УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен[1], І. П. Мединський[2*]

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ

Розглянуто вироджені параболічні рівняння типу Колмогорова довільного порядку з двома групами просторових змінних виродження і коефіцієнтами, залежними від усіх змінних. Для таких рівнянь побудовано класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші. Отримано оцінки цього розв'язку та його похідних.

Ключові слова: *параболічне рівняння довільного порядку, вироджене параболічне рівняння типу Колмогорова, фундаментальний розв'язок задачі Коші, метод Леві.*

Вступ. Клас вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова довільного порядку з коефіцієнтами, не залежними від просторових змінних (підклас $\mathbf{E}_{21}^0$ класу $\mathbf{E}_{21}$ за термінологією монографії [16]), означений С. Д. Ейдельманом і Г. П. Малицькою в працях [14, 15]. Дослідженню рівнянь з цього класу присвячені праці С. Д. Ейдельмана, Г. П. Малицької, Л. М Тичинської, С. Д. Івасишена, Л. М Андросової і О. Г. Возняк [1–5, 11–15]. Для таких рівнянь побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК), досліджено його властивості і за їх допомогою доведено теореми про існування та єдиність розв'язків задачі Коші та встановлено деякі якісні властивості розв'язків. Якщо ж коефіцієнти рівняння залежать від усіх змінних, тобто рівняння належить до класу $\mathbf{E}_{21}$, то побудова і дослідження ФРЗК істотно ускладнюється. Крім традиційних, виникають серйозні труднощі, які пов'язані з виродженістю рівнянь. С. Д. Івасишен, модифікувавши відповідним чином поняття B-гельдеровості S. Polidoro [18], для рівнянь з класу $\mathbf{E}_{21}$ знайшов умови, за яких ним побудовано ФРЗК в некласичному сенсі, отримано відповідні оцінки і за їх допомогою доведено теореми про коректну розв'язність задачі Коші. Ці результати вперше опубліковано в монографії [16].

У працях авторів [6–10, 17] для параболічних рівнянь типу Колмогорова другого порядку розроблено нову модифікацію методу Леві та застосовано її до побудови класичного ФРЗК Z, отримання точних оцінок функції Z і її похідних. Тому природним є бажання одержати аналогічні результати для рівнянь з класу $\mathbf{E}_{21}$. Цьому й присвячена стаття.

Зауважимо, що при застосуванні методу Леві до рівнянь з класу $\mathbf{E}_{21}$ виникають оцінюючі функції у вигляді сум спеціальних рядів. Це є основною відмінністю від випадку рівнянь другого порядку. Тому, для скорочення викладу, в статті наводимо лише ті доведення, які вимагають видозмінення і модифікації методів, що застосовувались раніше для доведення відповідних властивостей оцінюючих функцій для рівнянь другого порядку.

1. Позначення і припущення. Нехай b, n, n_1, n_2 і n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_1 \ge n_2 \ge n_3 \ge 1$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$, $\mathbb{N}_j := \{1,\dots,j\}$, $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_j := \mathbb{N}_j \cup \{0\}$, $m_j = j + 1/(2b) - 1$, $j \in \mathbb{N}_3$, $M := \sum_{j=1}^{3} m_j n_j$. Будемо вважати, що просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x :=$

[*] i.p.medynsky@gmail.com

$:= (x_1, x_2, x_3)$, де компоненти $x_j := (x_{j1}, \dots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$. Відповідно до цього мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_j := (k_{j1}, \dots, k_{jn_j}) \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$, при цьому $|k| := \sum_{j=1}^{3} |k_j|$, $|k_j| := \sum_{\ell=1}^{n_j} k_{j\ell}$, $j \in \mathbb{N}_3$. Будемо користуватися такими позначеннями: $\Pi_H := \{(t, x) \mid t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; $\Delta_x^z f(\cdot, x, \cdot) := f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, z, \cdot)$, $\Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot, x, \cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot, x, \cdot)$, $s \in \mathbb{N}_3$, $z^{(0)} := x$, $z^{(1)} := (z_1, x_2, x_3)$, $z^{(2)} := (x_1, z_2, x_3)$, $z^{(3)} := (x_1, x_2, z_3)$, $x^{(1)} := (x_1, z_2, z_3)$, $x^{(2)} := (x_1, x_2, z_3)$, $X(t) := (X_1(t), X_2(t), X_3(t))$, $X_1(t) := \hat{x}_1$, $\hat{X}_2(t) := x_2 + t\hat{x}_1$, $X_3(t) := x_3 + tx_2' + 2^{-1}t^2 x_1'$, $t \in \mathbb{R}$, $\hat{x}_1 := (x_{11}, \dots, x_{1n_2})$, $x_1' :=$ $:= (x_{11}, \dots, x_{1n_3})$, $x_2' := (x_{21}, \dots, x_{2n_3})$, $X^{(1)}(t) := (\lambda_1, X_2(t), X_3(t))$, $X^{(2)}(t) :=$ $:= (\lambda_1, \lambda_2, X_3(t))$, $Z^{(s)}(t) := X(t)\big|_{x_s = z_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $Z^{(0)}(t) := X(t)$. Аналогічно будуємо параметричні точки $Y(t)$, $\Lambda(t)$ за відповідними точками y і λ.

У статті часто однаковими літерами (здебільшого літерами C і c) позначатимемо різні сталі, якщо їх величини нас не цікавлять.

Розглянемо рівняння

$$Lu(t, x) := (S - A(t, x, \partial_{x_1}))u(t, x) = 0, \qquad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де

$$S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}, \qquad A(t, x, \partial_{x_1}) := \sum_{|k_1| \le 2b} a_{k_1}(t, x)\partial_{x_1}^{k_1}.$$

Припускатимемо, що коефіцієнти a_{k_1}, $|k_1| \le 2b$, є комплекснозначними функціями на $\Pi_{[0,T]}$, які задовольняють такі умови:

(***i***) a_{k_1}, $|k_1| \le 2b$, є обмеженими й неперервними та існує така стала $\delta > 0$, що для довільних $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 := (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\mathrm{Re} \sum_{|k_1| = 2b} a_{k_1}(t, x)(i\sigma_1)^{k_1} \le -\delta |\sigma_1|^{2b};$$

(***ii***) a_{k_1}, $|k_1| \le 2b$, є гельдеровими за просторовими змінними в такому сенсі:

$$\exists H_1 > 0, \quad \exists \alpha_1 \in (0,1) \quad \forall \{(t, x), (t, z^{(1)})\} \subset \Pi_{[0,T]}:$$

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1} a(t, x)\right| \le H_1 |x_1 - z_1|^{\alpha_1}; \tag{2}$$

$$\exists H_2 > 0, \quad \exists \alpha_2 \in (m_1(m_2)^{-1}, (m_2)^{-1}] \quad \forall \{(t, x), (t, z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]},$$

$$\forall h \in [0, T]: \quad \left|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t, x)\right| \le H_2(h^{m_2\alpha_2} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha_2}); \tag{3}$$

$$\exists H_3 > 0, \quad \exists \alpha_3 \in (m_2(m_3)^{-1}, (m_2)^{-1}] \quad \forall \{(t, x), (t, z^{(3)})\} \subset \Pi_{[0,T]},$$

$$\forall h \in [0, T]: \quad \left|\Delta_{x_3}^{z_3} a(t, x)\right| \le H_3(h^{m_3\alpha_3} + |X_3(h) - z_3|^{\alpha_3}); \tag{4}$$

(***iii***) $\exists H_4 > 0 \quad \forall \{(t,x),(t,\xi^{(1)}),(t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]} \quad \forall h \in [0,T]:$

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1} \Delta_{x_s}^{z_s} a(t,x)\right| \le H_4 \left|x_1 - \xi_1\right|^{\alpha_1} (h^{m_s \alpha_s} + \left|X_s(h) - z_s\right|^{\alpha_s}), \qquad s \in \{2,3\}, \quad (5)$$

де a – будь-який з коефіцієнтів a_{k_1}, $|k_1| \le 2b$. В умові (***iii***) сталі α_1, α_2 і α_3 такі, як в умові (***ii***).

Використовуватимемо такі оцінюючі функції:

$$E_c^j(t,z_j) := \exp\{-ct^{1-jq}\left|z_j\right|^q\}, \quad t > 0, \; q := 2b(2b-1)^{-1}, \; z_j \in \mathbb{R}^{n_j}, \; j \in \mathbb{N}_3; \quad (6)$$

$$E_c^{(1)}(t,x_1,\xi_1) := E_c^1(t, X_1(t) - \xi_1),$$

$$E_c^{(2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) := \prod_{j=1}^{2} E_c^j(t, X_j(t) - \xi_j),$$

$$E_c^{(3)}(t,x,\xi) := \prod_{j=1}^{3} E_c^j(t, X_j(t) - \xi_j),$$

$$t > 0, \quad \{x_j, \xi_j\} \subset \mathbb{R}^{n_j}, \quad j \in \mathbb{N}_3, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n; \quad (7)$$

$$a_j^{(\chi,\tilde{C})}(t) := (\tilde{C}\Gamma(\chi)t^{\chi})^j (\Gamma(j\chi+1))^{-1}, \quad t > 0, \quad \tilde{C} > 0,$$

$$\chi \in (0,1), \; j \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \quad (8)$$

$$E_{c,\tilde{C}}^{(\chi,1)}(t,x_1,\xi_1) := E_c^1(t, x_1 - \xi_1) F_{c,\tilde{C}}^{(\chi,1)}(t,x_1,\xi_1),$$

$$F_{c,\tilde{C}}^{(\chi,1)}(t,x_1,\xi_1) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi,\tilde{C})}(t) E_{c\delta^j}^{(1)}(t,x_1,\xi_1), \quad t > 0, \quad \{x_1,\xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}; \quad (9)$$

$$E_{c,\tilde{C}}^{(\chi,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) := E_c^1(t, x_1 - \xi_1) F_{c,\tilde{C}}^{(\chi,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),$$

$$F_{c,\tilde{C}}^{(\chi,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi,\tilde{C})}(t) E_{c\delta^j}^{(2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),$$

$$t > 0, \quad \{x_j, \xi_j\} \subset \mathbb{R}^{n_j}, \quad j \in \mathbb{N}_2; \quad (10)$$

$$E_{c,\tilde{C}}^{(\chi,3)}(t,x,\xi) := E_c^1(t, x_1 - \xi_1) F_{c,\tilde{C}}^{(\chi,3)}(t,x,\xi),$$

$$F_{c,\tilde{C}}^{(\chi,3)}(t,x,\xi) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi,\tilde{C})}(t) E_{c\delta^j}^{(3)}(t,x,\xi), \quad \tilde{C} > 0, \quad t > 0, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n; \quad (11)$$

$$I_c := \int_{\mathbb{R}^n} E_c^{(3)}(t-\beta, x, \lambda) E_c^{(3)}(\beta - \tau, \lambda, \xi)((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M} \, d\lambda,$$

$$c > 0, \quad 0 \le \tau < \beta < t, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n; \quad (12)$$

$$I_c^{(\chi,\tilde{C})} := \int_{\mathbb{R}^n} E_c^{(3)}(t-\beta, x, \lambda) E_{c,\tilde{C}}^{(\chi,3)}(\beta - \tau, \lambda, \xi)((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M} \, d\lambda,$$

$$\chi \in (0,1], \quad c > 0, \quad \tilde{C} > 0, \quad 0 \le \tau < \beta < t, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n; \quad (13)$$

$$I_0^{s\ell} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(3)}(t-\beta, x-\lambda) E_c^{(3)}(\beta-\tau, \Lambda^{s\ell}(t-\beta), \xi)((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M}\, d\lambda\,; \quad (14)$$

$$I_1^{sr} := (t-\beta)^{-m_1 n_1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} E_c^{(1)}(t-\beta, x_1, \lambda_1) E_c^{(3)}(\beta-\tau, \Lambda^{sr}(t-\beta), \xi)\, d\lambda_1\,; \quad (15)$$

$$I_2^{sr} := (t-\beta)^{-m_1 n_1 - m_2 n_2} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} E_c^{(2)}(t-\beta, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) E_c^{(3)}(\beta-\tau, \Lambda^{sr}(t-\beta), \xi)\, d\lambda_1 d\lambda_2\,; \quad (16)$$

$$I_0^{(s\ell)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(3)}(t-\beta, x-\lambda) E_{c,\tilde{C}}^{(\chi,3)}(\beta-\tau, \Lambda^{s\ell}(t-\beta), \xi)((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M}\, d\lambda\,; \quad (17)$$

$$I_1^{(sr)} := (t-\beta)^{-m_1 n_1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} E_c^{(1)}(t-\beta, x_1, \lambda_1) E_{c,\tilde{C}}^{(\chi,3)}(\beta-\tau, \Lambda^{sr}(t-\beta), \xi)\, d\lambda_1\,; \quad (18)$$

$$I_2^{(s2)} := (t-\beta)^{-m_1 n_1 - m_2 n_2} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} E_c^{(2)}(t-\beta, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) E_{c,\tilde{C}}^{(\chi,3)}(\beta-\tau, \Lambda^{s2}(t-\beta), \xi)\, d\lambda_1 d\lambda_2\,. \quad (19)$$

У формулі (8) $\Gamma(\cdot)$ − ґамма-функція Ейлера, у формулах (14)−(19)

$$\Lambda^{s0}(t) := Z^{(s)}(t), \quad \Lambda^{s1}(t) := (\lambda_1, Z_2^{(s)}(t), Z_3^{(s)}(t)), \quad \Lambda^{s2}(t) := (\lambda_1, \lambda_2, Z_3^{(s)}(t))\,,$$

$$\Lambda^{s3}(t) := \lambda, \quad s \in \mathbb{Z}_3, \quad r \in \{2,3\}, \quad 0 \le \tau < \beta < t \le T, \quad \{x, z, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

2. Допоміжні твердження. Властивості оцінюючих функцій (6)−(11) наведено в наступній лемі.

Лема 1. *Правильні такі твердження:*

$$E_c^{(3)}(t, x, \xi) \le E_{c_1}^{(3)}(t, x, \xi), \quad t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < c_1 < c\,; \quad (20)$$

$$E_{c,\tilde{C}}^{(\chi,3)}(t, x, \xi) \le F_{c,\tilde{C}}^{(\chi,3)}(t, x, \xi), \quad t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad c > 0\,,$$

$$\tilde{C} > 0, \quad \chi \in (0,1]\,; \quad (21)$$

$$E_c^1(t-\beta, x_1-\lambda_1) E_c^1(\beta-\tau, \lambda_1-\xi_1) \le E_c^1(t-\tau, x_1-\xi_1)\,,$$

$$0 \le \tau < \beta < t \le T, \quad \{x_1, \lambda_1, \xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}\,; \quad (22)$$

$$E_c^{(2)}(t-\beta, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) E_c^{(2)}(\beta-\tau, \lambda_1, \lambda_2, \xi_1, \xi_2) \le$$

$$\le E_{c_1}^{(2)}(t-\tau, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2), \quad 0 \le \tau < \beta < t \le T\,,$$

$$\{x_s, \lambda_s, \xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_2, \quad c_1 = c\delta_1\,,$$

$$\delta_1 = \{1 - 2^{-2/(2b-1)}, 2^{-2/(2b-1)}\}\,; \quad (23)$$

$$E_c^{(3)}(t-\beta, x, \lambda) E_c^{(3)}(\beta-\tau, \lambda, \xi) \le E_{c_2}^{(3)}(t-\tau, x, \xi), \quad 0 \le \tau < \beta < t \le T\,,$$

$$\{x, \lambda, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad c_2 = c\delta_2, \quad \delta_2 = \{(1 - 2^{-2/(2b-1)})\delta_1, 2^{-2/(2b-1)}\}\,; \quad (24)$$

$$E_{2c}^{(3)}(t,x,\xi) \le E_c^{(1)}(t,x_1,\xi_1)E_c^{(3)}(t,x,\xi), \quad c>0, \quad t>0,$$

$$\{x_1,\xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n; \tag{25}$$

$$|X_s(t)-\xi_s|^{\alpha_s} E_c^s(t,X_s(t)-\xi_s) \le Ct^{m_s\alpha_s}E_{c_0}^s(t,X_s(t)-\xi_s),$$

$$t>0, \quad c_0<c, \quad \{x_s,\xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_3; \tag{26}$$

$$|X_s(t)-\xi_s|^{\alpha_s} E_c^{(3)}(t,x,\xi) \le Ct^{m_s\alpha_s}E_{c_0}^{(3)}(t,x,\xi),$$

$$t>0, \quad c_0<c, \quad \{x_s,\xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_3; \tag{27}$$

$$E_c^{(3)}(t-\tau,y^{(s)},\xi) \le CE_{c_0}^{(3)}(t-\tau,x,\xi),$$

$$0 \le \tau < \beta < t, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad c_0<c; \tag{28}$$

$$E_c^{(3)}(\beta-\tau,Z^{(\ell)}(t-\beta),\xi) \le CE_{c_0}^{(3)}(t-\tau,x,\xi),$$

$$0 \le \tau < t_1 \le \beta < t \le T, \quad \{x,z,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad c_0<c, \ \ell \in \mathbb{N}_3; \tag{29}$$

$$E_c^{(3)}(\beta-\tau,(\lambda_1,Z_2^{(\ell)}(t-\beta),Z_3^{(\ell)}(t-\beta)),\xi) \le$$

$$\le E_{-c_0}^{(1)}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E_{c_0}^{(3)}(t-\beta,x,\xi), \quad 0 \le \tau < t_1 \le \beta < t,$$

$$\{x,z,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad \ell \in \mathbb{N}_3, \ \{c_0,c_1\} \subset (0,c); \tag{30}$$

$$E_c^{(3)}(\beta-\tau,(\lambda_1,\lambda_2,Z_3^{(\ell)}(t-\beta)),\xi) \le$$

$$\le CE_c^1(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)E_c^2(\beta-\tau,\Lambda_2(\beta-\tau)-\xi_2)\times$$

$$\times E_{-c_1}^1(t-\beta,x_1-\lambda_1)E_{-c_2}^2(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)\times$$

$$\times E_{c_3}^3(t-\tau,X_3(t-\tau)-\xi_3), \quad 0 \le \tau < t_1 \le \beta < t,$$

$$\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}^{n_j}, \quad j \in \mathbb{N}_2, \ \{c_0,c_1,c_2\} \subset (0,c). \tag{31}$$

Тут $C>0$, *у формулі* (28) $y^{(s)}$ *– точка відрізку прямої, що сполучає точки* x *і* $z^{(s)}$, $s \in \mathbb{N}_3$, *у формулах* (28)–(31) $|x_s-z_s|^{1/m_s} \le (t-\tau)/4$, $s \in \mathbb{N}_3$, *а* $t_1 := (t+\tau)/2$.

Властивості інтегралів (12)–(19) наведено в наступній лемі.

Лема 2. *Правильні такі твердження:*

$$t^{-M}\int_{\mathbb{R}^n} E_c^{(3)}(t,x,\xi)\,d\xi = C, \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^n; \tag{32}$$

$$t^{-m_2n_2-m_3n_3}\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} E_c^{(3)}(t,x,\xi)d\xi_2 d\xi_3 \le C\,E_c^1(t,x_1-\xi_1),$$

$$t>0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \{x_1,\xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}; \tag{33}$$

$$t^{-m_3n_3}\int_{\mathbb{R}^{n_3}} E_c^{(3)}(t,x,\xi)\,d\xi_3 \le CE_c^{(2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),$$

$$t>0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \{x_s,\xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_2; \tag{34}$$

$$t^{-m_s n_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_s}} E_c^s(t, X_s(t) - \xi_s)\, d\xi_s = C, \quad t > 0, \quad \{x_s, \xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_3; \quad (35)$$

$$t^{-M} \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c,\tilde{C}}^{(\chi,3)}(t, x, \xi)\, d\xi \le C, \qquad t > 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n; \quad (36)$$

$$t^{-m_2 n_2 - m_3 n_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} E_{c,\tilde{C}}^{(\chi,3)}(t, x, \xi)\, d\xi_2 d\xi_3 \le C\, E_{c,\tilde{C}}^{(\chi,1)}(t, x_1, \xi_1),$$

$$t > 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad \{x_1, \xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}; \quad (37)$$

$$t^{-m_3 n_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} E_{c,\tilde{C}}^{(\chi,3)}(t, x, \xi) d\xi_3 \le C E_{c,\tilde{C}}^{(\chi,2)}(t, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2),$$

$$t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \{x_s, \xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \qquad s \in \mathbb{N}_2; \quad (38)$$

$$I_c \le C_1 (t-\tau)^{-M} E_{c_1}^{(3)}(t-\tau, x, \xi), \qquad 0 \le \tau \le \beta < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\varepsilon > 0, \quad c_1 = c(1-\varepsilon)\delta_2, \quad C_1 = 2^n \varepsilon^{-n} C; \quad (39)$$

$$I_c^{(\chi,\tilde{C})} \le C_1 (t-\tau)^{-M} E_{c_1,\tilde{C}}^{(\chi,3)}(t-\tau, x, \xi), \quad 0 \le \tau \le \beta < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$c_1 \text{ і } C_1 \text{ — такі, як у (39)}; \quad (40)$$

$$I_0^{s\ell} \le C(t-\tau)^{-M} E_{c_0}^{(3)}(t-\tau, x, \xi), \qquad 0 \le \tau < t_1 \le \beta < t,$$

$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad \{s, \ell\} \subset \mathbb{Z}_3,$$

$$\text{причому } \beta \in (\tau, t) \text{ для } \ell = 3; \quad (41)$$

$$I_1^{s1} \le C E_{c_0}^{(3)}(t-\tau, x, \xi), \quad 0 \le \tau < t_1 \le \beta < t,$$

$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad s \in \mathbb{Z}_3; \quad (42)$$

$$I_2^{s2} \le C E_{c_0}^{(3)}(t-\tau, x, \xi), \quad 0 \le \tau < t_1 \le \beta < t,$$

$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad s \in \mathbb{Z}_3; \quad (43)$$

$$I_c^{(\chi,\tilde{C})} \le C_1 (t-\tau)^{-M} E_{(c_1,\tilde{C}_1)}^{(\chi,3)}(t-\tau, x, \xi), \qquad 0 \le \tau \le \beta < t, \qquad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\varepsilon > 0, \quad c_1 = c(1-\varepsilon), \quad \tilde{C}_1 = \delta^{-n}\tilde{C}, \quad C_1 = 2^n \varepsilon^{-n} C; \quad (44)$$

$$I_0^{(s\ell)} \le C(t-\tau)^{-M} E_{c_0,\tilde{C}}^{(\chi,3)}(t-\tau, x, \xi), \quad 0 \le \tau < t_1 \le \beta < t,$$

$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \{s, \ell\} \subset \mathbb{Z}_3, \quad \chi \in (0,1),$$

$$\text{причому } \beta \in (\tau, t) \text{ для } \ell = 3; \quad (45)$$

$$I_1^{(s1)} \le C E_{c_0,\tilde{C}}^{(\chi,3)}(t-\tau, x, \xi), \quad 0 \le \tau < t_1 \le \beta < t,$$

$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad s \in \mathbb{Z}_3, \quad \chi \in (0,1); \quad (46)$$

$$I_2^{(s2)} \le C E_{c_0,\tilde{C}}^{(\chi,3)}(t-\tau, x, \xi), \quad 0 \le \tau < t_1 \le \beta < t,$$

$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad s \in \mathbb{Z}_3, \quad \chi \in (0,1). \quad (47)$$

У нерівності (39) *стала* δ_2 *така, як в оцінці* (24), *а стала* C *з рівності* (32).

При застосуванні методу Леві для побудови ФРЗК виникають інтегральні рівняння другого роду вольтеррівського типу вигляду

$$u(t,x) = f(t,x) + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\tau,\xi)u(\tau,\xi)\,d\xi, \qquad (t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}, \tag{48}$$

ядром яких є неперервна функція

$$K : P^0_{[t_0,T]} \to \mathbb{C}, \quad P^0_{[t_0,T]} := \left\{(t,x;\tau,\xi) \in \left(\Pi_{[t_0,T]} \times \Pi_{[t_0,T]}\right) \mid t-\tau > 0\right\}. \tag{49}$$

Відомо, що за відповідних умов на ядро K існує єдиний розв'язок рівняння (48) для довільної підходящої функції f, який визначається формулою

$$u(t,x) = f(t,x) + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} R(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi, \qquad (t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}. \tag{50}$$

Тут

$$R(t,x;\tau,\xi) := \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t,x;\tau,\xi), \qquad (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \tag{51}$$

$K_1 := K$, а K_m, $m > 1$, – повторні ядра, які визначаються рекурентним співвідношенням

$$K_m(t,x;\tau,\xi) = \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\beta,y)K_{m-1}(\beta,y;\tau,\xi)\,dy, \;\; (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}. \tag{52}$$

При використанні методики побудови ФРЗК, подібної до методики з [7, 8], виникають інтегральні рівняння типу (50) з різними ядрами. На першому етапі застосовується така лема.

Лема 3 ([16, лема 1.9]). *Якщо ядро* (49) *є неперервним і для нього справджується нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \le C_1(t-\tau)^{-M+\chi-1}E^{(3)}_{c_1}(t,x;\tau,\xi), \quad (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \tag{53}$$

з деякими сталими $C_1 > 0$, $c_1 > 0$ *і* $\chi \in (0,1)$, *то існує резольвента* (51), *яка є неперервною функцією і для якої справджується оцінка*

$$|R(t,x;\tau,\xi)| \le C_2\,(t-\tau)^{-M+\chi-1}\,E^{(\chi,3)}_{c_2,\tilde{C}_2}(t-\tau,x,\xi), \quad (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}. \tag{54}$$

Тут $C_2 > 0$, $\tilde{C}_2 > 0$ *і* $c_2 \in (0,c_1)$ *– деякі сталі.*

Оскільки на наступних етапах оцінююча функція для ядра K відповідного інтегрального рівняння має вигляд суми ряду, то використовуватимемо наступну лему.

Лема 4. *Якщо ядро* (49) *є неперервним і для нього справджується нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \le C_3(t-\tau)^{-M+\chi-1}E^{(\chi,3)}_{c_3,\tilde{C}_3}(t,x;\tau,\xi), \qquad (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \tag{55}$$

з деякими сталими $C_3 > 0$, $\tilde{C}_3 > 0$, $c_3 > 0$ *і* $\chi \in (0,1)$, *то існує резольвента* (51), *яка є неперервною функцією і для якої справджується оцінка*

$$|R(t,x;\tau,\xi)| \le C_4(t-\tau)^{-M+\chi-1}E^{(\chi,3)}_{c_4,\tilde{C}_4}(t-\tau,x,\xi), \quad (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \tag{56}$$

в якій $C_4 > 0$, $\tilde{C}_4 > 0$, $c_4 > 0$ *– деякі сталі, причому* $\tilde{C}_4 > \tilde{C}_3$, *а* $c_4 < c_3$.

3. Основні результати. Як і у випадку рівняння другого порядку, процедура побудови ФРЗК складається з трьох етапів. Нехай Z_j – це ФРЗК на етапі $j \in \mathbb{N}_3$. Результати першого, другого та заключного третього етапів побудови і дослідження ФЗРК для рівняння (1) містяться в наступних теоремах.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1) *виконуються умови* (***i***)–(***iii***), *в яких* x *замінено на* (x_1, y'), $y' := (y_2, y_3)$. *Тоді для цього рівняння існує ФРЗК* Z_1 *і правильними є такі твердження:*

$$\left|\partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E_{c_1,\tilde{C}_1}^{(m_1\alpha_1,3)}(t-\tau,x,\xi); \tag{57}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C\left|x_s - z_s\right|^{\alpha_s}(t-\tau)^{-M-M_k-m_s\alpha_s^0} \times$$
$$\times\left(E_{c_1,\tilde{C}_1}^{(m_1\alpha_1,3)}(t-\tau,x,\xi) + E_{c_1,\tilde{C}_1}^{(m_1\alpha_1,3)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right), \quad s \in \mathbb{N}_3; \tag{58}$$

$$\left|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E_{c_1,\tilde{C}_1}^{(m_1\alpha_1,3)}(t-\tau,x,\xi) \times$$
$$\times\left(h^{m_s\alpha_s} + \left|Y_s(h) - z_s\right|^{\alpha_s}\right), \qquad s \in \{2,3\}; \tag{59}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-M_k+m_1\alpha_1}, \qquad k \ne 0; \tag{60}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi\right| \le C\left|x_s - z_s\right|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-M_k+m_1\alpha_1-m_s\alpha_s^0}, \ k \ne 0; \tag{61}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^{k'} Z_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))\,d\xi_2 d\xi_3\right| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-m_1n_1-M_{k'}+m_2\alpha_2} E_{c_1,\tilde{C}_1}^{(m_1\alpha_1,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1), \quad k' \ne 0; \tag{62}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} Z_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\right| \le C(t-\tau)^{-m_1n_1-m_2n_2-m_3|k_3|+m_3\alpha_3} \times$$
$$\times E_{c_1,\tilde{C}_1}^{(m_1\alpha_1,2)}(t-\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2), \qquad k_3 \ne 0; \tag{63}$$

$$\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi_2\,d\xi_3 = 0, \qquad k' \ne 0; \tag{64}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \ne 0; \tag{65}$$

$$\partial_x^{k'} Z_1(t,x;\tau,\xi;y') = (-\partial_\xi)^{k'} Z_1(t,x;\tau,\xi;y'), \tag{66}$$

де $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $\alpha_1^0 \in (0,\alpha_1]$, $\{\alpha_2^0, \alpha_3^0\} \subset (0,1]$, $\{k,k'\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $m_1\left|k_1\right| \le 1$, *числа* h і α_s *такі, як вище.*

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (6) *виконуються умови* (***i***)–(***iii***), *в яких* x *замінено на* (x_1, x_2, y_3) *Тоді для цього рівняння існує ФРЗК* Z_2 *і справджуються оцінки*

$$\left|\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E_{c_2,\tilde{C}_2}^{(m_2\alpha_2,3)}(t-\tau,x,\xi); \tag{67}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\right| \le C\left|x_s - z_s\right|^{\alpha_s}(t-\tau)^{-M-M_k-m_s\alpha_s^0}\times$$

$$\times\left(E_{c_2,\tilde{C}_2}^{(m_2\alpha_2,3)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_2,\tilde{C}_2}^{(m_2\alpha_2,3)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right),\quad s\in\mathbb{N}_3\,; \tag{68}$$

$$\left|\Delta_{y_3}^{z_3}\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k}E_{c_2,\tilde{C}_2}^{(m_2\alpha_2,3)}(t-\tau,x,\xi)\times$$

$$\times\left(h^{m_3\alpha_3}+\left|Y_3(h)-z_3\right|^{\alpha_3}\right); \tag{69}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\,d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-M_k+\ell_k},\quad k\ne 0\,; \tag{70}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\,d\xi\right| \le$$

$$\le C\left|x_s-z_s\right|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-M_k+\ell_k-m_s\alpha_s^0},\qquad s\in\mathbb{N}_3,\quad k\ne 0\,; \tag{71}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^{k'}Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\,d\xi_2\,d\xi_3\right| \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-m_1n_1-M_{k'}+m_2\alpha_2}E_{c_2,\tilde{C}_2}^{(m_2\alpha_2,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1),\quad k'\ne 0\,; \tag{72}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^{k'}Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\,d\xi_2\,d\xi_3\right| \le C\left|x_s-z_s\right|^{\alpha_s^0}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-m_1n_1-M_{k'}+m_2\alpha_2-m_s\alpha_s^0}E_{c_2,\tilde{C}_2}^{(m_2\alpha_2,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1),\quad k'\ne 0\,, \tag{73}$$

а також рівності

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\,d\xi_3 = 0,\qquad k_3\ne 0\,, \tag{74}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3) = (-\partial_{\xi_3})^{k_3}Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3),\qquad k_3\ne 0\,, \tag{75}$$

в яких $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $y_3\in\mathbb{R}^{n_3}$, $z_s\in\mathbb{R}^{n_s}$, $s\in\mathbb{N}_3$, $\alpha_1^0\in(0,\alpha_1]$, $\alpha_2^0\in(0,\alpha_2]$, $\alpha_3^0\in(0,1]$, $\{k,k'\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, $m_1|k_1|+|k_2|\le 1$, *числа* h *і* α_s *такі, як вище,* $\ell_1 := m_1\alpha_1$, *якщо* $k_1\ne 0$, *а* $k'=0$, $\ell_2 := m_2\alpha_2$, *якщо* $k_1=0$, *а* $k'\ne 0$.

Теорема 3. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (10) *виконуються умови* (***i***)−(***iii***). *Тоді для цього рівняння існує ФРЗК* Z_3, *для якого справджуються оцінки*

$$\left|\partial_x^k Z_3(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k}E_{c_3,\tilde{C}_3}^{(m_3\alpha_3,3)}(t-\tau,x,\xi)\,, \tag{76}$$

$$\left|SZ_3(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-M-1}E_{c_3,\tilde{C}_3}^{(m_3\alpha_3,3)}(t-\tau,x,\xi)\,, \tag{77}$$

де $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $k=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n$, $m_1|k_1|+|k_2|+|k_3|\le 1$.

4. Про доведення тверджень з п. 2 і п. 3. Твердження (20)−(28) з леми 1 доведено в [16]. Установимо оцінки (29)−(31). Для цього використовуватимемо нерівності (1.3.9), (1.3.10) з [16, p. 25] і припущення, що $\beta\in[t_1,t)$ і $|x_\ell-z_\ell|^{1/m_\ell}\le(t-\tau)/4$, $\ell\in\mathbb{N}_3$.

Оскільки

$$Z_1^{(\ell)}(t) - X_1(t) = \delta_{1\ell}(z_1 - x_1)\,,$$

$$Z_2^{(\ell)}(t) - X_2(t) = \delta_{1\ell} t(\hat{z}_1 - \hat{x}_1) + \delta_{2\ell}(z_2 - x_2)\,,$$

$$Z_3^{(\ell)}(t) - X_3(t) = \delta_{1\ell} 2^{-1} t^2 (z_1' - x_1') + \delta_{2\ell} t(z_2' - x_2') + \delta_{3\ell}(z_3 - x_3)\,,$$

де $\delta_{k\ell}$ – символ Кронекера, $\{k, \ell\} \subset \mathbb{N}_3$, то

$$(\beta - \tau)^{1-q} \mid Z_1^{(\ell)}(t-\beta) - X_1(t-\beta) \mid^q =$$

$$= (\beta - \tau)^{1-q} |z_1 - x_1|^q \le 2^{-1/(2b-1)} =: d_1, \qquad \ell \in \mathbb{N}_3\,,$$

$$(\beta - \tau)^{1-2q} \left| Z_2^{(\ell)}(t-\beta) - X_2(t-\beta) \right|^q \le$$

$$\le 2^{q-1} (\beta - \tau)^{1-2q} ((t-\beta)^q |\hat{z}_1 - \hat{x}_1|^q + |z_2 - x_2|^q) \le$$

$$\le 2^{q-1} \left(2^{-1/(2b-1)} + 2^{-3(2b+1)/(2b-1)} \right) =$$

$$= 1 + 2^{-2(3b+1)/(2b-1)} =: d_2, \qquad \ell \in \mathbb{N}_3\,,$$

$$(\beta - \tau)^{1-3q} \left| Z_3^{(\ell)}(t-\beta) - X_3(t-\beta) \right|^q \le$$

$$\le 4^{q-1} (\beta - \tau)^{1-3q} (2^{-q} (t-\beta)^{2q} |z_1' - x_1'|^q + (t-\beta)^q |z_2' - x_2'|^q +$$

$$+ |z_3 - x_3|^q) \le 4^{q-1} (2^{-q} (\beta - \tau)^{1-q} |z_1 - x_1|^q +$$

$$+ (\beta - \tau)^{1-2q} |z_2 - x_2|^q + (\beta - \tau)^{1-3q} |z_3 - x_3|^q) \le$$

$$\le 2^{-1} + 2^{-(6b-1)/(2b-1)} + 2^{-(4b+1)/(2b-1)} =: d_3, \qquad \ell \in \mathbb{N}_3\,,$$

$$E_{c_1}^{(3)}(\beta - \tau, Z^{(\ell)}(t-\beta), \xi) = \exp\{-c[(\beta - \tau)^{1-q} \left| Z_1^{(\ell)}(t-\beta) - \xi_1 \right|^q +$$

$$+ (\beta - \tau)^{1-2q} \left| Z_2^{(\ell)}(t-\beta) + (\beta - \tau)\hat{Z}_1^{(\ell)}(t-\beta) - \xi_2 \right|^q +$$

$$+ (\beta - \tau)^{1-3q} \left| Z_3^{(\ell)}(t-\beta) + (\beta - \tau) Z_2^{(\ell)'}(t-\beta) + \right.$$

$$\left. + 2^{-1} (\beta - \tau)^2 Z_1^{(\ell)'} - \xi_3 \right|^q]\} = \exp\{-c[(\beta - \tau)^{1-q} \times$$

$$\times \left| (X_1(t-\beta) - \xi_1) + (Z_1^{(\ell)}(t-\beta) - X_1(t-\beta)) \right|^q + (\beta - \tau)^{1-2q} \times$$

$$\times \left| (X_2(t-\beta) + (\beta - \tau)\hat{X}_1(t-\beta) - \xi_2) + (\beta - \tau)(\hat{Z}_1^{(\ell)}(t-\beta) - \hat{X}_1(t-\beta)) + \right.$$

$$\left. + (Z_2^{(\ell)}(t-\beta) - X_2(t-\beta)) \right|^q + (\beta - \tau)^{1-3q} \left| (X_3(t-\beta) + \right.$$

$$+ (\beta - \tau) X_2'(t-\beta) + 2^{-1} (\beta - \tau)^2 X_1'(t-\beta) - \xi_3) + (Z_3^{(\ell)}(t-\beta) -$$

$$- X_3(t-\beta)) + (\beta - \tau)(Z_2^{(\ell)'}(t-\beta) - X_2'(t-\beta)) + 2^{-1} (\beta - \tau)^2 \times$$

$$\left. \times (Z_1^{(\ell)'}(t-\beta) - X_1'(t-\beta)) \right|^q]\} \le \exp\{-c[(\beta - \tau)^{1-q} (2^{1-q} \times$$

$$\times |X_1(t-\beta) - \xi_1|^q - \left| Z_1^{(\ell)}(t-\beta) - X_1(t-\beta) \right|^q) + (\beta - \tau)^{1-2q} \times$$

$$\times(4^{1-q}\left|X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{X}_1(t-\beta)-\xi_2\right|^q-2^{1-q}(\beta-\tau)^q\times$$

$$\times\left|\hat{Z}_1^{(\ell)}(t-\beta)-\hat{X}_1(t-\beta)\right|^q-\left|Z_2^{(\ell)}(t-\beta)-X_2(t-\beta)\right|^q)+(\beta-\tau)^{1-3q}\times$$

$$\times(8^{1-q}\left|(X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2X_1'(t-\beta)-\xi_3\right|^q-$$

$$-4^{1-q}\left|Z_3^{(\ell)}(t-\beta)-X_3(t-\beta)\right|^q-2^{1-q}(\beta-\tau)^q\times$$

$$\times\left|Z_2^{(\ell)'}(t-\beta)-X_2'(t-\beta)\right|^q-2^{-q}(\beta-\tau)^{2q}\times$$

$$\times\left|Z_1^{(\ell)'}(t-\beta)-X_1'(t-\beta)\right|^q)]\}\le C_1E_{c_1}(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi),$$

де $C_1=\exp\{c(d_1(1+2^{1-q}+2^{-q})+d_2(1+2^{1-q})+d_3\}$, а $c_1=8^{1-q}c$.

Для завершення доведення нерівності (29) запишемо

$$E_{c_1}^{(3)}(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)=\exp\{-c_1[(\beta-\tau)^{1-q}|x_1-\xi_1|^q+(\beta-\tau)^{1-2q}\times$$

$$\times\left|X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{x}_1-\xi_2\right|^q+(\beta-\tau)^{1-3q}\left|X_3(t-\beta)+\right.$$

$$\left.+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2x_1'-\xi_3\right|^2]\}=$$

$$=\exp\{-c[(\beta-\tau)^{1-q}|x_1-\xi_1|^q+(\beta-\tau)^{1-2q}\times$$

$$\times|X_2(t-\tau)-\xi_2|^q+(\beta-\tau)^{1-3q}|X_3(t-\tau)-\xi_3|^q]\}\le$$

$$\le E_{c_1}^{(3)}(t-\tau,x,\xi),$$

і нерівність (29) доведено.

Твердження (30) і (31) доводимо аналогічно до (29). Оскільки

$$E_c^{(3)}(\beta-\tau,(\lambda_1,Z_2^{(\ell)}(t-\beta),Z_3^{(\ell)}(t-\beta)),\xi)=\exp\{-c[(\beta-\tau)^{1-q}|\lambda_1-\xi_1|^q+$$

$$+(\beta-\tau)^{1-2q}\left|Z_2^{(\ell)}(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2\right|^q+(\beta-\tau)^{1-3q}\times$$

$$\times\left|Z_3^{(\ell)}(t-\beta)+(\beta-\tau)Z_2^{(\ell)'}(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3\right|^q]\}$$

і

$$E_c^{(3)}(\beta-\tau,(\lambda_1,\lambda_2,Z_3^{(\ell)}(t-\beta)),\xi)=\exp\{-c[(\beta-\tau)^{1-q}|\lambda_1-\xi_1|^q+$$

$$+(\beta-\tau)^{1-2q}\left|\Lambda_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2\right|^q+$$

$$+(\beta-\tau)^{1-3q}\left|Z_3^{(\ell)}(t-\beta)+(\beta-\tau)\lambda_2'+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3\right|^q]\},$$

то маємо такі нерівності:

$$\left|Z_3^{(\ell)}(t-\beta)+(\beta-\tau)Z_2^{(\ell)'}(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3\right|^q=$$

$$=\left|Z_3^{(\ell)}(t-\beta)+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3+\right.$$

$$\left.+(\beta-\tau)(Z_2^{(\ell)'}(t-\beta)-X_2'(t-\beta))\right|^q\ge 2^{1-q}\left|Z_3^{(\ell)}(t-\beta)+\right.$$

$$\left.+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3\right|^2-(\beta-\tau)^q\times$$

$$\times \left| Z_2^{(\ell)'}(t-\beta) - X_2'(t-\beta) \right|^q \geq 4^{1-q} \left| X_3(t-\beta) + (\beta-\tau) \times \right.$$

$$\left. \times X_2'(t-\beta) + 2^{-1}(\beta-\tau)^2 \lambda_1' - \xi_3 \right|^q - 2^{1-q} \left| Z_3^{(\ell)}(t-\beta) - \right.$$

$$\left. - X_3(t-\beta) \right|^q - (\beta-\tau)^q \left| Z_2^{(\ell)'}(t-\beta) - X_2'(t-\beta) \right|^q, \quad \ell \in \mathbb{N}_3,$$

$$\left| Z_2^{(\ell)}(t-\beta) + (\beta-\tau)\hat{\lambda}_1 - \xi_2 \right|^q =$$

$$= \left| (X_2(t-\beta) + (\beta-\tau)\hat{\lambda}_1 - \xi_2) + (Z_2^{(\ell)}(t-\beta) - X_2(t-\beta)) \right|^q \geq$$

$$\geq 2^{1-q} \left| X_2(t-\beta) + (\beta-\tau)\hat{\lambda}_1 - \xi_2 \right|^q -$$

$$- \left| Z_2^{(\ell)}(t-\beta) - X_2(t-\beta) \right|^q, \qquad \ell \in \mathbb{N}_3,$$

і

$$\left| Z_3^{(\ell)}(t-\beta) + (\beta-\tau)\lambda_2' + 2^{-1}(\beta-\tau)^2 \lambda_1' - \xi_3 \right|^q =$$

$$= \left| (X_3(t-\beta) + (\beta-\tau)\lambda_2' + 2^{-1}(\beta-\tau)^2 \lambda_1' - \xi_3) + \right.$$

$$\left. + (Z_3^{(\ell)}(t-\beta) - X_3(t-\beta)) \right|^q \geq 2^{1-q} \left| X_3(t-\beta) + (\beta-\tau)\lambda_2' + \right.$$

$$\left. + 2^{-1}(\beta-\tau)^2 \lambda_1' - \xi_3 \right|^q - \left| Z_3^{(\ell)}(t-\beta) - X_3(t-\beta) \right|^q,$$

Твердження (30) є наслідком з нерівностей

$$(\beta-\tau)^{1-2q} \left| X_2(t-\beta) + (\beta-\tau)\hat{\lambda}_1 - \xi_2 \right|^q = (\beta-\tau)^{1-2q} \left| (X_2(t-\tau) - \xi_2) + \right.$$

$$\left. + (\beta-\tau)(\hat{\lambda}_1 - \hat{x}_1) \right|^q \geq 2^{1-q}(t-\tau)^{1-2q} \left| X_2(t-\tau) - \xi_2 \right|^q -$$

$$- (t-\beta)^{1-q} \left| \lambda_1 - x_1 \right|^q,$$

$$(\beta-\tau)^{1-3q} \left| X_3(t-\beta) + (\beta-\tau)X_2'(t-\beta) + 2^{-1}(\beta-\tau)^2 \lambda_1' - \xi_3 \right|^q =$$

$$= (\beta-\tau)^{1-3q} \left| x_3 + (t-\beta)x_2' + 2^{-1}(t-\beta)^2 x_1' + (\beta-\tau)x_2' + \right.$$

$$+ (\beta-\tau)(t-\beta)x_1' + 2^{-1}(\beta-\tau)^2 x_1' - \xi_3 +$$

$$\left. + 2^{-1}(\beta-\tau)^2(\lambda_1' - x_1') \right|^q \geq 2^{1-q}(t-\tau)^{1-3q} \left| X_3(t-\tau) - \xi_3 \right|^q -$$

$$- 2^{-q}(t-\beta)^{1-q} \left| x_1 - \lambda_1 \right|^q.$$

Аналогічно з нерівності

$$\left| X_3(t-\beta) + (\beta-\tau)\lambda_2' + 2^{-1}(\beta-\tau)^2 \lambda_1' - \xi_3 \right|^q =$$

$$= \left| (X_3(t-\tau) - \xi_3) + (\beta-\tau)(\lambda_2' - X_2'(t-\beta)) + \right.$$

$$\left. + 2^{-1}(\beta-\tau)^2(\lambda_1' - x_1') \right|^q \geq 4^{1-q} \left| X_3(t-\tau) - \xi_3 \right|^q -$$

$$- 2^{1-q}(\beta-\tau)^q \left| \lambda_2' - X_2'(t-\beta) \right|^q - 2^{-q}(\beta-\tau)^{2q} \left| \lambda_1' - x_1' \right|^q$$

отримаємо (31) з $c_1 = 4^{1-q}c$, $c_2 = 2^{1-q}c$, $c_3 = c_1$.

Перейдемо до д о в е д е н н я тверджень леми 2. Оцінки (32)–(35) і (39) доведено в [16]. Доведемо нерівності (36)–(38). Спочатку наведемо деякі співвідношення для коефіцієнтів ряду (11), які визначаються формулами (8). Нехай $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ – деякі сталі, $C = \max\{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2\}$, а $\tilde{C}_3 = 2eC$. Для заданого числа $\chi \in (0,1)$ позначимо через j_0 найменше натуральне число, для якого справджується нерівність $j_0\chi \ge 1$. Використовуватимемо ще такі позначення: $C_0^\chi := \max\limits_{1 \le j \le j_0} \{\Gamma(j\chi+1)(\Gamma((j+1)\chi+1))^{-1}\}$, $C(\chi) := \tilde{C}_1 \Gamma(\chi) C_0^\chi$. Тоді

$$\tilde{C}_1^\ell a_\ell^{(\chi,\tilde{C}_2)}(t) = a_\ell^{(\chi,\tilde{C}_1\tilde{C}_2)}(t), \qquad t > 0, \qquad \ell \in \mathbb{N}, \tag{78}$$

$$a_\ell^{(\chi,\tilde{C}_1)}(t) \le a_\ell^{(\chi,\tilde{C}_2)}(t), \qquad \tilde{C}_1 < \tilde{C}_2, \qquad t > 0, \qquad \ell \in \mathbb{N}, \tag{79}$$

$$a_{\ell+1}^{(\chi,\tilde{C}_1)}(t) \le C(\chi) t^\chi a_\ell^{(\chi,\tilde{C}_1)}(t), \qquad t > 0, \qquad \ell \in \mathbb{N}, \tag{80}$$

$$a_\ell^{(\chi,\tilde{C}_1)}(t) a_j^{(\chi,\tilde{C}_2)}(t) \le a_{j+\ell}^{(\chi,\tilde{C}_3)}(t), \qquad t > 0, \qquad \{j, \ell\} \subset \mathbb{N}. \tag{81}$$

Співвідношення (78)–(80) безпосередньо випливають з означення (8). Доведемо нерівність (81). Розглянемо спершу випадок $\ell \le j$. Маємо

$$\begin{aligned} a_\ell^{(\chi,\tilde{C}_1)}(t) a_j^{(\chi,\tilde{C}_2)}(t) &\le a_\ell^{(\chi,\tilde{C})}(t) a_j^{(\chi,\tilde{C})}(t) = (\tilde{C}\Gamma(\chi)t^\chi)^{\ell+j} (\Gamma(\ell\chi+1)\Gamma(j\chi+1))^{-1} = \\ &= (\tilde{C}\Gamma(\chi)t^\chi)^{\ell+j} (\Gamma((j+\ell)\chi+2))^{-1} (\mathbf{B}(\ell\chi+1, j\chi+1))^{-1} = \\ &= a_{j+\ell}^{(\chi,\tilde{C})}(t)((j+\ell)\chi+1)(\mathbf{B}(\ell\chi+1, j\chi+1))^{-1}, \end{aligned}$$

де $\mathbf{B}(\cdot,\cdot)$ – бета-функція Ейлера. Оцінимо знизу добуток

$$\begin{aligned} &((j+\ell)\chi+1)(\mathbf{B}(\ell\chi+1, j\chi+1))^{-1} \ge \\ &\ge ((j+\ell)\chi+1) \int\limits_{2^{-1}((j+\ell)\chi+1)^{-1/(\ell\chi+1)}}^{((j+\ell)\chi+1)^{-1/(\ell\chi+1)}} s^{\ell\chi}(1-s)^{j\chi}\, ds \ge \\ &\ge ((j+\ell)\chi+1) \left(2^{-1}((j+\ell)\chi+1)^{-1/(\ell\chi+1)}\right)^{\ell\chi} \times \\ &\times \left(1 - ((j+\ell)\chi+1)^{-1/(\ell\chi+1)}\right)^{j\chi} \int\limits_{2^{-1}((j+\ell)\chi+1)^{-1/(\ell\chi+1)}}^{((j+\ell)\chi+1)^{-1/(\ell\chi+1)}} ds \ge \\ &\ge 2^{-1-\ell\chi} \left(1 - ((j+\ell)\chi+1)^{-1/(\ell\chi+1)}\right)^{[((j+\ell)\chi+1)^{1/(\ell\chi+1)}]^{(\ell\chi+1)}} \ge \\ &\ge (2e)^{-(\ell\chi+1)} \ge (2e)^{-(\ell+j)}. \end{aligned}$$

Отже, нерівність (81) справджується для $\ell \le j$, при цьому $\tilde{C}_3 = (2e)^{(\ell+j)}\tilde{C}$. Протилежний випадок $\ell > j$ розглядається аналогічно.

За допомогою означень (7)–(11) та оцінок (32)–(34) маємо

$$\begin{aligned} t^{-M} \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c,\tilde{C}}^{(\chi,3)}(t,x,\xi)\, d\xi &\le t^{-M} \int\limits_{\mathbb{R}^n} F_{c,\tilde{C}}^{(\chi,3)}(t,x,\xi)\, d\xi \le \sum_{j=0}^\infty a_j^{(\chi,\tilde{C})}(t) t^{-M} \times \\ &\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c\delta^j}^{(3)}(t,x,\xi)\, d\xi = t^{-M} \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(3)}(t,x,\xi)\, d\xi \sum_{j=0}^\infty a_j^{(\chi,\tilde{C})}(t) \delta^{-nj/q} = \\ &= C_1 F_0^{(\chi,\tilde{C}_1)}(t), \qquad F_0^{(\chi,\tilde{C}_1)}(t) = \sum_{j=0}^\infty a_j^{(\chi,\tilde{C}_1)}(t), \end{aligned} \tag{82}$$

$$t^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} E^{(\chi,3)}_{c,\tilde{C}}(t,x,\xi)\,d\xi_2\,d\xi_3 = t^{-M}E^1_c(t,x_1-\xi_1)\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi,\tilde{C})}(t)\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} E^{(3)}_{c\delta^j}(t,x,\xi)\,d\xi_2\,d\xi_3 =$$

$$= t^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} E^{(3)}_{c}(t,x,\xi)\,d\xi_2\,d\xi_3\times$$

$$\times E^1_c(t,x_1-\xi_1)\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi,\tilde{C}_2)}(t)E^{(1)}_{c\delta^j}(t,x,\xi) = C_2\,E^{(\chi,1)}_{c,\tilde{C}_2}(t,x_1,\xi_1)\,,$$

$$\tilde{C}_2 = C_2\delta^{-(n_2+n_3)/q}\,, \tag{83}$$

$$t^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} E^{(\chi,3)}_{c,\tilde{C}}(t,x,\xi)\,d\xi_3 = t^{-M}E^1_c(t,x_1-\xi_1)\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi,\tilde{C})}(t)\times$$

$$\times E^{(2)}_{c\delta^j}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} E^3_{c\delta^j}(t,X_3(t)-\xi_3)d\xi_3 =$$

$$= C_3\,E^{(\chi,2)}_{c,\tilde{C}_3}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),\qquad \tilde{C}_3 = \tilde{C}\delta^{-n_3/q}\,. \tag{84}$$

В оцінках (82)–(84) сталі C_j, $j\in\mathbb{N}_3$, такі, як у рівностях (32)–(34) відповідно. З нерівностей (82)–(84) випливають оцінки (36)–(38). Оцінка (40) є наслідком (39).

Беручи до уваги нерівності

$$E^{(3)}_c(t,z^{(r)},\xi) = \exp\{-c\,[t^{1-q}\,|(x_1-\xi_1)+\delta_{r1}(z_1-x_1)|^q +$$

$$+t^{1-2q}\,|(X_2(t)-\xi_2)+t\delta_{r1}(\hat{z}_1-\hat{x}_1)+\delta_{r2}(z_2-x_2)|^q +$$

$$+t^{1-3q}\,\Big|(X_3(t)-\xi_3)+2^{-1}t^2\delta_{r1}(z_1'-x_1')+\delta_{r2}t(z_2'-x_2')+$$

$$+\delta_{r3}(z_3-x_3)\Big|^q]\}\le \exp\{-c\,[2^{1-q}t^{1-q}\,|x_1-\xi_1|^q -$$

$$-\delta_{r1}t^{1-q}\,|z_1-x_1|^q + 4^{1-q}t^{1-2q}\,|X_2(t)-\xi_2|^q -$$

$$-2^{1-q}t^{1-q}\delta_{r1}|\hat{z}_1-\hat{x}_1|^q - \delta_{r2}t^{1-2q}\,|z_2-x_2|^2 + 8^{1-q}t^{1-3q}\times$$

$$\times|X_3(t)-\xi_3|^2 - \delta_{r1}4^{1-q}t^{1-q}\,|z_1'-x_1'|^q + \delta_{r2}t^{1-2q}\times$$

$$\times|z_2'-x_2'|^q - \delta_{r3}t^{1-3q}\,|z_3-x_3|^q]\}\le C_1E^{(3)}_{c_1}(t,x,\xi)\,,$$

$$C_1 = \exp\{c(d_1(1+2^{1-q}+2^{-q})+d_2(1+2^{1-q})+d_3\},\qquad c_1 = 8^{1-q}c\,,$$

та нерівності (20), отримуємо

$$E^{(3)}_c(t,z^{(r)},\xi)\le C_1E^{(3)}_{c_1}(t,x,\xi),\qquad t>0,\qquad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\qquad r\in\mathbb{Z}_3\,.$$

З цієї нерівності та оцінок (29)–(31) випливає, що твердження (41) досить довести для $r=s=0$, тобто оцінити інтеграли $I_0^{0\ell}$, $\ell\in\mathbb{N}_3$. Доведення оцінок (41)–(43) для інтегралів $I_0^{s\ell}$, $I_1^{s\ell}$, $\ell\in\mathbb{Z}_3$, та I_2^{s2}, $s\in\mathbb{Z}_3$, проводимо аналогічно до відповідних доведень з праці [10]. За допомогою цих оцінок, а також означення (11) оцінюючої функції отримуємо оцінки (44)−(47).

Доведемо лему 4. Подібно до доведення леми 3, отримуємо, що ряд (51) мажорується рядом

$$C_0\,(t-\tau)^{-M-1}\left(\sum_{m=1}^{m_0}(t-\tau)^{m\chi}\,E^{(\chi,3)}_{c,\tilde{C}_1}(t,x;\tau,\xi)+\right.$$

$$\left.+\sum_{\ell=1}^{\infty}a_\ell^{(\chi,C_2)}(t-\tau)E^{(\chi,3)}_{c,C_1}(t,x;\tau,\xi)\right)=:$$

$$=:C_0\,(t-\tau)^{-M-1}\,(R_1+R_2)\,. \tag{85}$$

Доданок R_1 має потрібну оцінку:

$$R_1\le(t-\tau)^{\chi}\left(\sum_{m=1}^{m_0}T^{(m-1)\chi}\right)E^{(\chi,3)}_{c,\tilde{C}_1}(t,x;\tau,\xi)=$$

$$=C_1\,(t-\tau)^{\chi}\,E^{(\chi,3)}_{c,\tilde{C}_1}(t,x;\tau,\xi)\,. \tag{86}$$

Для оцінки R_2 використовуємо нерівності (20), (78)−(81):

$$R_2=E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)\sum_{\ell=1}^{\infty}a_\ell^{(\chi,\tilde{C}_2)}(t-\tau)\sum_{j=0}^{\infty}a_j^{(\chi,\tilde{C}_1)}(t-\tau)E^{(3)}_{c\delta^j}(t-\tau,x,\xi)\le$$

$$\le E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)a_0^{(\chi,\tilde{C}_3)}(t-\tau)\sum_{\ell=1}^{\infty}a_\ell^{(\chi,\tilde{C}_3)}(t-\tau)E_c^{(3)}(t-\tau,x,\xi)+$$

$$+E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}a_\ell^{(\chi,\tilde{C}_2)}(t-\tau)a_{j-\ell+1}^{(\chi,\tilde{C}_1)}(t-\tau)\times$$

$$\times E^{(3)}_{c\delta^{j-\ell+1}}(t-\tau,x,\xi)\le C_2E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)(t-\tau)^{\chi}\sum_{\ell=0}^{\infty}a_\ell^{(\chi,\tilde{C}_3)}(t-\tau)\times$$

$$\times E^{(3)}_{c\delta^{\ell}}(t-\tau,x,\xi)+E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)\sum_{j=1}^{\infty}a_{j+1}^{(\chi,2\tilde{C}_3)}(t-\tau)\times$$

$$\times E^{(3)}_{c\delta^{j+1}}(t-\tau,x,\xi)\sum_{\ell=1}^{j}2^{-\ell}\le(C_2+C(\chi))(t-\tau)^{\chi}E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{\infty}a_j^{(\chi,2\tilde{C}_3)}(t-\tau)E^{(3)}_{c_1\delta^j}(t-\tau,x,\xi)=$$

$$=\big(C_2+C(\chi)\big)(t-\tau)^{\chi}E^{(\chi,3)}_{c_1,2\tilde{C}_3}(t-\tau,x,\xi),\quad c_1=c\delta\,. \tag{87}$$

З оцінок (85)−(87) випливає оцінка (56), в якій $C_4=C_0\max\{C_1,C_2+C(\chi)\}$ $\tilde{C}_4=2\tilde{C}_3$, а $c_4=c\delta$, $c<c_3$, $0<\delta<1$.

ФРЗК Z_j, $j\in\mathbb{N}_3$, визначаються наведеними у вступі до праці [10] формулами (3), (7) і (11), у яких G_j − параметрикс, а W_j − відповідний об'ємний потенціал з невідомою густиною Q_j. Тому доведення теорем 1−3 зводиться до визначення та дослідження властивостей функцій G_j, Q_j і W_j. Це проводиться аналогічно до відповідних досліджень з [10, 11] для випадку рівнянь другого порядку з урахування властивостей оцінюючих функцій.

Зауваження 1. *Сталі* c_j, $j \in \mathbb{N}_3$, *які визначають відповідні оцінюючі функції* $E^{(m_j\alpha_j,3)}_{c_j,\tilde{C}_j}(t,x,\xi)$, $t>0$, $\{x,\xi\}\in\mathbb{R}^n$, $j\in\mathbb{N}_3$, *що входять в оцінки ФРЗК* Z_j, $j\in\mathbb{N}_3$, *та його похідних, є різними, при цьому* $c_1>c_2>c_3$, *а* $\tilde{C}_1<\tilde{C}_2<\tilde{C}_3$. *Тому, враховуючи означення* (11) *і співвідношення між показниками Гельдера, маємо такі нерівності*:

$$E^{(m_1\alpha_1,3)}_{c_1,\tilde{C}_1}(t,x,\xi) < E^{(m_2\alpha_2,3)}_{c_2,\tilde{C}_2}(t,x,\xi) < E^{(m_3\alpha_3,3)}_{c_3,\tilde{C}_3}(t,x,\xi), \quad t>0, \quad \{x,\xi\}\in\mathbb{R}^n.$$

Зауваження 2. *Розглянемо рівняння* (1), *в якому диференціальний вираз* $A(t,x,\partial_{x_1}) = \sum\limits_{\|k_1\|\le 2b} a_{k_1}(t,x)\partial^{k_1}_{x_1}$, b *– найменше спільне кратне заданих чисел* $\{b_1,\ldots,b_n\}\subset\mathbb{N}$, $\|k_1\| := \sum\limits_{j=1}^{n_1} m_j k_{1j}$, *де* $m_j := b/b_j$, $j\in\mathbb{N}_{n_1}$. *Такі рівняння в* [16] *названо виродженими рівняннями типу Колмогорова з* $\overrightarrow{2b}$ *-параболічною головною частиною за основними змінними* (*рівняння з класу* $\mathbf{E}_{23}$). *Як випливає з результатів* [16] *для цих рівнянь, структура оцінюючих функцій аналогічна до структури функції* $E^{(3)}_c(t,x,\xi)$, $t>0$, $\{x,\xi\}\in\mathbb{R}^n$, $c>0$, *яка розглянута в цій статті. Відмінність лише в тому, що, якщо функція* $E^{(3)}_c$ *має анізотропію за трьома групами просторових змінних, то у випадку рівняння з класу* $\mathbf{E}_{23}$ *відповідна оцінююча функція має ще анізотропію за всіма просторовими змінними в межах кожної групи. Очевидно, що вказана відмінність не створює значних труднощів при застосуванні цієї методики побудови ФРЗК для рівнянь з указаного класу. Тому, якщо підправити відповідним чином умови* (***i***)–(***iii***) *на коефіцієнти рівняння* (1), *то отримаємо результати для рівнянь з класу* $\mathbf{E}_{23}$, *аналогічні* до *теорем 1–3*.

Висновки. У статті запропоновано умови на коефіцієнти вироджених рівнянь типу Колмогорова довільного порядку з двома групами змінних виродження, за яких новою модифікацією класичного методу Леві побудовано ФРЗК та одержано оцінки цього розв'язку і його похідних. Отримані оцінки є менш точними, ніж оцінки з [10–11] для рівнянь другого порядку, оскільки оцінюючими функціями в них є не експоненти, а ряди з експонент, типи спадання яких прямують до нуля. Результати статті знайдуть застосування до встановлення коректної розв'язності та інтегрального зображення розв'язків задачі Коші для рівнянь з розглядуваних класів.

1. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь та їх застосування // Доп. НАН України. – 1996. – № 10. – С. 11–16.
2. *Ейдельман С. Д., Тичинська Л. М.* Побудова фундаментальних розв'язків деяких вироджених параболічних рівнянь довільного порядку // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1979. – № 11. – С. 896–899.
3. *Ивасишен С. Д.* О начальных значениях решений ультрапараболических уравнений // Успехи мат. наук. – 1988. – **43**, № 4 (262). – С. 188–189.
4. *Ивасишен С. Д., Андросова Л. Н.* Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 3. – С. 479–487.
5. *Івасишен С. Д., Андросова Л. М.* Про інтегральне зображення та початкові значення розв'язків деяких параболічних рівнянь, що вироджуються // Доп. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 1. – С. 16–19.

6. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження // Буков. мат. журн. – 2014. – **2,** № 2-3. – С. 94–106.
7. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. I // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60,** № 3. – С. 9–31.
8. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. II // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60,** № 4. – С. 7–24.
9. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Диференц. рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. В. А. Михайлець. – 2016. – **13**, № 1. – С. 108–155.
10. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59,** № 2. – С. 28–42.
    Те саме: *Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I. P.* On the classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables // J. Math. Sci. – 2018. – **231**, No. 4. – P. 507–526.
    – DOI 10.1007/s10958-018-3830-0.
11. *Малицкая А. П.* О вырождающихся параболических уравнениях с возрастающими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 176–181.
    Те саме: *Malitskaya A. P.* Degenerate parabolic equations whose coefficients are increasing // Ukr. Math. J. – 1989. – **41**, No. 1. – P. 158–163.
    – https://doi.org/10.1007/BF01060380.
12. *Малицкая А. П.* Построение фундаментального решения для одного класса вырождающихся параболических уравнений высокого порядка // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 6. – С. 754–762.
    Те саме: *Malitskaya A. P.* Construction of a fundamental solution for a class of high-order degenerate parabolic equations // Ukr. Math. J. – 1980. – **32**, No. 6. – P. 509–514.
    – https://doi.org/10.1007/BF01087180.
13. *Малицкая А. П.* Построение фундаментальных решений некоторых ультрапараболических уравнений высокого порядка // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 6. – С. 713–718.
    Те саме: *Malitskaya A. P.* Structure of the fundamental solutions of ultraparabolic equations of high-order // Ukr. Math. J. – 1985. – **37**, No. 6. – P. 582–587.
    – https://doi.org/10.1007/BF01057424.
14. *Малицкая А. П.* Фундаментальные решения одного класса вырождающихся параболических уравнений // Приближенные методы интегрирования дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Киев. пед. ин-т, 1973. – С. 109–130.
15. *Эйдельман С. Д., Малицкая А. П.* О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 7. – С. 1316–1330.
16. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.
    https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9.
17. *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* On applications of the Levi method in the theory of parabolic equations // Мат. студії. – 2017. – **47**, № 1. – С. 33–46.
    – https://doi.org/10.15330/ms.47.1.33-46.
18. *Polidoro S.* On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov – Fokker – Planck type // Le Matematiche. – 1994. – **49**, No. 1. – P. 53–105.

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОЛМОГОРОВА ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Рассмотрены вырожденные параболические уравнения типа Колмогорова произвольного порядка с двумя группами пространственных переменных вырождения и коэффициентами, зависящими от всех переменных. Для таких уравнений построено классическое фундаментальное решение задачи Коши. Получены оценки этого решения и его производных.

Ключевые слова: *параболическое уравнение произвольного порядка, вырожденное параболическое уравнение типа Колмогорова, фундаментальное решение задачи Коши, метод Леви.*

THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR DEGENERATED PARABOLIC KOLMOGOROV TYPE EQUATIONS OF ARBITRARY ORDER

The degenerated parabolic Kolmogorov type equations of arbitrary order with two groups spatial variables of degeneration and coefficients depend on all variables are considered. The classical fundamental solution of the Cauchy problem for these equations is constructed. The estimates of this solution and its derivatives are obtained.

Key words: *parabolic equation of arbitrary order, degenerated parabolic Kolmogorov type equation, fundamental solution of the Cauchy problem, Levi method.*

[1] Нац. техн. ун-т України
«Київ. політех. ін-т ім. І. Сікорського», Київ,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
20.02.19