

**НЕЗВ'ЯЗАНА КВАЗИСТАТИЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ДВОШАРОВОГО ПОРОЖНИСТОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ЦИЛІНДРА ЗА УМОВ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ**

Визначено залежне від радіальної координати неусталене температурне поле і зумовлений ним і зовнішніми силовими навантаженнями термопружний стан у двошаровому порожнистому термочутливому циліндрі. Нелінійну крайову задачу теплопровідності з розривними коефіцієнтами інтегро-інтерполяційним методом зведено до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь, яку розв'язано чисельно. Напружений стан визначено з інтегральних рівнянь другого роду та інтегральних умов, отриманих безпосереднім інтегруванням задачі квазістатичної термопружності у напруженнях. Досліджено вплив температурної залежності теплофізичних і механічних характеристик шарів матеріалів на величину і характер розподілу температури та зумовлених нею напружень у двошаровому циліндрі.

**Ключові слова:** двошаровий порожнистий циліндр, термочутливість, нелінійна крайова задача, методи обчислень, інтегро-інтерполяційний метод, термопруження.

**Вступ.** Визначення впливу залежності від температури (термочутливості) термомеханічних характеристик матеріалів на термопружний стан елементів конструкцій, що перебувають в умовах високотемпературного нагрівання, має важливе значення при прогнозуванні їх міцності та довговічності. Дослідження статичного чи квазістатичного термопружного стану у термочутливих суцільних і кусково-однорідних циліндрах за врахування температурної залежності теплофізичних і механічних характеристик проводилось у роботах [1, 3, 7, 10, 11]. Незв'язана статична задача термопружності в переміщеннях з відомим розподілом температури для кусково-неоднорідних термочутливих тіл з циліндричними поверхнями поділу розв'язана із застосуванням методу функції Гріна у [8]. Аналіз літератури показує, що розв'язки незв'язаних квазістатичних задач термопружності для термочутливих кусково-однорідних циліндрів отримано в переважній більшості на основі температурних полів, знайдених аналітично-чисельними методами за сталих теплофізичних характеристик матеріалів чи матеріалів з простою нелінійністю (коефіцієнт теплопровідності та об'ємна теплоємність матеріалу залежать від температури, а їх відношення – коефіцієнт температуропровідності незначно змінюється зі зміною температури і приймається за сталу величину) [5]. Зокрема, в роботі [6] запропоновано аналітично-чисельну методику побудови розв'язку такої нелінійної крайової задачі теплопровідності для циліндра з покриттям. Значно ускладнюється визначення розподілу температурного поля, що є одним з етапів розв'язання задачі термопружності, коли враховується залежність від температури усіх теплофізичних характеристик матеріалів і розглядається конвективний теплообмін. У таких випадках для знаходження розв'язків переважно використовують методи послідовних наближень, метод збурень [4] або чисельні методи [9].

У цій роботі пропонується підхід до чисельного дослідження нестационарної нелінійної крайової задачі теплопровідності з розривними коефіцієнтами для безмежного порожнистого двошарового циліндра з урахуванням залежності від температури коефіцієнта теплопровідності, об'ємної теплоємності та коефіцієнта температуропровідності. При цьому нелінійними є: рівняння теплопровідності, задані умови конвективного теплообміну на

---

\* galynaharmatiy@gmail.com

обмежувальних поверхнях та умова рівності теплових потоків на межі контакту шарів. Запропонована методика включає:

- консервативну (дивергентну) дискретизацію за просторовою змінною інтегро-інтерполяційним методом (методом балансу) (див. [9, Гл. III, §2]);
- чисельне розв'язання отриманої напівдискретної задачі, яка є жорсткою задачею Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь.

Відповідна задача про визначення термонапруженого стану циліндра з урахуванням температурної залежності механічних характеристик матеріалу у кожному шарі за умов сталої осової деформації і сталих навантажень на поверхнях розв'язується з використанням методики зведення до інтегральних рівнянь, описаної у роботі [7].

**1. Постановка задачі.** Дослідимо нестационарне температурне поле в безмежному порожнистому двошаровому циліндрі з внутрішнім радіусом  $r_0$  і зовнішнім –  $R$ . Приймаємо, що коефіцієнти теплопровідності матеріалів шарів  $\lambda(r, t)$  та об'ємна теплоємність  $c(r, t)$  є кусково-неперервними функціями від  $r$ . Температура циліндра  $t$  залежить від радіуса  $r$  і часу  $\tau$ , тобто має місце осьоова симетрія. Вважаємо, що на межі контакту шарів  $r = r^*$  виконуються умови ідеального теплового контакту, а через внутрішню поверхню  $r = r_0$  і зовнішню  $r = R$  здійснюється конвективний теплообмін з середовищами сталої температури  $t_{c_0}$  і  $t_{c_2}$ . Рівняння теплопровідності в циліндричній системі координат  $(r, z, \varphi)$  в одновимірній постановці для визначення нестационарного температурного поля в такому циліндрі як в одному цілому запишемо у вигляді

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(r, t) \frac{\partial t}{\partial r} \right) = c(r, t) \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad r_0 < r < R, \quad (1)$$

де

$$\lambda(r, t) = \begin{cases} \lambda^{(1)}(t), & r_0 \leq r < r^*, \\ \lambda^{(2)}(t), & r^* < r \leq R, \end{cases} \quad c(r, t) = \begin{cases} c^{(1)}(t), & r_0 \leq r < r^*, \\ c^{(2)}(t), & r^* < r \leq R. \end{cases} \quad (2)$$

Для температури  $t$ , яка задовольняє рівняння теплопровідності (1) з розривними коефіцієнтами (2), виконуються умови неперервності температури і теплового потоку на межі контакту шарів  $r = r^*$ :

$$t|_{r=r^*-0} = t|_{r=r^*+0}, \quad \lambda(r, t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r^*-0} = \lambda(r, t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r^*+0}. \quad (3)$$

Граничні умови конвективного теплообміну на внутрішній і зовнішній поверхнях мають вигляд

$$\lambda(r, t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r_0} - \alpha_1 (t|_{r=r_0} - t_{c_0}) = 0, \quad \lambda(r, t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R} + \alpha_2 (t|_{r=R} - t_{c_2}) = 0, \quad (4)$$

де  $\alpha_1, \alpha_2$  – коефіцієнти теплообміну з поверхонь  $r = r_0$  і  $r = R$  відповідно.

Початкову температуру циліндра вважаємо сталою і рівною  $t_p$ :

$$t|_{\tau=0} = t_p. \quad (5)$$

Перейдемо до відносних температури  $T = t/t_0$ ,  $T_p = t_p/t_0$ ,  $T_{c_0} = t_{c_0}/t_0$ ,  $T_{c_2} = t_{c_2}/t_0$ , координати  $\tilde{r} = r/\ell$ ,  $\tilde{r}_0 = r_0/\ell$ ,  $\tilde{r}_0^* = r_0^*/\ell$ ,  $\tilde{r}^* = r^*/\ell$ ,  $\tilde{R} = R/\ell$ , відносної величини часу  $\tilde{\tau} = \tau/\ell^2$  та  $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 \ell$ ,  $\tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 \ell$ . Тут  $t_0, \ell$  – вибрані відлікова температура і характерний розмір.

Введемо приріст температури  $\bar{T}(\tilde{r}, \tilde{\tau}) = T(\tilde{r}, \tilde{\tau}) - T_p$  і коефіцієнти тепло-

провідності  $\lambda(r, t)$  та об'ємної теплоємності  $c(r, t)$  подамо у вигляді

$$\lambda(r, t) = \lambda^*(\tilde{r}, \bar{T}), \quad c(r, t) = c^*(\tilde{r}, \bar{T}). \quad (6)$$

У введених змінних з урахуванням (6) задача (1)–(5) на приріст температури  $\bar{T}$  набуде вигляду

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \lambda^*(\tilde{r}, \bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tilde{r}} \right) = c^*(\tilde{r}, \bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tilde{\tau}}, \quad \tilde{r}_0 < \tilde{r} < \tilde{R}, \quad (7)$$

$$\bar{T}|_{\tilde{r}=\tilde{r}^*-0} = \bar{T}|_{\tilde{r}=\tilde{r}^*+0}, \quad \lambda^*(\tilde{r}, \bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{r}^*-0} = \lambda^*(\tilde{r}, \bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{r}^*+0}, \quad (8)$$

$$\lambda^*(\tilde{r}, \bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{r}_0} - \tilde{\alpha}_1 (\bar{T}|_{\tilde{r}=\tilde{r}_0} - \bar{T}_{c_0}) = 0, \quad (9)$$

$$\lambda^*(\tilde{r}, \bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{R}} + \tilde{\alpha}_2 (\bar{T}|_{\tilde{r}=\tilde{R}} - \bar{T}_{c_2}) = 0, \quad (10)$$

$$\bar{T}|_{\tilde{\tau}=0} = 0, \quad (11)$$

де  $\bar{T}_{c_0} = T_{c_0} - T_p$ ,  $\bar{T}_{c_2} = T_{c_2} - T_p$ ,

$$\lambda^*(\tilde{r}, \bar{T}) = \begin{cases} \lambda^{*(1)}(\bar{T}), & \tilde{r}_0 \leq \tilde{r} < \tilde{r}^*, \\ \lambda^{*(2)}(\bar{T}), & \tilde{r}^* < \tilde{r} \leq \tilde{R}, \end{cases} \quad c^*(\tilde{r}, \bar{T}) = \begin{cases} c^{*(1)}(\bar{T}), & \tilde{r}_0 \leq \tilde{r} < \tilde{r}^*, \\ c^{*(2)}(\bar{T}), & \tilde{r}^* < \tilde{r} \leq \tilde{R}. \end{cases}$$

Зауважимо, що крайова задача (7)–(11) є нелінійною, оскільки рівняння (7) містить кусково-неперервні коефіцієнти  $\lambda^*(\tilde{r}, \bar{T})$ ,  $c^*(\tilde{r}, \bar{T})$ .

Для визначення напружено-деформованого стану, викликаного температурним полем як розв'язком задачі (7)–(11), скористаємося рівняннями незв'язаної термопружності [7]:

– рівняннями рівноваги

$$\frac{d}{d\tilde{r}} (\tilde{r}^2 \sigma_r^{(j)}(\tilde{r})) = \tilde{r} (\sigma_r^{(j)}(\tilde{r}) - \tilde{r} f^{(j)}(\tilde{r})), \quad j = 1, 2; \quad (12)$$

– зв'язками між компонентами тензорів деформацій і напружень

$$\begin{aligned} E^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) e_r^{(j)} &= \sigma_r^{(j)} - \nu^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) (\sigma_\phi^{(j)} + \sigma_z^{(j)}) + E^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) \Phi^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) = \\ &= (1 + \nu^{(j)}(\bar{T}^{(j)})) [\sigma_r^{(j)} - \nu^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) \sigma^{(j)}] - \\ &\quad - \nu^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) E^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) e_z + (1 + \nu^{(j)}(\bar{T}^{(j)})) E^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) \Phi^{(j)}(\bar{T}^{(j)}), \quad (13') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) e_\phi^{(j)} &= \sigma_\phi^{(j)} - \nu^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) (\sigma_r^{(j)} + \sigma_z^{(j)}) + E^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) \Phi^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) = \\ &= (1 + \nu^{(j)}(\bar{T}^{(j)})) [(1 - \nu^{(j)}(\bar{T}^{(j)})) \sigma^{(j)} - \sigma_r^{(j)}] - \\ &\quad - \nu^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) E^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) e_z + (1 + \nu^{(j)}(\bar{T}^{(j)})) E^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) \Phi^{(j)}(\bar{T}^{(j)}), \quad (13'') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) e_z &= \sigma_z^{(j)} - \nu^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) (\sigma_r^{(j)} + \sigma_\phi^{(j)}) + E^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) \Phi^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) = \\ &= \sigma_z^{(j)} - \nu^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) \sigma^{(j)} + E^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) \Phi^{(j)}(\bar{T}^{(j)}), \quad j = 1, 2; \quad (13''') \end{aligned}$$

– рівняннями сумісності

$$\tilde{r} \frac{de_\phi^{(j)}}{d\tilde{r}} = e_r^{(j)} - e_\phi^{(j)},$$

які у напруженнях мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tilde{r}} \left[ \frac{1 - (v^{(j)}(\bar{T}^{(j)}))^2}{E^{(j)}(\bar{T}^{(j)})} \sigma^{(j)}(\tilde{r}) - v^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) e_z + (1 + v^{(j)}(\bar{T}^{(j)})) \Phi^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) \right] = \\ = \sigma_r^{(j)}(\tilde{r}) \frac{d}{d\tilde{r}} \left( \frac{1 + v^{(j)}(\bar{T}^{(j)})}{E^{(j)}(\bar{T}^{(j)})} \right) - f^{(j)}(\tilde{r}) \frac{1 + v^{(j)}(\bar{T}^{(j)})}{E^{(j)}(\bar{T}^{(j)})}; \end{aligned} \quad (14)$$

– умовами на обмежувальних поверхнях і в перерізі

$$\sigma_r^{(1)}(\tilde{r}_0) = -p_1, \quad \sigma_r^{(2)}(\tilde{R}) = -p_2, \quad 2\pi \int_{\tilde{r}_0}^{\tilde{R}} \eta \sigma_z(\eta) d\eta = p; \quad (15)$$

– умовами ідеального механічного контакту сусідніх шарів

$$u_r^{(2)}(\tilde{r}^*) = u_r^{(1)}(\tilde{r}^*), \quad \sigma_r^{(2)}(\tilde{r}^*) = \sigma_r^{(1)}(\tilde{r}^*). \quad (16)$$

У рівняннях і співвідношеннях (12)–(16)  $f^{(j)}(\tilde{r})$  – масові сили,  $\Phi^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) = \int_{T_p}^{\bar{T}^{(j)}} \alpha^{(j)}(T) dT$  – суто тепла деформація,  $E^{(j)}(\bar{T}^{(j)})$ ,  $v^{(j)}(\bar{T}^{(j)})$ ,  $\alpha^{(j)}(\bar{T}^{(j)})$ ,

$j = 1, 2$ , – залежні від температури модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, температурний коефіцієнт лінійного розширення (ТКЛР) матеріалу  $j$ -го шару відповідно;  $\sigma_r^{(j)}$ ,  $\sigma_\phi^{(j)}$ ,  $\sigma_z^{(j)}$  – радіальна, колова та осьова компоненти тензора напружень;  $e_r^{(j)}$ ,  $e_\phi^{(j)}$ ,  $e_z^{(j)}$  – радіальна, колова та осьова компоненти тензора деформацій у  $j$ -му шарі;  $\sigma^{(j)} = \sigma_r^{(j)} + \sigma_\phi^{(j)}$  – сумарні напруження;  $u_r^{(j)}$  – радіальна компонента вектора переміщень  $j$ -го шару, віднесена до характерного розміру  $\ell$ ;  $p_1$ ,  $p_2$  – задані сталі тиски (напруження) на внутрішній,  $\tilde{r} = \tilde{r}_0$ , і зовнішній,  $\tilde{r} = \tilde{R}$ , поверхнях циліндра,  $p$  – задане на торцях циліндра зусилля, що діє вздовж його осі. Залежності механічних характеристик матеріалів шарів від температури у діапазоні температур  $[\bar{T}_p, \bar{T}_k]$  подаємо у вигляді  $\chi^{(j)}(\bar{T}^{(j)}) = \chi_0^{(j)} \chi_j^*(\bar{T}^{(j)})$ , де  $\chi_0^{(j)}$  – розмірні величини, а  $\chi_j^*(\bar{T}^{(j)})$  – безрозмірні величини, які описують температурну залежність відповідної характеристики (вважатимемо, що  $\chi_j^*(\bar{T}^{(j)}) = 1 + k_{1\chi} \bar{T}^{(j)} + k_{2\chi} (\bar{T}^{(j)})^2 + \dots$ ). Оскільки температура залежить від радіальної координати та часу, а рівняння квазістатичної теорії пружності містять тільки похідні за координатою, то надалі у характеристиках матеріалу вказуватимемо залежності тільки від координати  $\tilde{r}$ , оскільки залежність характеристик від часу є залежністю від параметра.

**2. Чисельне розв'язування нелінійної крайової задачі теплопровідності методом прямих.** Крайову задачу (7)–(11) методом прямих зведемо до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Особливістю цієї задачі є те, що диференціальне рівняння є рівнянням з кусково-неперервними функціями  $\lambda^*(\tilde{r}, \bar{T})$ ,  $c^*(\tilde{r}, \bar{T})$ . Вираз під знаком похідної у рівнянні (7) є неперервним, що впливає з умов спряження (8). Відомо (див. [9, Гл. III, §2, §3]), що у випадку кусково-неперервних коефіцієнтів лише консервативні різницеві схеми є збіжними. Тому для чисельного розв'язування таких задач методом прямих необхідно побудувати консервативну апроксимацію диференціального оператора за просторовою змінною, наприклад, за допомогою інтегро-інтерполяційного методу.

На відрізку  $[\tilde{r}_0, \tilde{R}]$  введемо рівномірну сітку

$$\bar{\omega}_h = \{\tilde{r}_i = \tilde{r}_0 + ih, i = 0, \dots, n, h = (\tilde{R} - \tilde{r}_0)/n\}$$

Сітку  $\bar{\omega}_h$  вибираємо так, щоб точка розриву  $\tilde{r} = \tilde{r}^*$  співпадала з вузлом сітки  $\tilde{r}_i$ . Введемо позначення  $\tilde{r}_{i\pm 1/2} = \tilde{r}_i \pm h/2$ ,  $\bar{T}_i(\tilde{\tau}) = \bar{T}(\tilde{r}_i, \tilde{\tau})$ ,

$$w(\tilde{r}, \bar{T}, \tilde{\tau}) = \tilde{r}\lambda^*(\tilde{r}, \bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tilde{r}}. \quad (17)$$

Проінтегрувавши рівняння (7) за змінною  $\tilde{r}$  на відрізку  $[\tilde{r}_{i-1/2}, \tilde{r}_{i+1/2}]$ , отримаємо рівняння балансу

$$w\left(\tilde{r}_{i+1/2}, \frac{\bar{T}_i + \bar{T}_{i+1}}{2}, \tilde{\tau}\right) - w\left(\tilde{r}_{i-1/2}, \frac{\bar{T}_i + \bar{T}_{i-1}}{2}, \tilde{\tau}\right) = \int_{\tilde{r}_{i-1/2}}^{\tilde{r}_{i+1/2}} c^*(\tilde{r}, \bar{T}) \tilde{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tilde{\tau}} d\tilde{r}. \quad (18)$$

Інтеграл у правій частині рівняння (18), який містить шукану функцію  $\bar{T}$ , замінимо його наближеним значенням:

$$\int_{\tilde{r}_{i-1/2}}^{\tilde{r}_{i+1/2}} c^*(\tilde{r}, \bar{T}) \tilde{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tilde{\tau}} d\tilde{r} \approx hC(\tilde{r}_i, \bar{T}_i) \tilde{r}_i \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \tilde{\tau}}, \quad (19)$$

де  $C(\tilde{r}_i, \bar{T}_i) = c^*(\tilde{r}_i, \bar{T}_i)$  або  $C(\tilde{r}_i, \bar{T}_i) = \frac{1}{2}[c^*(\tilde{r}_i - 0, \bar{T}_i) + c^*(\tilde{r}_i + 0, \bar{T}_i)]$ , якщо  $c^*(\tilde{r}, \bar{T})$  розривна у вузлі  $\tilde{r} = \tilde{r}_i$ .

Виразимо  $w\left(\tilde{r}_{i\pm 1/2}, \frac{\bar{T}_i + \bar{T}_{i\pm 1}}{2}, \tilde{\tau}\right)$  через значення  $\bar{T}$  у вузлах сітки  $\bar{\omega}_h$ .

Для цього перепишемо (17) у вигляді  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \tilde{r}} = \frac{w(\tilde{r}, \bar{T}, \tilde{\tau})}{\tilde{r}\lambda^*(\tilde{r}, \bar{T})}$  і проінтегруємо за змінною  $\tilde{r}$  на відрізку  $[\tilde{r}_{i-1}, \tilde{r}_i]$ . Тоді матимемо

$$\bar{T}_i - \bar{T}_{i-1} = \int_{\tilde{r}_{i-1}}^{\tilde{r}_i} \frac{w(\tilde{r}, \bar{T}, \tilde{\tau})}{\tilde{r}\lambda^*(\tilde{r}, \bar{T})} d\tilde{r}.$$

Припустимо, що на відрізку  $[\tilde{r}_{i-1}, \tilde{r}_i]$  функція

$$w(\tilde{r}, \bar{T}, \tilde{\tau}) \approx w\left(\tilde{r}_{i-1/2}, \frac{\bar{T}_i + \bar{T}_{i-1}}{2}, \tilde{\tau}\right) = \text{const}.$$

Тоді

$$\bar{T}_i - \bar{T}_{i-1} \approx w\left(\tilde{r}_{i-1/2}, \frac{\bar{T}_i + \bar{T}_{i-1}}{2}, \tilde{\tau}\right) \int_{\tilde{r}_{i-1}}^{\tilde{r}_i} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}\lambda^*(\tilde{r}, \bar{T})}. \quad (20)$$

Введемо позначення  $q_i(\bar{T}) = \left(\frac{1}{h} \int_{\tilde{r}_{i-1}}^{\tilde{r}_i} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}\lambda^*(\tilde{r}, \bar{T})}\right)^{-1}$ , а інтеграл у правій частині (20) замінимо наближеним виразом. Тоді матимемо

$$q_i(\bar{T}) \approx \tilde{r}_{i-1/2} \lambda^*\left(\tilde{r}_{i-1/2}, \frac{\bar{T}_i + \bar{T}_{i-1}}{2}\right). \quad (21)$$

Отже, з (20), (21) випливає рівність

$$w\left(\tilde{r}_{i-1/2}, \frac{\bar{T}_i + \bar{T}_{i-1}}{2}, \tilde{\tau}\right) \approx q_i(\bar{T}) \frac{\bar{T}_i - \bar{T}_{i-1}}{h}. \quad (22)$$

Підставивши вирази (22) і (19) у (18), отримаємо систему ЗДР

$$\frac{dy_i}{d\tilde{\tau}} = \frac{1}{h\tilde{r}_i C(\tilde{r}_i, y_i)} \left( q_{i+1}(y) \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - q_i(y) \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

де

$$y_i(\tilde{\tau}) \approx \bar{T}_i(\tilde{\tau}) = \bar{T}(\tilde{r}_i, \tilde{\tau}),$$

а  $q_i(\bar{T})$  визначається рівністю або (21), або

$$q_i(y) = \frac{1}{2} [\tilde{r}_i \lambda^*(\tilde{r}_i, y_i) + \tilde{r}_{i-1} \lambda^*(\tilde{r}_{i-1}, y_{i-1})].$$

Побудуємо різницевий аналог граничної умови (9). Після інтегрування рівняння (7) на відрізку  $[\tilde{r}_0, \tilde{r}_{1/2}]$ , де  $\tilde{r}_{1/2} = h/2$ , отримаємо

$$w\left(\tilde{r}_{1/2}, \frac{\bar{T}_0 + \bar{T}_1}{2}, \tilde{\tau}\right) - w(\tilde{r}_0, \bar{T}_0, \tilde{\tau}) = \int_{\tilde{r}_0}^{\tilde{r}_{1/2}} c^*(\tilde{r}, \bar{T}) \tilde{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tilde{\tau}} d\tilde{r}. \quad (23)$$

З умови (9) на межі  $\tilde{r} = \tilde{r}_0$  маємо

$$w(\tilde{r}_0, \bar{T}_0, \tilde{\tau}) \approx \tilde{r}_0 \tilde{\alpha}_1 \left( \bar{T} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{r}_0} - \bar{T}_{c_0} \right), \quad (24)$$

а з (22) маємо

$$w\left(\tilde{r}_{1/2}, \frac{\bar{T}_0 + \bar{T}_1}{2}, \tilde{\tau}\right) \approx q_1(\bar{T}) \frac{\bar{T}_1 - \bar{T}_0}{h}. \quad (25)$$

Інтеграл у правій частині (23) замінимо наближеним значенням:

$$\int_{\tilde{r}_0}^{\tilde{r}_{1/2}} \tilde{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tilde{\tau}} d\tilde{r} \approx \frac{h}{2} \tilde{r}_0 C(\tilde{r}_0, \bar{T}_0) \frac{\partial \bar{T}_0}{\partial \tilde{\tau}}. \quad (26)$$

Отже, з (23)–(26) випливає, що напівдискретний аналог умови (9) матиме вигляд

$$\frac{dy_0}{d\tilde{\tau}} = \frac{2}{h\tilde{r}_0 C(\tilde{r}_0, y_0)} \left[ q_1(y) \frac{y_1 - y_0}{h} - \tilde{r}_0 \tilde{\alpha}_1 (y_0 - \bar{T}_{c_0}) \right].$$

Аналогічно побудуємо напівдискретний аналог граничної умови (10). Проінтегрувавши рівняння (7) на відрізку  $[\tilde{r}_{n-1/2}, \tilde{R}]$ , отримаємо

$$w(\tilde{R}, \bar{T}_n, \tilde{\tau}) - w\left(\tilde{r}_{n-1/2}, \frac{\bar{T}_n + \bar{T}_{n-1}}{2}, \tilde{\tau}\right) = \int_{\tilde{r}_{n-1/2}}^{\tilde{R}} c^*(\tilde{r}, \bar{T}) \tilde{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tilde{\tau}} d\tilde{r},$$

де

$$w\left(\tilde{r}_{n-1/2}, \frac{\bar{T}_n + \bar{T}_{n-1}}{2}, \tilde{\tau}\right) = q_n(\bar{T}) \frac{\bar{T}_n - \bar{T}_{n-1}}{h},$$

$$\int_{\tilde{r}_{n-1/2}}^{\tilde{R}} c^*(\tilde{r}, \bar{T}) \tilde{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tilde{\tau}} d\tilde{r} \approx \frac{h\tilde{R}}{2} C(\tilde{R}, \bar{T}_n) \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial \tilde{\tau}}.$$

З умови (10) на межі  $r = \tilde{R}$  випливає, що

$$w(\tilde{R}, \bar{T}_n, \tilde{\tau}) = -\tilde{R} \tilde{\alpha}_2 (\bar{T}_n - \bar{T}_{c_2}).$$

Отже, різницевий аналог граничної умови (10) матиме вигляд

$$\frac{dy_n}{d\tilde{\tau}} = \frac{1}{h\tilde{R} C(\tilde{R}, y_n)} \left[ -\tilde{R} \tilde{\alpha}_2 (y_n - \bar{T}_{c_2}) - q_n(y) \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \right].$$

Таким чином, крайову задачу (7)–(11) для визначення приросту температури  $\bar{T}$  зведено до задачі Коші для системи ЗДР:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_0}{d\tilde{\tau}} &= \frac{2}{h\tilde{r}_0 C(\tilde{r}_0, y_0)} \left[ q_1(y) \frac{y_1 - y_0}{h} - \tilde{r}_0 \tilde{\alpha}_1 (y_0 - \bar{T}_{c_0}) \right], \\
\frac{dy_i}{d\tilde{\tau}} &= \frac{1}{h\tilde{r}_i C(\tilde{r}_i, y_i)} \left( q_{i+1}(y) \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - q_i(y) \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right), \\
& i = 1, 2, \dots, n-1, \\
\frac{dy_n}{d\tilde{\tau}} &= \frac{1}{h\tilde{R} C(\tilde{R}, y_n)} \left[ -q_n(y) \frac{y_n - y_{n-1}}{h} - \tilde{R} \tilde{\alpha}_2 (y_n - \bar{T}_{c_2}) \right], \\
y_i(0) &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{27}
\end{aligned}$$

Отриману задачу Коші (27), яка, взагалі кажучи, є жорсткою (див. [2, **Приклад 1.1.6**]), розв'язуємо чисельно за допомогою формул диференціювання назад.

**3. Методика визначення напруженого стану.** Як показано в роботі [7], безпосереднє інтегрування рівняння рівноваги (12) з використанням заданих навантажень (15), (16) на межах дозволяє отримати інтегральні рівняння, які пов'язують радіальні і сумарні напруження:

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)}(\tilde{r}) &= \frac{1}{\tilde{r}^2} \left[ -\tilde{r}_0^2 p_1 + \int_{\tilde{r}_0}^{\tilde{r}} \eta(\sigma^{(1)}(\eta) - \eta f^{(1)}(\eta)) d\eta \right], \\
\sigma_r^{(2)}(\tilde{r}) &= \frac{1}{\tilde{r}^2} \left[ -\tilde{r}_0^2 p_1 + \right. \\
& \quad \left. + \int_{\tilde{r}_0}^{\tilde{r}^*} \eta[\sigma^{(1)}(\eta) - \eta f^{(1)}(\eta)] d\eta + \int_{\tilde{r}^*}^{\tilde{r}} \eta[\sigma^{(2)}(\eta) - \eta f^{(2)}(\eta)] d\eta \right], \tag{28}
\end{aligned}$$

$$\tilde{r}_0^2 p_1 - \tilde{R}^2 p_2 = \int_{\tilde{r}}^{\tilde{r}^*} \eta[\sigma^{(1)}(\eta) - \eta f^{(1)}(\eta)] d\eta + \int_{\tilde{r}^*}^{\tilde{R}} \eta[\sigma^{(2)}(\eta) - \eta f^{(2)}(\eta)] d\eta. \tag{29}$$

З рівнянь сумісності (14) отримаємо таку систему інтегральних рівнянь Вольтерра 2-го роду:

$$\begin{aligned}
\frac{1 - (v^{(j)}(\tilde{r}))^2}{E^{(j)}(\tilde{r})} \sigma^{(j)}(\tilde{r}) &= \int_{\tilde{r}_j^*}^{\tilde{r}} \sigma_r^{(j)}(\eta) (\varphi^{(j)}(\eta))' d\eta + \frac{1 - (v^{(1)}(\tilde{r}_0))^2}{E^{(1)}(\tilde{r}_0)} \sigma^{(1)}(\tilde{r}_0) + \\
& \quad + [v^{(j)}(\tilde{r}) - v^{(1)}(\tilde{r}_0)] e_z + (1 - \delta_{j1}) \int_{\tilde{r}_0}^{\tilde{r}^*} \sigma_r^{(1)}(\eta) (\varphi^{(1)}(\eta))' d\eta + \\
& \quad + (1 - \delta_{j1}) \beta^{(1)} \sigma_r^{(1)}(\tilde{r}^*) - F^{(j)}(\tilde{r}), \quad j = 1, 2. \tag{30}
\end{aligned}$$

З інтегральних рівнянь (28)–(30) визначаємо радіальні  $\sigma_r^{(j)}$  і сумарні напруження  $\sigma^{(j)}$ , сталі  $\sigma^{(1)}(\tilde{r}_0)$ ,  $e_z$  визначаємо з інтегральних умов (15), (29), зі зв'язку  $\sigma^{(j)} = \sigma_r^{(j)} + \sigma_\phi^{(j)}$  визначаємо колові напруження  $\sigma_\phi^{(j)}$ , зі зв'язку (13''') між осьовою деформацією  $e_z$  і напруженнями визначаємо осьові напруження  $\sigma_z^{(j)}$ , зі зв'язків (13')–(13''') визначаємо деформації, а переміщення визначаємо з формули Коші  $e_\phi = \frac{u_r}{l\tilde{r}}$ .

Інтегральні рівняння (28)–(30) після заміни у них інтегралів за формулою трапецій

$$\int_{\rho_j}^{\rho} Y(\eta) d\eta \approx \frac{\rho - \rho_j}{2} [Y(\rho) + Y(\rho_j)]$$

зводимо до рекурентної сукупності алгебричних рівнянь відносно радіальних і сумарних напружень.

У результаті після деяких перетворень отримуємо вирази для сумарних і радіальних напружень:

$$\begin{aligned} \sigma^{(j)}(\tilde{r}) &= \sigma^{(j)}(\tilde{r}_0) \gamma_{10}^{(j)}(\tilde{r}) + e_z \gamma_{20}^{(j)}(\tilde{r}) + \gamma_{00}^{(j)}(\tilde{r}), \\ \sigma_r^{(j)}(\tilde{r}) &= \sigma^{(j)}(\tilde{r}_0) \gamma_{1r}^{(j)}(\tilde{r}) + e_z \gamma_{2r}^{(j)}(\tilde{r}) + \gamma_{0r}^{(j)}(\tilde{r}), \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (31)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_{10}^{(j)}(\tilde{r}) &= \frac{1}{\Psi^{(2)}(\tilde{r})} \left\{ (1 - \delta_{1j}) \gamma_{1r}^{(1)}(\tilde{r}^*) \chi_2^{(2)}(\tilde{r}) + \left[ \frac{1 - (v^{(1)}(\tilde{r}_0))^2}{E^{(1)}(\tilde{r}_0)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 - \delta_{j1}) \int_{\tilde{r}_0}^{\tilde{r}^*} \gamma_{1r}^{(k)}(\eta) (\varphi^{(k)}(\eta))' d\eta + (1 - \delta_{j1}) \beta^{(1)} \gamma_{1r}^{(1)}(\tilde{r}^*) \right] \chi_1^{(j)}(\tilde{r}) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{20}^{(j)}(\tilde{r}) &= \frac{1}{\Psi^{(j)}(\tilde{r})} \left\{ [v^{(j)}(\tilde{r}) - v^{(j)}(\tilde{r}_j)] + (1 - \delta_{1j}) \gamma_{2r}^{(1)}(\tilde{r}^*) \chi_2^{(j)}(\tilde{r}) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ v^{(j)}(\tilde{r}_j) - v^{(1)}(\tilde{r}_0) + (1 - \delta_{j1}) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left( \int_{\tilde{r}_0}^{\tilde{r}^*} \gamma_{2r}^{(k)}(\eta) (\varphi^{(k)}(\eta))' d\eta + \beta^{(1)} \gamma_{2r}^{(1)}(\tilde{r}^*) \right) \right] \chi_1^{(j)}(\tilde{r}) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{00}^{(j)}(\rho) &= \frac{1}{\Psi^{(j)}(\tilde{r})} \left\{ [-\delta_{1j} p_1 + (1 - \delta_{1j}) \gamma_{0r}^{(1)}(\tilde{r}^*)] \chi_2^{(j)}(\rho) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tilde{r} - \tilde{r}_j}{2} (\varphi^{(j)}(\tilde{r}))' \frac{1}{\tilde{r}^2} \int_{\rho_j}^{\rho} \eta^2 f^{(j)}(\eta) d\eta + \right. \\ &\quad \left. + \left[ (1 - \delta_{j1}) \int_{\tilde{r}_0}^{\tilde{r}^*} \gamma_{0r}^{(1)}(\eta) (\varphi^{(k)}(\eta))' d\eta + (1 - \delta_{j1}) \beta^{(1)} \gamma_{0r}^{(1)}(\tilde{r}^*) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - F^{(j)}(\tilde{r}) \right] \chi_1^{(j)}(\tilde{r}) - F^{(j)}(\tilde{r}) + F^{(j)}(\tilde{r}_j) \right\}, \end{aligned}$$

$$\gamma_{1r}^{(j)}(\tilde{r}) = \frac{1}{\rho^2} \left[ (1 - \delta_{1j}) (\tilde{r}^*)^2 \gamma_{1r}^{(1)}(\tilde{r}^*) + \int_{\tilde{r}_j}^{\tilde{r}} \eta \gamma_{10}^{(j)}(\eta) d\eta \right],$$

$$\gamma_{2r}^{(j)}(\tilde{r}) = \frac{1}{\tilde{r}^2} \left[ (1 - \delta_{1j}) (\tilde{r}^*)^2 \gamma_{2r}^{(1)}(\tilde{r}^*) + \int_{\tilde{r}_j}^{\tilde{r}} \eta \gamma_{20}^{(j)}(\eta) d\eta \right],$$

$$\gamma_{0r}^{(j)}(\tilde{r}) = \frac{1}{\tilde{r}^2} \left[ -\tilde{r}_0^2 p_1 \delta_{1j} + (1 - \delta_{1j}) (\tilde{r}^*) \gamma_{0r}^{(1)}(\tilde{r}^*) + \int_{\tilde{r}_j}^{\tilde{r}} \eta [\gamma_{00}^{(j)}(\eta) - \eta f^j(\eta)] d\eta \right],$$



$$\begin{aligned}
\chi_1^{(j)}(\tilde{r}) &= 1 + \left( \frac{\tilde{r} - \tilde{r}_j}{2} \right)^2 (\varphi^{(j)}(\tilde{r}))' \frac{\tilde{r}_j}{\tilde{r}^2} \frac{E^{(j)}(\tilde{r}_j)}{1 - (v^{(j)}(\tilde{r}_j))^2}, \\
\chi_2^{(j)}(\tilde{r}) &= \frac{\tilde{r} - \tilde{r}_j}{2} \left[ \frac{\tilde{r}_j^2}{\tilde{r}^2} (\varphi^{(j)}(\tilde{r}))' + (\varphi^{(j)}(\tilde{r}_j))' \right], \\
\psi^{(j)}(\tilde{r}) &= \frac{1 - (v^{(j)}(\tilde{r}))^2}{E^{(j)}(\tilde{r})} - \left( \frac{\tilde{r} - \tilde{r}_j}{2} \right)^2 \tilde{r} (\varphi^{(j)}(\tilde{r}))', \quad j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{32}$$

Сталі  $\sigma^{(1)}(\tilde{r}_0)$ ,  $e_z$  визначаємо з інтегральних умов (15) і (29). В результаті отримуємо систему двох лінійних алгебричних рівнянь з двома невідомими

$$\begin{aligned}
\sigma^{(1)}(\tilde{r}_0) d_{11} + e_z d_{12} &= c_1, \\
\sigma^{(1)}(\tilde{r}_0) d_{21} + e_z d_{22} &= c_2,
\end{aligned} \tag{33}$$

де

$$\begin{aligned}
d_{11} &= \int_{\tilde{r}_0}^{\tilde{r}^*} \eta \gamma_{10}^{(1)}(\eta) d\eta + \int_{\tilde{r}^*}^{\tilde{R}} \eta \gamma_{10}^{(2)}(\eta) d\eta, \\
d_{12} &= \int_{\tilde{r}_0}^{\tilde{r}^*} \eta \gamma_{20}^{(1)}(\eta) d\eta + \int_{\tilde{r}^*}^{\tilde{R}} \eta \gamma_{20}^{(2)}(\eta) d\eta, \\
d_{21} &= \int_{\tilde{r}_0}^{\tilde{r}^*} \eta v^{(1)}(\eta) \gamma_{20}^{(1)}(\eta) d\eta + \int_{\tilde{r}^*}^{\tilde{R}} \eta v^{(2)}(\eta) \gamma_{20}^{(2)}(\eta) d\eta, \\
d_{22} &= \int_{\tilde{r}_0}^{\tilde{r}^*} \eta [v^{(1)}(\eta) + E^{(1)}(\eta)] \gamma_{20}^{(1)}(\eta) d\eta + \\
&\quad + \int_{\tilde{r}^*}^{\tilde{R}} \eta [v^{(2)}(\eta) + E^{(2)}(\eta)] \gamma_{20}^{(2)}(\eta) d\eta, \\
c_1 &= \tilde{r}_0^2 p_1 - \tilde{R}^2 p_2 + \int_{\tilde{r}_0}^{\tilde{r}^*} \eta [\eta f^{(1)}(\eta) - \gamma_{00}^{(1)}(\eta)] d\eta + \int_{\tilde{r}^*}^{\tilde{R}} \eta [\eta f^{(2)}(\eta) - \gamma_{00}^{(2)}(\eta)] d\eta, \\
c_2 &= \frac{p}{2\pi} + \int_{\tilde{r}_0}^{\tilde{r}^*} \eta [E^{(1)}(\eta) \Phi^{(1)}(T^{(1)}(\eta, \tau)) - v^{(1)}(\eta) \gamma_{00}^{(1)}(\eta)] d\eta + \\
&\quad + \int_{\tilde{r}^*}^{\tilde{R}} \eta [E^{(2)}(\eta) \Phi^{(2)}(T^{(2)}(\eta, \tau)) - v^{(k)}(\eta) \gamma_{00}^{(k)}(\eta)] d\eta,
\end{aligned} \tag{34}$$

звідки

$$\sigma^{(1)}(\tilde{r}_0) = \frac{c_1 d_{22} - c_2 d_{12}}{d_{11} d_{22} - d_{21} d_{12}}, \quad e_z = \frac{c_2 d_{11} - c_1 d_{21}}{d_{11} d_{22} - d_{21} d_{12}}. \tag{35}$$

У наведених формулах  $\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0$ ,  $\tilde{r}_2 = \tilde{r}^*$ .

**4. Чисельні дослідження.** Як числовий приклад розглянемо безмежний двошаровий циліндр з внутрішнім радіусом  $r_0 = 10$  см і зовнішнім  $R = 11$  см з межею контакту шарів  $r^* = 10.5$  см. Через поверхню  $r = r_0$  відбувається конвективний теплообмін з середовищем сталої температури  $t_{c_0} = 1100$  К, яку вибрано за опорну, а через зовнішню поверхню  $r = R$  відбувається

конвективний теплообмін з середовищем сталої температури  $t_{c_2} = 300$  К, яку вибрано за початкову. Обчислення розподілу температури проведено для заданих значень коефіцієнтів теплообміну  $\alpha_1 = 12000$ ,  $\alpha_2 = 100$ . За матеріали шарів вибрано кераміку  $ZrO_2$  (шар  $r_0 \leq r < r^*$ ) і титановий сплав Ti-6Al-4V (шар  $r^* < r \leq R$ ) з такими температурними залежностями теплофізичних і механічних характеристик з діапазону температур  $300 \div 1100$  К [12]

– для кераміки:

$$\lambda_t(t) = (1.71 + 0.21 \cdot 10^{-3}t + 0.116 \cdot 10^{-6}t^2) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})], \quad c(t) = c_p(t)\rho(t),$$

$$c_p(t) = (2.74 \cdot 10^2 + 7.95 \cdot 10^{-1}t - 6.19 \cdot 10^{-4}t^2 + 1.71 \cdot 10^{-7}t^3) [\text{кДж}/\text{кг} \cdot \text{К}],$$

$$\rho = 3657.0 / (1.0 + \alpha_t(t)(t - 300.0))^3 [\text{кг}/\text{м}^3],$$

$$\alpha_t(t) = (13.31 \cdot 10^{-6} - 18.9 \cdot 10^{-9}t + 12.7 \cdot 10^{-12}t^2) [\text{К}^{-1}],$$

$$E(t) = (132.2 - 50.3 \cdot 10^{-3}t - 8.1 \cdot 10^{-6}t^2) [\text{ГПа}], \quad \nu = 0.333;$$

– для титанового сплаву:

$$\lambda_t(t) = (1.1 + 0.017t) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})], \quad c_v(t) = c_p(t)\rho(t),$$

$$c_p(t) = (3.5 \cdot 10^2 + 8.78 \cdot 10^{-1}t - 9.74 \cdot 10^{-4}t^2 + 4.43 \cdot 10^{-7}t^3) [\text{кДж}/\text{кг} \cdot \text{К}],$$

$$\rho = 4420.0 / (1.0 + \alpha_t(t)(t - 300.0))^3 [\text{кг}/\text{м}^3],$$

$$\alpha_t(t) = (7.43 \cdot 10^{-6} + 5.56 \cdot 10^{-9}t - 2.69 \cdot 10^{-12}t^2) [\text{К}^{-1}],$$

$$E(t) = (122.7 - 0.0565t) [\text{ГПа}], \quad \nu(t) = 0.2888 + 32.0 \cdot 10^{-6}t.$$

Результати числових досліджень розподілу температурного поля наведено у вигляді графіків на рис. 1, рис. 2, а колових напружень – на рис. 3. Суцільні криві на рисунках відповідають значенням, обчисленим з урахуванням температурних залежностей теплофізичних характеристик матеріалів шарів циліндра, а штрихові – за сталих значень усіх теплофізичних характеристик, вибраних при початковій температурі  $t_p = 300$  К.

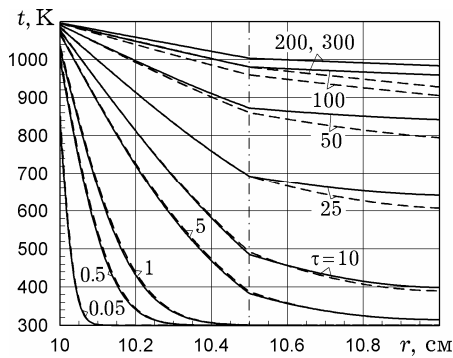


Рис. 1

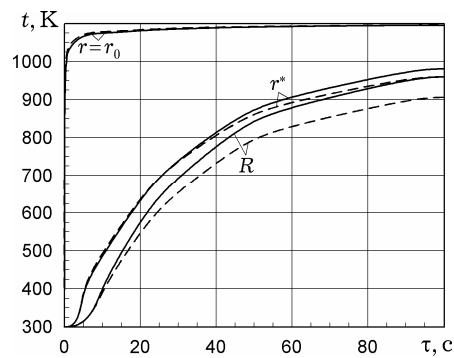


Рис. 2

На рис. 1 зображено графіки залежностей температури двохшарового циліндра від радіуса  $r$  для різних значень часу  $\tau$ . При  $\tau > 200$  с температура в циліндрі виходить на стаціонарний режим. На границі контакту шарів  $r^* = 10.5$  см температура неперервна.

Залежність температури від часу  $\tau$  на обмежувальних поверхнях циліндра  $r = r_0$  і  $r = R$ , а також на границі контакту шарів  $r = r^*$  наведено на рис. 2.

Зміну колових напружень  $\sigma_\phi$  на відрізку  $\tilde{r} \in [1.0, 1.1]$ , де  $\tilde{r} = r/r_0$ , для моментів часу  $\tau = 0.05, 25, 200$  с з урахуванням і без урахування температурної залежності термомеханічних характеристик матеріалів при відсутності силових навантажень подано на рис. 3.

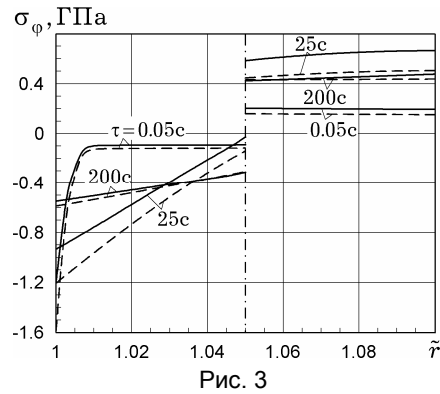


Рис. 3

**Висновки.** Для вибраних матеріалів шарів циліндра розбіжність між значеннями температур, обчисленими з урахуванням залежностей від температури коефіцієнтів теплопровідності, об'ємних теплоємностей і коефіцієнтів температуропровідності, і їхніми значеннями, обчисленими за сталих характеристик при початковій температурі, не перевищує 2% на внутрішній поверхні, 9% – на зовнішній і 14% на межі контакту шарів. Це свідчить про необхідність врахування температурних залежностей теплофізичних характеристик матеріалів при визначенні розподілу температурного поля в двошаровому безмежному циліндрі.

Оскільки товщина матеріалу порожнистого циліндра мала, то радіальні напруження не подано тому, що вони не перевищують 0.03 ГПа у заданому діапазоні зміни температурного поля. Осьові напруження  $\sigma_z$  мають приблизно таку ж величину і закон розподілу, як і колові напруження. Для моментів часу  $\tau > 200$  с напруження не відрізняються, що свідчить про досягнення стаціонарного режиму. Значення напружень і величина їх стрибка для вибраних матеріалів також залежать від часу. Показовими є малі моменти часу, де практично незначна зміна температурного поля за рахунок врахування температурної залежності теплофізичних характеристик матеріалу призводить до порівняно великих змін напружень. Це свідчить про необхідність врахування впливу температурної залежності теплофізичних характеристик матеріалу на напруження при малих моментах часу внаслідок великих перепадів температур, які враховує запропонована методика розрахунку напружень.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки бюджетної програми «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень (КПКВК 6541230)».

1. Гарматій Г. Ю., Кушнір Р. М., Попович В. С. Термопружний стан безмежного кругового термочутливого циліндра за умови конвективно-променевого теплообміну з довкіллям // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 113–120.
2. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге – Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1988. – 334 с.  
То же: Dekker K., Verwer J. G. Stability of Runge – Kutta methods for stiff nonlinear differential equations. – Amsterdam: North-Holland, 1984. – ix+307 p.
3. Зайцев Е. П. Влияние тепловой анизотропии и двойной нелинейности на температурное поле сплошного бесконечного трансверсально-изотропного цилиндра // Вісн. Кременчуц. нац. ун-ту ім. М. Остроградського. – 2016. – Вип. 4(99). – С. 23–29.
4. Калиняк Б., Попович В. Напружений стан багатошарового термочутливого циліндра в умовах асимптотичного теплового режиму // машинознавство. – 2005. – № 2. – С. 22–30.
5. Кушнір Р. М., Попович В. С. Термомеханіка термочутливих тіл. – Львів: Сполом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 2.
6. Кушнір Р. М., Попович В. С., Гарматій Г. Ю. Аналітично-чисельне розв'язування контактних задач термопружності для термочутливих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – 37, № 6. – С. 39–44.

- Те саме: *Kushnir R. M., Popovych V. S., Harmatii H. Yu.* Analytic-numerical solution of contact problems of thermoelasticity for thermosensitive bodies // *Mater. Sci.* – 2001. – **37**, No. 6. – P. 893–901.
7. *Попович В. С., Калиняк Б. М.* Математичне моделювання і методика визначення статичного термопружного стану багатошарових термочутливих циліндрів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2014. – **57**, № 2. – С. 169–186.  
Те саме: *Popovych V. S., Kalynyak B. M.* Mathematical modeling and methods for the determination of the static thermoelastic state of multilayer thermally sensitive cylinders // *J. Math. Sci.* – 2016. – **215**, No. 2. – P. 218–242.
  8. *Процюк Б. В.* Визначення термопружного стану кусково-неоднорідних термочутливих тіл з циліндричними поверхнями поділу // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2014. – **57**, № 4. – С. 139–153.  
Те саме: *Protsyuk B. V.* Determination of the thermoelastic states of piecewise inhomogeneous thermosensitive bodies with cylindrical interfaces // *J. Math. Sci.* – 2017. – **220**, No. 2. – P. 173–192.
  9. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1989. – 616 с.
  10. *Araki W., Adachi T., Yamaji A.* Thermal stress analysis of thermoviscoelastic hollow cylinder with temperature-dependent thermal properties // *J. Therm. Stresses.* – 2004. – **28**, No. 1. – P. 29–46.
  11. *Orcan Y., Eraslan A. N.* Thermal stresses in elastic-plastic tubes with temperature-dependent mechanical and thermal properties // *J. Therm. Stresses.* – 2001. – **24**, No. 11. – P. 1097–1113.
  12. *Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N.* Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // *J. Therm. Stresses.* – 1996. – **19**, No. 1. – P. 77–102.

#### НЕСВЯЗАННАЯ КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЦИЛИНДРА ПРИ УСЛОВИЯХ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОБМЕНА

Определены зависящее от радиальной координаты неустановившееся температурное поле и обусловленное им и внешними силовыми нагрузками термоупругое состояние в двухслойном полой термочувствительном цилиндре. Нелинейная краевая задача теплопроводности с разрывными коэффициентами интегро-интерполяционным методом сведена к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решена численно. Напряженное состояние определено из интегральных уравнений второго рода и интегральных условий, полученных непосредственным интегрированием задачи квазистатической термоупругости в напряжениях. Исследовано влияние температурной зависимости теплофизических и механических характеристик слоев материалов на величину и характер распределения температуры и обусловленных ею напряжений в двухслойном цилиндре.

**Ключевые слова:** двухслойный полой цилиндр, термочувствительность, нелинейная краевая задача, численные методы, интегро-интерполяционный метод, термонапряжения.

#### UNCOUPLED QUASI-STATIC THERMAL ELASTICITY PROBLEM FOR A TWO-LAYER THERMOSENSITIVE CYLINDER UNDER CONDITIONS OF CONVECTIVE HEAT EXCHANGE

The unsteady temperature field dependent on the radial coordinate and the thermoelastic state caused by it as well as by external force loads are determined in a two-layer hollow heat-sensitive cylinder. The nonlinear boundary value problem of heat conduction with discontinuous coefficients by the integro-interpolation method is reduced to the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations, which is solved numerically. The stress state is determined from integral equations of the second kind and integral conditions obtained by directly integrating the quasistatic thermoelasticity problem in terms of stresses. The effect of the temperature dependence of the thermophysical and mechanical characteristics of the layers of materials on the values and character of the temperature distribution and the stresses caused by it in a two-layer cylinder is investigated.

**Key words:** two-layer hollow cylinder, thermal sensitivity, nonlinear boundary value problem, numerical methods, integro-interpolation method, thermal stress.

<sup>1</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

<sup>2</sup> Жешувськ. технолог. ун-т, Жешув, Польща