_j(\xi) K_{ij}^*(\xi - x) d\xi = f_i(x), \quad |x| < x_1, \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned}
F_1(\xi) &= \frac{1}{R} \frac{d}{d\xi} [u_2(\xi)], & F_2(\xi) &= a^2 \frac{d}{d\xi} [\theta_2(\xi)], \\
K_{11}^*(z) &= -\frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{\xi - x}{2} + K_{11}^0(x, \xi), \\
K_{22}^*(z) &= a_2 \operatorname{cth} \frac{\xi - x}{2} + K_{22}^0(x, \xi), \\
K_{12}^*(x, \xi) &= K_{21}^*(x, \xi) = K_{12}^0(x, \xi), \\
f_1 &= \frac{4\pi N_2(x)}{C_{11}(1 - \mu^2)}, & f_2 &= \frac{4\pi M_2(x)}{Ra^2 C_{11}(1 - \mu^2)}, \\
a^2 &= \frac{D_{11}}{R^2 C_{11}(1 - \mu^2)}, & a_2 &= 3 - 2\eta - \eta^2, & \mu &= \frac{C_{12}}{C_{11}}, & \eta &= \frac{D_{12}}{D_{11}},
\end{aligned}$$

$K_{ij}^0(\xi - x)$  – неперервні функції для всіх значень аргументу  $z \in [-2x_1, 2x_1]$ .

Розв'язки системи СІР (14) повинні задовольняти умови

$$\int_{-x_1}^{x_1} F_m(\xi) d\xi = 0, \quad m = 1, 2, \quad (15)$$

які забезпечують неперервність переміщень  $u_2$  і кута повороту  $\theta_2$  у вершинах тріщини і впливають зі співвідношення (7). Крім цього, зусилля і моменти біля тріщини повинні бути обмеженими. Для цього достатньо, щоб відповідні коефіцієнти інтенсивності дорівнювали нулеві:

$$K_N(-\ell_1) = K_N(\ell_1) = K_M(-\ell_1) = K_M(\ell_1) = 0. \quad (16)$$

Проінтегрувавши розв'язок системи (14), розкриття тріщини у довільній її точці визначаємо за формулою

$$\delta(x, \gamma) = [u_2(x)] + \gamma[\theta_2(x)], \quad |x| < x_1, \quad |\gamma| \leq h.$$

Таким чином, для розв'язання задачі потрібно побудувати розв'язок системи СІР (14) з умовами (15), (16) та умовами пластичності (2). Цей розв'язок можна будувати одним з числових методів. При цьому необхідно врахувати, що праві частини системи (14) мають розриви в точках  $x = \pm \ell_0$ , у яких числові методи дають найбільшу похибку [2]. Тому подамо розв'язок системи СІР у вигляді

$$F_i(\xi) = h_i(\xi) + \Psi_i(\xi), \quad (17)$$

де  $h_i(\xi)$  – розв'язок канонічних рівнянь [2]

$$\int_{-x_1}^{x_1} \frac{h_i(\xi)}{\xi - x} d\xi = f_i(x),$$

які розв'язуємо методом обернення інтегралів типу Коші.

Підставивши (17) в (14), отримаємо систему інтегральних рівнянь типу (12) для визначення  $\Psi_i(\xi)$ , але з неперервною правою частиною. Таку систему можна розв'язати чисельно, зокрема, методом механічних квадратур.

Аналогічно вчинимо з ключовою системою рівнянь (10) для сферичної оболонки, фундаментальний розв'язок якої побудовано за допомогою подвійного перетворення Фур'є. На основі цього розв'язку отримаємо інтегральне подання зусиль і моментів та, задовольнивши граничні умови типу (1), – систему нелінійних сингулярних інтегральних рівнянь такої ж структури, як для циліндричної оболонки. Тому розв'язок отриманої системи можна знайти аналогічно як для системи (14).

**4. Числові результати.** Розглянемо сферичну оболонку  $h/R = 0.01$ ,  $\sigma_B/\sigma_T = 1.5$ ,  $\ell_0/h = 10$  під дією внутрішнього тиску  $p$ ,  $N_2^0 = Rp/2$ ,  $M_2^0 = 0$ . Оболонку виготовлено з ФГМ так, що на зовнішній її поверхні є алюміній ( $E_a = 70$  ГПа), а на внутрішній – германій ( $E_g = 151$  ГПа). Модуль пружності  $E(\gamma)$  змінюється з товщиною за законом [15]

$$E(\gamma) = (E_a - E_g)V + E_g, \quad V = \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^m, \quad \xi = \frac{\gamma}{2h},$$

а коефіцієнт Пуассона  $\nu(\gamma) = \text{const} = 0.3$ . Береги реальної параболічної тріщини є вільними від навантаження:  $N_2^{(1)} = M_2^{(1)} = 0$ , а її глибину задаємо формулами

$$d_1(x) = \frac{\ell_1^2}{\ell^2} \left( h - \frac{d'_1}{2} - \frac{d'_2}{2} \right) x^2 - h + d'_1,$$

$$d_2(x) = -\frac{\ell_1^2}{\ell^2} \left( h - \frac{d'_1}{2} - \frac{d'_2}{2} \right) x^2 + h - d'_2,$$

де  $d'_1$ ,  $d'_2$  – найменша відстань від тріщини відповідно до внутрішньої і зовнішньої поверхонь оболонки. Нехай  $d'_1 = 0.1h$ ,  $d'_2 = 0.2h$ ,  $\sigma_{T1}/\sigma_T = 0.9$ ,  $\sigma_{B1}/\sigma_B = 0.8$ ,  $\sigma_{T2}/\sigma_T = 1.1$ ,  $\sigma_{B2}/\sigma_T = 1.2$ . Очевидно, що тоді  $\ell_p = \ell^p$  і  $N^1 = N^2$ ,  $M^1 = M^2$ ,  $O_1 = O_2$ ,  $P_1 = P_2$ .

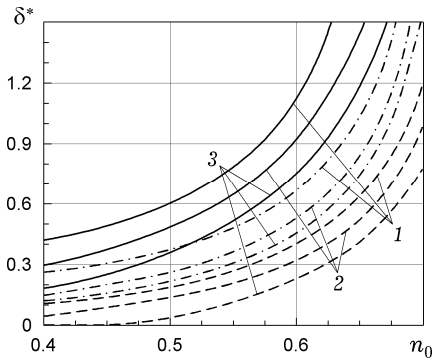


Рис. 2

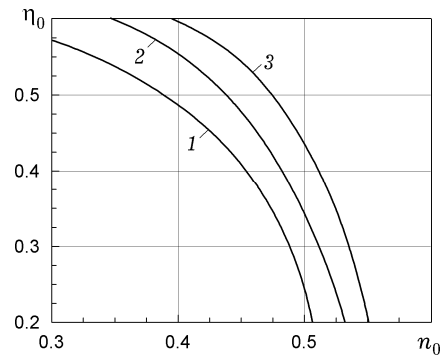


Рис. 3

На рис. 2 наведено залежність відносного розкриття тріщини  $\delta^* = \delta(x, \gamma)E_B / (\ell_0\sigma_T)$  від відносного навантаження  $n^0 = Rp / (4h\sigma_T)$ . Результати співставлено з аналогічними для прямокутної тріщини [3] глибини  $2h - d'_1 - d'_2$ . Суцільні лінії на рис. 2 відповідають точці **A**, штрихові – точці **B**, штрихпунктирні – точці **B** для прямокутної тріщини. Тут же проілюстровано випадок нескінченної циліндричної оболонки з такого ж ФГМ під дією внутрішнього тиску інтенсивності  $p$  ( $N_2^0 = Rp$ ,  $M_2^0 = 0$ ). Оболонку ослаблено внутрішньою параболічною поздовжньою чи поперечною тріщиною. Інші параметри такі самі, як і для сферичної оболонки. Криві, позначені цифрою **1**, відповідають сферичній оболонці, **2** – циліндричній з поздовжньою тріщиною, **3** – циліндричній оболонці з поперечною тріщиною.

На рис. 3 показано залежність відносної довжини пластичної зони  $\eta_0 = \ell_0 / \ell_1$  від  $n^0$ . Тут розмір геометричних і механічних параметрів і позначення на рисунку такі ж, як і на рис. 2.



**Висновки.** У роботі показано, що якщо за критерій руйнування взяти критерій критичного розкриття тріщини, то руйнування сферичної оболонки з ФГМ для розглянутих геометричних і механічних параметрів і навантаження почнеться на продовженні тріщини вглибину, тобто в точці А. Закон розподілу модуля пружності  $E(\gamma)$  за товщиною оболонки незначно впливає на її граничний стан на відміну від відношення його граничних значень  $E_a/E_g$ . Врахування зміцнення ФГМ призводить до зменшення  $\delta^*$  та  $\eta_0$  до 10%.

Числовий аналіз показав, що в циліндричній оболонці з аналогічними поздовжньою тріщиною і геометричними та механічними параметрами відносне розкриття тріщини  $\delta^*$  та відносна довжина пластичної зони  $\eta_0$  мають таку саму якісну залежність від навантаження, але кількісно на 8–12% (для поперечної тріщини – на 15–18%) менші, ніж у сферичній.

Дослідження виконано частково за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
2. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: Сполом, 2003. – 320 с.
3. Кушнір Р. М., Николишин Т. М., Ростун М. Й. Гранична рівновага неоднорідної за товщиною сферичної оболонки з поверхневою тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – 43, № 3. – С. 5–11.  
Те саме: Kushnir R. M., Nykolishyn T. M., Rostun M. I. Limiting equilibrium of a spherical shell nonuniform across the thickness and containing a surface crack // Mater. Sci. – 2007. – 43, № 3. – P. 291–299.  
<https://doi.org/10.1007/s11003-007-0034-z>.
4. Николишин М. М. Напряженное состояние многослойной цилиндрической оболочки с системой параллельных разрезов // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1985. – Вып. 22. – С. 85–89.
5. Николишин М., Зарицький С. Алгоритм числового дослідження граничної рівноваги конічної оболонки з тріщиною // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Під заг. ред. І. О. Луковського, Г. С. Кита, Р. М. Кушніра. – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – С. 131–132.
6. Николишин Т. М., Ростун М. Й. Напружений стан і гранична рівновага неоднорідної за товщиною сферичної оболонки з двома поверхневими тріщинами // Мат. методи та фіз.-мех. поля – 2009. – 52, № 4. – С. 166–172.  
Те саме: Nykolishyn T. M., Rostun M. Yo. Stress state and limiting equilibrium of a spherical shell nonuniform across the thickness and containing two surface cracks // J. Math. Sci – 2011. – 174, No. 3. – P. 331–340.  
<https://doi.org/10.1007/s10958-011-0302-1>.
7. Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1991. – 416 с.
8. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1961. – 212 с.
9. Підстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М. Метод дисторсій в теорії тонких оболонок с тріщинами // Мат. методи и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 29–41.
10. Прагер В. Проблемы теории пластичности. – Москва: Физматгиз, 1958. – 136 с.
11. Kim K. S., Noda N. Green's function approach to unsteady thermal stresses in an infinite hollow cylinder of functionally graded material // Acta Mech. – 2002. – 156, No. 3-4. – P. 145–161. – <https://doi.org/10.1007/BF01176753>.
12. Koizumi M. The concept of FGM // In: Ceramic Transactions. Vol. 34: Functionally Graded Materials / J. B. Holt, M. Koizumi, T. Hirai, Z. A. Munir (eds.). – Westerville: American Ceramic Society, 1993. – P. 3–10.
13. Kushnir R. M., Nykolishyn M. M., Rostun M. Yo. Limit equilibrium of inhomogeneous shells of revolution with internal cracks // In: Proc. 14th Int. Conf. Fracture / E. E. Gdoutos (ed.) (Rhodes, Greece, June 18–23, 2017). – ICF14. Vol. 1. – P. 316–317. – <https://www.icfweb.org/Proc/ICF14/Vol1/316>.

14. Obata Y., Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material // J. Therm. Stresses. – 1994. – **17**, No. 3. – P. 471–487. – <https://doi.org/10.1080/01495739408946273>.
15. Ruhi M., Angoshtari A., Naghdabadi R. Thermoelastic analysis of thick-walled finite-length cylinders of functionally graded materials // J. Therm. Stresses. – 2005. – **28**, No. 4. – P. 391–408. – <https://doi.org/10.1080/01495730590916623>.
16. Shao Z. S., Fan L. F., Wang T. J. Analytical solutions of stresses in functionally graded circular hollow cylinder with finite length // Key Eng. Mater. – 2004. – **261-263**. – P. 251–256. – <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.261-263.651>.

#### УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С ВНУТРЕННИМИ ТРЕЩИНАМИ

С использованием аналога  $\delta_c$ -модели задача о напряженном состоянии и предельном равновесии неоднородной оболочки вращения, ослабленной внутренней трещиной произвольной конфигурации, на продолжении которой узкой полосой развиваются пластические деформации, сведена к упругой задаче, а последняя – к системе сингулярных интегральных уравнений с неизвестными пределами интегрирования и разрывными функциями в правых частях. Предложен алгоритм численного решения таких систем совместно с условиями пластичности тонких оболочек и условиями ограниченности напряжений. Для изготовленных из функционально-градиентных материалов цилиндрической и сферической оболочек с внутренней параболической трещиной исследовано влияние нагрузки, геометрических и механических параметров на раскрытие трещины и размеры пластических зон.

**Ключевые слова:** неоднородные по толщине оболочки вращения, внутренние трещины, предельное равновесие, упруго-пластическое деформирование, функционально-градиентный материал, раскрытие трещины.

#### ELASTO-PLASTIC LIMITING STATE OF INHOMOGENEOUS SHELLS OF REVOLUTION WITH INTERNAL CRACKS

By making use of the  $\delta_c$ -model analogue, a problem on the stressed state and limit equilibrium of an inhomogeneous shell of revolution, weakened by an internal crack of arbitrary configuration with account for plastic deformations developing on the crack elongation in the form of a narrow strip, is reduced to an elastic problem. The latter problem is then reduced to a system of singular integral equations with unknown integration limits and discontinuous functions in the right-hand parts. The algorithm for numerical solution of such systems along with plasticity conditions of thin shells and conditions of stress boundedness is suggested. The effect of loading, as well as geometric and mechanical parameters on the crack opening displacement and sizes of plastic zones is studied for cylindrical and spherical shells made of functionally graded materials and containing internal parabolic crack.

**Key words:** with-respect-to-the-thickness inhomogeneous shells of revolution, internal cracks, limit equilibrium, elastic-plastic deformation, functionally graded materials, crack opening displacement.