УДК 517.95

А. О. Лопушанський[1,2], Г. П. Лопушанська[3*]

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ У ВАГОВИХ РОЗПОДІЛАХ ПРАВОЇ ЧАСТИНИ РІВНЯННЯ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

Вивчається обернена задача Коші для рівняння дифузії з дробовими похідними та узагальненими функціями у правих частинах. Задача полягає у знаходженні узагальненого розв'язку прямої задачі і залежного від часу невідомого множника з простору вагових розподілів у правій частині рівняння. Встановлено однозначну розв'язність задачі.

Ключові слова: *узагальнена функція, похідна дробового порядку, обернена задача, вектор-функція Ґріна.*

Вступ. Різні задачі для диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь, зокрема з дробовими похідними, з узагальненими функціями у правих частинах активно вивчаються (див. [1, 4, 8–10, 15, 22, 25] і бібліографію). Рівняння з дробовими похідними та обернені задачі для них часто зустрічаються в різних прикладних дослідженнях процесів у матеріалах з пам'яттю (в'язкопружні матеріали, гетерогенні середовища тощо).

Умови класичної розв'язності задачі Коші для дифузійно-хвильових рівнянь і крайових задач для рівнянь із регуляризованими дробовими похідними за часом одержано в [3, 5, 7, 14, 16, 23, 24] та інших працях. У зв'язку з застосуваннями вивчаються обернені задачі для таких рівнянь із різними невідомими функціями та параметрами (див. оглядову статтю [20] та бібліографію). Найбільше робіт по обернених задачах – з невідомими правими частинами рівнянь, в основному при регулярних даних (див., наприклад, [6, 11–13, 18, 19, 26, 27]).

У цій статті вивчаємо обернену задачу

$$u_t^{(\beta)} + (-\Delta)^{\gamma/2} u = g(t) F_0(x), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T] := Q\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} u(x,0) = F_j(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad j = 1,\ldots,m\,, \tag{2}$$

$$\big(u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot)\big) = F(t), \qquad t \in (0,T]\,, \tag{3}$$

для рівняння дифузії з дробовою похідною Рімана – Ліувілля (1) порядку $\beta \in (m-1,m)$, $m,n \in \mathbb{N}$, і оператором $(-\Delta)^{\gamma/2} u$, означеним за допомогою перетворення Фур'є $\mathcal{F}\big[(-\Delta)^{\gamma/2} u\big] = |\lambda|^{\gamma/2}\,\mathcal{F}[u]$. У задачі (1)–(3) F, F_j, $j = 0,\ldots,m$, – задані узагальнені функції (розподіли), $g(t)$ – невідома функція з простору вагових розподілів, $g\,F_0$ – прямий добуток узагальнених функцій g і F_0, $\big(u(\cdot,t),\varphi_0(\cdot)\big)$ – значення невідомого розподілу u на заданій основній функції φ_0 для кожного $t \in (0,T]$, що визначає розподіл $\big((u(x,t),\varphi_0(x)),\eta(t)\big) = \big(u(x,t),\varphi_0(x)\eta(t)\big)$ для кожної основної функції η. Доводимо існування і єдиність розв'язку (u,g) задачі (1)–(3) при $m = 1, 2$, $\gamma > \beta$.

Зауважимо, що обернені крайові задачі про визначення пари функцій (u,g) при регулярних даних і подібній (інтегральній) умові перевизначення вивчались, наприклад, у [12, 18, 19]. Умову перевизначення вигляду (3), але зі скалярним добутком (u,φ_0) в абстрактному гільбертовому просторі,

* lhp@ukr.net

використано в [17]. Обернена задача Коші вигляду (1)–(3) при $\gamma = 2$ із заданими узагальненими функціями у правих частинах прямої задачі і невідомою неперервною $g(t)$, $t \in [0,T]$, вивчалась у [22].

1. Означення і допоміжні результати. Нехай

$$D^{\bar{\alpha}} v(x,t) = \frac{\partial^{\alpha_0 + |\alpha|} v(x,t)}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \qquad \bar{\alpha} = (\alpha_0, \alpha), \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

$$\alpha_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 0, \ldots, n, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$$

$$\mathcal{D}[0,T] = C^{\infty,(0)}[0,T] = \{v \in C^{\infty}[0,T] : v^{(s)}(T) = 0,\ s \in \mathbb{Z}_+\},$$

$$C^{\infty,(0)}(\bar{Q}) := \left\{ v \in C^{\infty}(\bar{Q}) : \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s v(x,T) = 0,\ s \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – простір нескінченно диференційовних функцій із компактними носіями в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\bar{Q})$ – простір функцій із $C^{\infty,(0)}(\bar{Q})$ з компактними носіями, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ і $\mathcal{D}'(\bar{Q})$ – простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій, розподілів) відповідно на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ і $\mathcal{D}(\bar{Q})$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) = [C^{\infty}(\mathbb{R}^n)]'$ – простір розподілів із компактними носіями, а під (f, φ) розуміємо значення розподілу f на основній функції φ.

Позначимо через $(g \mathbin{\hat{*}} \varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x+\xi))$ згортку узагальненої функції g і основної функції φ, через $f * g$ – згортку розподілів f і g: $(f * g, \varphi) = (f, g \mathbin{\hat{*}} \varphi)$ для довільної основної функції φ, через $f \cdot g = fg$ – прямий добуток розподілів f і g: $(f \cdot g, \varphi) = (f(x), (g(t), \varphi(x,t)))$ для довільної основної функції $\varphi(x,t)$. Будемо використовувати функцію

$$f_{\lambda}(t) = \begin{cases} \dfrac{\theta(t) t^{\lambda - 1}}{\Gamma(\lambda)}, & \lambda > 0, \\ f'_{1+\lambda}(t), & \lambda \le 0, \end{cases}$$

де $\Gamma(\lambda)$ – ґамма-функція, $\theta(t)$ – функція Гевісайда.

Похідні Рімана – Ліувілля $v^{(\beta)}(t)$ і Джрбашяна – Капуто дробового порядку $\beta > 0$ визначають відповідно формулами

$$v^{(\beta)}(t) = f_{-\beta}(t) * v(t),$$

$$D^{\beta} v(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\beta-1} \frac{d^m}{d\tau^m} v(\tau)\, d\tau,$$

$$m - 1 < \beta < m, \quad m \in \mathbb{N},$$

і тоді

$$D^{\beta} v(t) = v^{(\beta)}(t) - \sum_{j=0}^{m-1} f_{j+1-\beta}(t) v^{(j)}(0), \qquad \beta \in (m-1, m).$$

Нехай $\rho(t)$ – така невід'ємна функція з $\mathcal{D}[0,T]$, що $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{\rho(t)}{t} = \mathrm{const}$, а $\rho(x,t)$, $(x,t) \in \bar{Q}$, – така невід'ємна функція з $\mathcal{D}(\bar{Q})$, що $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{\rho(x,t)}{t} = \mathrm{const}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

При $k \in \mathbb{R}$ означимо функціональні простори:

$$\mathcal{D}_k[0,T] = \{v \in C^{\infty,(0)}(0,T] : \rho^{s-k}(t)v^{(s)} \in C[0,T] \quad \forall s \in \mathbb{Z}_+\},$$

$$\mathcal{D}_k(\bar{Q}) = \{v \in C^{\infty,(0)}(Q) : \rho^{s-k}(x,t)D^{\bar{\alpha}}v \in C(\bar{Q}) \ \forall s \in \mathbb{Z}_+, \ \bar{\alpha} = (s,\alpha)\}.$$

Нехай $\mathcal{D}'_k[0,T]$ і $\mathcal{D}'_k(\bar{Q})$, $k \ge 0$, – простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на $\mathcal{D}_k[0,T]$ і $\mathcal{D}_k(\bar{Q})$ (вагові простори узагальнених функцій). Їхні елементи можуть мати сильні степеневі особливості при $t = 0$.

Зауважимо, що $\mathcal{D}_{k+r}[0,T] \subset \mathcal{D}_k[0,T]$ і $\mathcal{D}'_k[0,T] \subset \mathcal{D}'_{k+r}[0,T]$ при $r \ge 0$.

Нехай $v \in \mathcal{D}_k[0,T]$. Тоді $t^r v \in \mathcal{D}_{k+r}[0,T]$ і при $r \in \mathbb{Z}_+$ маємо, що $v^{(r)} \in \mathcal{D}_{k-r}[0,T]$. Справді, $\rho^{s-(k-r)}v^{(s+r)} = \rho^{s+r-k}v^{(s+r)} \in C[0,T]$ для всіх $s \in \mathbb{Z}_+$.

При $r \in (m-1,m)$, $s \in \mathbb{Z}_+$ функція

$$\rho^{s-(k-r)}(t)v^{(r+s)}(t) = \rho^{s-(k-r)}(t)\big(f_{-r} * v\big)^{(s)}(t) =$$
$$= \rho^{s-k+r}(t)\big[f_{-r}(t) * \big(\rho^{s-k}(t)v^{(s)}(t)\rho^{k-s}(t)\big)\big]$$

має порядок функції $\rho^{s-k+r}(t)t^{k-s-r}$ при $t \to 0+$ і є неперервною на $[0,T]$. Отже, $v^{(r)} = f_{-r} * v \in \ \in \mathcal{D}_{k-r}[0,T]$. Подібно одержуємо, що $f_{-r} \hat{*} v \in \mathcal{D}_{k-r}[0,T]$ при $v \in \mathcal{D}_k[0,T]$, $r \ge 0$.

Якщо $g \in \mathcal{D}'_k[0,T]$, $v \in \mathcal{D}_{k+\beta}[0,T]$, то $(g^{(\beta)}, v) = (f_{-\beta} * g, v) = (g, f_{-\beta} \hat{*} v)$, а оскільки $f_{-\beta} \hat{*} v \in \mathcal{D}_k[0,T]$, то визначено $(g, f_{-\beta} \hat{*} v)$, а отже, і $(g^{(\beta)}, v)$. Таким чином, $g^{(\beta)} \in \mathcal{D}'_{k+\beta}[0,T]$ при $g \in \mathcal{D}'_k[0,T]$.

Сформулюємо припущення.

(L): $m-1 < \beta < m$, $m = 1,2$, $\gamma > \beta$;

(A): $F_j \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $j = 0,\dots,m$, $k \ge 0$,
$g \in \mathcal{D}'_{k+\beta-\nu}[0,T] \quad \forall \nu \in (0, \min\{\beta,1\}]$ ($\nu = 0$ при $\gamma = 2$);

(B): $F_j \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $j = 0,\dots,m$, $k \ge 0$, $F \in \mathcal{D}'_{k-\nu}[0,T] \ \forall \nu \in (0, \min\{\beta,1\}]$ ($\nu = 0$ при $\gamma = 2$), $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $(F_0, \varphi_0) \ne 0$.

Позначимо $C_{\gamma,\beta}(Q) = \{v \in C(Q) : (-\Delta)^{\gamma/2}v, \ D_t^{\beta}v \in C(Q)\}$, а також введемо такі оператори при $\beta \in (m-1,m)$:

$$(Lv)(x,t) \equiv v_t^{(\beta)}(x,t) + (-\Delta)^{\gamma/2}v(x,t),$$

$$(L^{\mathrm{reg}}v)(x,t) \equiv D_t^{\beta}v(x,t) + (-\Delta)^{\gamma/2}v(x,t),$$

$$(\hat{L}v)(x,t) \equiv f_{-\beta}(t) \hat{*} v(x,t) + (-\Delta)^{\gamma/2}v(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$

і простір

$$\mathcal{X}_k(\bar{Q}) = \{v \in C^{\infty,(0)}(\bar{Q}) : \hat{L}v \in \mathcal{D}_k(\bar{Q})\}.$$

Означення 1. За припущень **(L)**, **(A)** функція $u \in \mathcal{D}'_k(\bar{Q})$ називається розв'язком задачі Коші (1), (2), якщо вона задовольняє тотожність

$$(u, \hat{L}\psi) \equiv \big(g(t)F_0(y), \psi(y,t)\big) + \sum_{j=1}^{m}\big(F_j(y)f_{j-\beta}(t), \psi(y,t)\big) \quad \forall \psi \in X_k(\bar{Q}). \quad (4)$$

Зауважимо, що тотожність (4) є узагальненням формули Ґріна [9].

Означення 2. За припущень (**L**), (**B**) пара $(u,g) \in \mathcal{D}'_k(\overline{Q}) \times \mathcal{D}'_{k+\beta-\nu}[0,T]$ ($(u,g) \in \mathcal{D}'_k(\overline{Q}) \times \mathcal{D}'_{k+\beta}[0,T]$ при $\gamma = 2$) називається розв'язком оберненої задачі Коші (1)–(3), якщо вона задовольняє тотожність (4) і умову (3).

Означення 3. Вектор-функція $(G_0(x,t), G_1(x,t), \ldots, G_m(x,t))$ називається вектор-функцією Ґріна задачі Коші (2) для рівняння

$$(Lu)(x,t) = \Phi(x,t), \qquad (x,t) \in Q,$$

і такої ж задачі для рівняння

$$(L^{\mathrm{reg}}u)(x,t) = \Phi(x,t), \qquad (x,t) \in Q, \tag{5}$$

якщо при достатньо регулярних Φ, F_j, $j = 1,\ldots,m$, функція

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)\Phi(y,\tau)\,dy + \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t)F_j(y)\,dy, \qquad (x,t) \in Q,$$

є розв'язком (із простору $C_{\gamma,\beta}(Q)$) задачі Коші (5), (2).

Лема 1. *За припущення* **(L)** *вектор-функція Ґріна задачі Коші* (1), (2) *існує і*

$$G_j(x,t) = f_{j-\beta}(t) * G_0(x,t), \quad (x,t) \in Q, \quad j = 1,\ldots,m.$$

Д о в е д е н н я. Згідно з [8, 9, 15] маємо зображення

$$G_0(x,t) = \frac{\pi^{-n/2}t^{\beta-1}}{|x|^n} H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^\gamma}{2^\gamma t^\beta} \middle| \begin{matrix} (1,1) & (\beta,\beta) & \\ (1,1) & (n/2,\gamma/2) & (1,\gamma/2) \end{matrix} \right),$$

$$G_j(x,t) = \frac{\pi^{-n/2}t^{j-1}}{|x|^n} H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^\gamma}{2^\gamma t^\beta} \middle| \begin{matrix} (1,1) & (\beta,\beta) & \\ (1,1) & (n/2,\gamma/2) & (1,\gamma/2) \end{matrix} \right),$$

$$j = 1,\ldots,m, \quad m = 1,2,$$

де

$$H^{m,n}_{p,q}\left(z \middle| \begin{matrix} (a_1,\alpha_1) & \ldots & (a_p,\alpha_p) \\ (b_1,\beta_1) & \ldots & (b_q,\beta_q) \end{matrix} \right) := H^{m,n}_{p,q}(z)$$

– H-функція Фокса [21]. Згідно з [21, теорема 1] при

$$a^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=n+1}^p \alpha_i + \sum_{i=1}^m \beta_i - \sum_{i=m+1}^q \beta_i > 0, \qquad \Delta^* = \sum_{i=1}^q \beta_i - \sum_{i=1}^p \alpha_j > 0$$

функція $H^{m,n}_{p,q}(z)$ існує при всіх $z \ne 0$. Для кожної G_j, $j = 0,\ldots,m$, маємо $a^* = 2 - \beta$, $\Delta^* = \gamma - \beta$. Отже, за припущення **(L)** компоненти вектор-функції Ґріна існують при всіх $x \ne 0$, $t > 0$. ♦

Нехай

$$(\widehat{G}_j\varphi)(y,\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,\tau)G_j(x-y,\tau)\,dx, \qquad (y,\tau) \in \overline{Q}, \quad j = 0,\ldots,m,$$

$$(\widehat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,\tau) = \int_\tau^T dt \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,t)\,G_0(x-y,t-\tau)\,dx = \int_\tau^T (\widehat{G}_0\,\varphi)(y,t-\tau)\,dt, \qquad (y,\tau) \in \overline{Q},$$

$$(\widehat{\mathcal{G}}_j\varphi)(y)=\int_0^T dt\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x,t)G_j(x-y,t)\,dx=\int_0^T(\widehat{G}_j\varphi)(y,t)\,dt\,,$$

$$y\in\mathbb{R}^n,\qquad j=1,\dots,m\,.$$

Лема 2. *За припущення* **(L)** *для всіх* $k\ge 0$, $\nu\in(0,\min\{\beta,1\}]$

$$\widehat{\mathcal{G}}_0:\mathcal{D}_k(\bar{Q})\to\mathcal{D}_{k+\beta-\nu}(\bar{Q}),\qquad \widehat{\mathcal{G}}_j:\mathcal{D}_k(\bar{Q})\to C^\infty(\mathbb{R}^n),\qquad j=1,\dots,m\,.$$

У випадку $\gamma=2$ *такі відображення правильні також і при* $\nu=0$.

Д о в е д е н н я. Використаємо оцінки для компонент вектор-функції Ґріна (див. [8, 9]) і те, що $D^{\bar{\alpha}}\varphi(x,\cdot)\in\mathcal{D}_{k-s}[0,T]$ для довільних $x\in\mathbb{R}^n$, мультиіндекса $\bar{\alpha}=(s,\alpha)$ і $\varphi\in\mathcal{D}_k(\bar{Q})$, а отже, $\left|D^{\bar{\alpha}}\varphi(x,t)\right|\le\widehat{\psi}_{\bar{\alpha}}(t)$, $(x,t)\in\bar{Q}$, із невід'ємними $\widehat{\psi}_{\bar{\alpha}}\in\mathcal{D}_{k-s}(\bar{Q})$. Як у [8, 9], відповідно при $\beta\in(0,1)$, $\beta\in(1,2)$ одержуємо, що $\widehat{G}_0\varphi\in C^{\infty,(0)}(Q)$, $\widehat{G}_j\varphi\in C^\infty(Q)$, $j=1,\dots,m$, для кожної $\varphi\in\mathcal{D}_k(\bar{Q})$ і справджуються оцінки

$$\left|D^{\bar{\alpha}}(\widehat{G}_0\varphi)(y,t)\right|\le t^{\beta-1}(1+|\ln t|)\psi_{0,\bar{\alpha}}(t),\qquad (y,t)\in Q\,,$$

$$\left|D^{\bar{\alpha}}(\widehat{G}_j\varphi)(y,t)\right|\le(1+|\ln t|)\psi_{j,\bar{\alpha}}(t)t^{j-1},\quad (y,t)\in Q,\quad j=1,\dots,m\,,\tag{6}$$

для довільних мультиіндекса $\bar{\alpha}=(s,\alpha)$ і $\varphi\in\mathcal{D}_k(\bar{Q})$, де $\psi_{j,\bar{\alpha}}\in\mathcal{D}_{k-s}[0,T]$, $j=0,\dots,m$. Тоді $(\widehat{\mathcal{G}}_j\varphi)(\cdot)=\int_0^T(\widehat{G}_j\varphi)(\cdot,t)\,dt\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j=1,\dots,m$, для кожної $\varphi\in\mathcal{D}_k(\bar{Q})$, $\widehat{\mathcal{G}}_0\varphi\in C^{\infty,(0)}(\bar{Q})$, і для довільного $s\in\mathbb{Z}_+$ виконується нерівність

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^s(\widehat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,\tau)\right|=\left|\int_\tau^T dt\int_{\mathbb{R}^n}G_0(x-y,t-\tau)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s\varphi(y,t)\,dt\right|\le$$

$$\le\int_\tau^T(t-\tau)^{\beta-1}(1+|\ln(t-\tau)|)\psi_s(t)\,dt=\left(\tau^{\beta-1}(1+|\ln\tau|)\right)\hat{*}\,\psi_s(\tau)\,,$$

$$(y,\tau)\in\bar{Q}\,,$$

де ψ_s – невід'ємна функція з $\mathcal{D}_{k-s}[0,T]$. Тоді $\rho^{s-(k+\beta-\nu)}(y,\tau)\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^s(\widehat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,\tau)$, $s\in\mathbb{Z}_+$, є неперервною в $\bar{Q}$ і $\widehat{\mathcal{G}}_0\varphi\in\mathcal{D}_{k+\beta-\nu}(\bar{Q})$.

При $\gamma=2$ з огляду на наявність експоненти в оцінках компонент вектор-функції Ґріна одержуємо оцінки (6) без логарифмів [22]. Тому відображення правильні і при $\nu=0$. ♦

Теорема 1. *За припущень* **(L), (A)** *існує єдиний розв'язок* $u\in\mathcal{D}_k'(\bar{Q})$ *задачі Коші* (1), (2). *Розв'язок* u *визначається формулою*

$$(u,\varphi)=\left(g(t)F_0(y),(\widehat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,t)\right)+\sum_{j=1}^m\left(F_j(y),(\widehat{\mathcal{G}}_j\varphi)(y,t)\right)\qquad\forall\varphi\in\mathcal{D}_k(\bar{Q})\,.\tag{7}$$

Д о в е д е н н я. За означенням прямого добутку узагальнених функцій

$$(g(t)F_0(y),(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,t)) = (g(t),(F_0(y),(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,t))) \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}_k(\bar{Q}). \qquad (8)$$

Розподіли F_j мають скінченні порядки [2, с. 152]: існують такі $k_j \in \mathbb{Z}_+$, що

$$\left|(F_j,v)\right| \le \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\le k_j} \left|D^\alpha v(y)\right| \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \qquad j = 0,\dots,m.$$

Тоді для всіх $\varphi \in \mathcal{D}_k(\bar{Q})$, $t \in [0,T]$

$$\left|(F_0(y),(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,t))\right| \le \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\le k_0} \left|D^\alpha(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,t)\right|$$

і за лемою 2 $(F_0(y),(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,\cdot)) \in \mathcal{D}_{k+\beta-\nu}[0,T]$. Отже, прямий добуток (8) визначений.

Оскільки $\hat{\mathcal{G}}_0\varphi \in \mathcal{D}_{k+\beta-\nu}(\bar{Q})$ для кожної $\varphi \in \mathcal{D}_k(\bar{Q})$, то $(g(t),(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,t))$ існує для всіх $y \in \mathbb{R}^n$ і належить класу $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, а отже, існує прямий добуток

$$(F_0(y)g(t),(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,t)) = (F_0(y),(g(t),(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,t))) \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}_k(\bar{Q}).$$

Відомим способом (див., наприклад, [2, с. 129]) можна довести комутативність цього прямого добутку.

Оскільки для довільної $\varphi \in \mathcal{D}_k(\bar{Q})$ за лемою 2 також і $\hat{\mathcal{G}}_j\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j = 1,\dots,m$, то за припущень теореми права частина (7) існує, і формулою (7) визначається $u \in \mathcal{D}'_k(\bar{Q})$.

Як у [22, лема 2.4], доводимо правильність формул

$$(\hat{\mathcal{G}}_0(\hat{L}\psi))(y,\tau) = \psi(y,\tau), \qquad (y,\tau) \in \bar{Q},$$

$$(\hat{\mathcal{G}}_j(\hat{L}\psi))(y) = (f_{j-\beta}(\tau),\psi(y,\tau)), \quad y \in \mathbb{R}^n,\ j = 1,\dots,m, \quad \psi \in \mathcal{X}_k(\bar{Q}). \qquad (9)$$

Для довільної $\psi \in \mathcal{X}_k(\bar{Q})$ маємо $\varphi = \hat{L}\psi \in \mathcal{D}_k(\bar{Q})$. Тоді з (7) запишемо

$$(u,\hat{L}\psi) = (g(\tau)F_0(y),(\hat{\mathcal{G}}_0(\hat{L}\psi))(y,\tau)) + \sum_{j=1}^{m}(F_j,\hat{\mathcal{G}}_j(\hat{L}\psi)),$$

а використовуючи формули (9), одержуємо тотожність (4). За означенням 1 функція (7) є розв'язком задачі (1), (2).

Для $\gamma = 2$ доведення аналогічне.

Якщо u_1, u_2 – два розв'язки задачі (1), (2) і $u = u_1 - u_2$, то з (4) одержуємо

$$(u,\hat{L}\psi) = 0 \qquad \forall\psi \in \mathcal{X}_k(\bar{Q}). \qquad (10)$$

За лемою 2 і першою з формул (9) для довільної $\varphi \in \mathcal{D}_k(\bar{Q})$ функція

$$\psi(y,\tau) = \int_\tau^T dt \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)\,dx, \qquad (y,\tau) \in \bar{Q},$$

належить до $\mathcal{X}_k(\bar{Q})$ і задовольняє рівняння $(\hat{L}\psi)(x,t) = \varphi(x,t)$, $(x,t) \in \bar{Q}$. Отже, з (10) одержуємо $(u,\varphi) = 0$ для всіх $\varphi \in \mathcal{D}_k(\bar{Q})$, тобто $u = 0$ в $\mathcal{D}'_k(\bar{Q})$. ♦

2. Розв'язність оберненої задачі. Нехай u − розв'язок задачі Коші (1), (2). З рівняння (1) одержуємо

$$\left(u_t^{(\beta)}(\,\cdot\,,t),\varphi_0(\,\cdot\,)\right) = -\left(u(\,\cdot\,,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_0(\,\cdot\,)\right) + (F_0,\varphi_0)g(t), \qquad t\in(0,T].$$

Використавши рівність $\left(u_t^{(\beta)}(\,\cdot\,,t),\varphi_0(\,\cdot\,)\right) = \left(u(\,\cdot\,,t),\varphi_0(\,\cdot\,)\right)_t^{(\beta)}$ і умову (3), маємо

$$F^{(\beta)}(t) = -\left(u\,(\,\cdot\,,t\,),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_0(\,\cdot\,)\right) + (F_0,\varphi_0)g(t\,).$$

Звідси, врахувавши припущення **(B)**, знаходимо

$$g(t) = \left[F^{(\beta)}(t) + \left(u(\,\cdot\,,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_0(\,\cdot\,)\right)\right]\left[(F_0,\varphi_0)\right]^{-1}, \qquad t\in(0,T]. \tag{11}$$

За властивостями просторів $\mathcal{D}_k'(\bar{Q})$ і припущенням **(B)** маємо $F^{(\beta)}\in$ $\in\mathcal{D}_{k+\beta-\nu}'[0,T]$. Згідно з теоремою 1 $u\in\mathcal{D}_k'(\bar{Q})$ для кожної $g\in\mathcal{D}_{k+\beta-\nu}'[0,T]$. Тому $\left(u(\,\cdot\,,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_0(\cdot)\right)$ належить до $\mathcal{D}_k'[0,T]\subset\mathcal{D}_{k+\beta-\nu}'[0,T]$. Отже, права частина (11) належить до $\mathcal{D}_{k+\beta-\nu}'[0,T]$. Підставляючи її в (7) (замість $g(t)$), при $\varphi(x,t)=(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_0(x)\eta(t)$ із довільною $\eta\in\mathcal{D}_k[0,T]$ одержуємо

$$\left(u\,(x,t\,),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_0(x)\eta(t)\right) =$$

$$= \frac{1}{(F_0,\varphi_0)}\Bigg(F^{(\beta)}(\tau) + \left(u(\,\cdot\,,\tau),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_0(\,\cdot\,)\right),$$

$$\left(F_0(\,\cdot\,),\int_\tau^T(\widehat{G}_0(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_0)(\,\cdot\,,t-\tau)\eta\,(t)\,dt\right)\Bigg) +$$

$$+\sum_{j=1}^m\left(F_j(\,\cdot\,),\int_0^T(\widehat{G}_j(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_0)(\,\cdot\,,t)\eta(t)\,dt\right).$$

Позначимо $H_u(t)=\left(u(\cdot\,,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_0(\,\cdot\,)\right)$ і зауважимо, що $H_u\in\mathcal{D}_k'[0,T]$. Для довільної $\eta\in\mathcal{D}_k[0,T]$ попередня рівність набуває вигляду

$$\left(H_u(\tau),\eta(\tau)-\int_\tau^T\mathcal{K}(t,\tau)\eta(t)\,dt\right) = (u_0,\eta)\,, \tag{12}$$

де

$$(u_0,\eta) = \left(F^{(\beta)}(\tau),\int_\tau^T\mathcal{K}(t,\tau)\eta(t)\,dt\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^m\left(F_j(\,\cdot\,),\int_0^T(\widehat{G}_j(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_0)(\,\cdot\,,t)\eta(t)\,dt\right) \quad \forall\eta\in\mathcal{D}_k[0,T], \tag{13}$$

а

$$\mathcal{K}(t,\tau) = \frac{\left(F_0(\,\cdot\,),(\widehat{G}_0(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_0)(\,\cdot\,,t-\tau)\right)}{(F_0,\varphi_0)}.$$

Теорема 2. *За припущень* **(L)**, **(B)** *існує єдиний розв'язок* (u,g) *задачі* (1)−(3)*, причому функція* u *визначається формулою* (7)*, а*

$$g(t) = \left[F^{(\beta)}(t) + g_0(t)\right]\left[(F_0,\varphi_0)\right]^{-1}, \qquad t\in(0,T]\,, \tag{14}$$

де $g_0\in\mathcal{D}_k'[0,T]$,

$$(g_0, \mu) = (u_0, \eta_\mu) \qquad \forall \mu \in \mathcal{D}_k[0,T], \tag{15}$$

$u_0 \in \mathcal{D}'_k[0,T]$ *визначена формулою* (13), $\eta_\mu(t)$ – *розв'язок рівняння*

$$\eta(t) - \int_t^T \mathcal{K}(t,\tau)\eta(t)\,dt = \mu(t), \qquad t \in (0,T]. \tag{16}$$

Д о в е д е н н я. Для довільної функції $\eta \in \mathcal{D}_k[0,T]$

$$(K\eta)(\tau) = \int_\tau^T \mathcal{K}(t,\tau)\eta(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{(F_0, \varphi_0)} \int_\tau^T \Big(F_0(y), (\widehat{G}_0((-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_0))(y, t-\tau) \Big) \eta(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{(F_0, \varphi_0)} \Big(F_0(y), \int_\tau^T (\widehat{G}_0((-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_0))(y, t-\tau)\eta(t)\,dt \Big) =$$

$$= \frac{1}{(F_0, \varphi_0)} \Big(F_0(y), (\widehat{\mathcal{G}}_0((-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_0\eta))(y,\tau) \Big)$$

і належить до $\mathcal{D}_{k+\beta-\nu}[0,T]$ (див. доведення теореми 1). За лемою 2 маємо

$$\int_0^T \widehat{G}_j((-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_0)(\cdot, t)\eta(t)\,dt = \widehat{\mathcal{G}}_j\big((-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_0\eta\big) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Отже, права частина (13) існує і формулою (13) визначено $u_0 \in \mathcal{D}'_k[0,T]$.

Також показано, що інтегральний оператор K діє з $\mathcal{D}_k[0,T]$ в $\mathcal{D}_{k+\beta-\nu}[0,T] \subset \mathcal{D}_k[0,T] \subset C[0,T]$. Методом послідовних наближень, як, наприклад, у [2, с. 279], показуємо, що для кожної $\mu \in \mathcal{D}_k[0,T]$ інтегральне рівняння Вольтерра другого роду (16) має єдиний розв'язок $\eta_\mu \in \mathcal{D}_k[0,T]$. Тоді з перетворення (15) отримуємо, що $g_0 \in \mathcal{D}'_k[0,T] \subset \mathcal{D}'_{k+\beta-\nu}[0,T]$ і, згідно з (14), $g \in \mathcal{D}'_{k+\beta-\nu}[0,T]$. Насправді перетворення (15) є взаємнооднозначним: за відомою g_0 знаходимо

$$(u_0, \eta) = \Big(g_0(\tau), \eta(\tau) - \int_\tau^T \mathcal{K}(t,\tau)\eta(t)\,dt \Big) \qquad \forall \eta \in \mathcal{D}_k[0,T].$$

Звідси та з формули (12) одержуємо рівність

$$\Big(g_0(\tau), \eta(\tau) - \int_\tau^T \mathcal{K}(t,\tau)\eta(t)\,dt \Big) = \Big(H_u(\tau), \eta(\tau) - \int_\tau^T \mathcal{K}(t,\tau)\eta(t)\,dt \Big).$$

Враховуючи однозначну розв'язність рівняння (16), маємо

$$(g_0, \mu) = (H_u, \mu) \qquad \forall \mu \in \mathcal{D}_k[0,T].$$

Отже, (11) збігається з (14).

За теоремою 1 функція (7) при довільній $g \in \mathcal{D}'_{k+\beta-\nu}[0,T]$ є розв'язком задачі (1), (2). Зокрема, вона задовольняє цю задачу при g, визначеній формулою (14). Покажемо, що функція (7) при такій g задовольняє умову (3). Нехай $F^*(t) = (u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot))$, $t \in (0,T]$. Тоді $(F^*, \eta) = (u(x,t), \varphi_0(x)\eta(t))$ для кожної $\eta \in \mathcal{D}_k[0,T]$. Позначимо

$$(u_0^*, \eta)) = \left(F^{*(\beta)}(\tau), \int\limits_\tau^T \mathcal{K}(t,\tau)\eta(t)\,dt\right) + \sum_{j=1}^m \left(F_j(\cdot), \int\limits_0^T \big(\widehat{G}_j\big((-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_0\big)\big)(\cdot,t)\eta(t)\,dt\right)$$

для кожної $\eta \in \mathcal{D}_k[0,T]$ і $(g_0^*, \mu) = (u_0^*, \eta_\mu)$ для кожної $\mu \in \mathcal{D}_k[0,T]$, де $\eta_\mu(t)$ – розв'язок рівняння (16). Тоді, як вище, з рівняння (1) і умови (3) одержуємо

$$g(t) = \left[F^{*(\beta)}(t) + g_0^*(t)\right]\left[(F_0, \varphi_0)\right]^{-1}, \qquad t \in (0,T]. \tag{17}$$

Тепер із (14) і (17) випливає, що $F^{*(\beta)}(t) - F^{(\beta)}(t) = g_0(t) - g_0^*(t)$, тобто

$$\left(F^{*(\beta)} - F^{(\beta)}, \mu\right) = \left(g_0 - g_0^*, \mu\right) \qquad \forall \mu \in \mathcal{D}_{k+\beta-\nu}[0,T].$$

Враховуючи попередні співвідношення, отримуємо

$$\left(F^{*(\beta)}(t) - F^{(\beta)}(t), \eta(\tau) - \int\limits_\tau^T \mathcal{K}(t,\tau)\eta(t)\,dt\right) =$$

$$= \left(g_0(\tau) - g_0^*(\tau), \eta(\tau) - \int\limits_\tau^T \mathcal{K}(t,\tau)\eta(t)\,dt\right) = \left(u_0 - u_0^*, \eta\right) =$$

$$= \left(F^{*(\beta)}(\tau) - F^{(\beta)}(\tau), -\int\limits_\tau^T \mathcal{K}(t,\tau)\eta(t)\,dt\right)$$

$$\forall \eta \in \mathcal{D}_{k+\beta-\nu}[0,T] \subset \mathcal{D}_k[0,T],$$

а тоді $\left(F^{*(\beta)} - F^{(\beta)}, \eta\right) = 0$ для кожної $\eta \in \mathcal{D}_{k+\beta-\nu}[0,T]$, тобто $F^{*(\beta)} - F^{(\beta)} = 0$ в $\mathcal{D}'_{k+\beta-\nu}[0,T]$. Звідси $F^* - F = f_\beta * \left(F^{*(\beta)} - F^{(\beta)}\right) = 0$ в $\mathcal{D}'_{k-\nu}[0,T]$. Отже, розподіл, заданий формулою (7) при функції g, визначеній згідно з (14)–(16), тобто розподіл

$$(u, \varphi) = \frac{1}{(F_0, \varphi_0)}\left(F^{(\beta)}(t) + g_0(t), \big(F_0(y), (\widehat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,t)\big)\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \big(F_j(y), (\widehat{\mathcal{G}}_j\varphi)(y,t)\big) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_k(\bar{Q})$$

при g_0, визначеній згідно з (15), (16), задовольняє умову (3), а пара (u, g) є розв'язком оберненої задачі (1)–(3).

Якщо (u_1, g_1), (u_2, g_2) – два розв'язки задачі (1)–(3), то для $u = u_1 - u_2$, $g = g_1 - g_2$ одержуємо задачу

$$Lu(x,t) = F_0(x)g(t), \qquad (x,t) \in Q,$$

$$\frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} u(x,0) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad j = 1, \dots, m,$$

$$(u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot)) = 0, \qquad t \in (0,T].$$

Тоді, як вище, матимемо

$$(u, \varphi) = \left(g(\tau), \left(F_0(\cdot), \int\limits_\tau^T (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot, t-\tau)\,dt\right)\right) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_k(\bar{Q}),$$

$$g(t) = \frac{g_0(t)}{(F_0, \varphi_0)}, \qquad t \in (0,T],$$

$$\left(g_0(\tau), \eta(\tau) - \int_{\tau}^{T} \mathcal{K}(t,\tau)\eta(t)\,dt\right) = 0 \qquad \forall \eta \in \mathcal{D}_k[0,T],$$

а отже, і для довільної $\eta \in \mathcal{D}_{k+\beta-\nu}[0,T] \subset \mathcal{D}_k[0,T]$. За єдиністю розв'язку рівняння (16) одержуємо, що $(g_0,\mu) = 0$ для всіх $\mu \in \mathcal{D}_{k+\beta-\nu}[0,T]$, тобто $g_0 = 0$ в $\mathcal{D}'_{k+\beta-\nu}[0,T]$. Тоді з попередніх формул одержуємо $g = 0$ в $\mathcal{D}'_{k+\beta-\nu}[0,T]$ і $u = 0$ в $\mathcal{D}'_k(\bar{Q})$.

У випадку $\gamma = 2$ всі міркування правильні при $\nu = 0$. Теорему доведено. ♦

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Київ: Наук. думка, 1965. – 798 с.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1981.– 512 с.
3. *Ворошилов А. А., Килбас А. А.* Условия существования классического решения задачи Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Докл. Акад. наук. – 2007. – **414**, № 4. – С. 451–454.
   Те саме: *Voroshilov A. A., Kilbas A. A.* Existence conditions for a classical solution of the Cauchy problem for the diffusion-wave equation with a partial Caputo derivative // Doklady Math. – 2007. – **75**, No. 3. – P. 407–410.
4. *Городецький В. В., Літовченко В. А.* Задача Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь в просторах узагальнених функцій типу S' // Доп. АН України. – 1992. – № 10. – С. 6–9.
5. *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Математика. – 1968. – **3**, № 1. – С. 3–29.
6. *Искендеров А. Д.* Некоторые обратные задачи об определении правых частей дифференциальных уравнений // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1976. – № 2. – С. 58–63.
7. *Кочубей А. Н.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 8. – С. 1359–1368.
8. *Лопушанська Г. П., Лопушанський А. О.* Задача Коші для рівнянь з дробовими похідними за часовою та просторовими змінними у просторах узагальнених функцій // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 8. – С. 1067–1079.
   Те саме: *Lopushans'ka H. P., Lopushans'kyi A. O.* Space-time fractional Cauchy problem in spaces of generalized functions // Ukr. Math. J. – 2013. – **64**, No. 8. – P. 1215–1230. – https://doi.org/10.1007/s11253-013-0711-z.
9. *Лопушанський А.* Розв'язок задачі Коші для рівнянь з дробовими похідними в просторах узагальнених функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 77. – С. 132–144.
10. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні. – Чернівці: Чернів. нац. ун-т, 2010. – 248 с.
11. *Akhundov A. Ya., Selimkhanov B. R.* Determining the coefficients in the right side of the system of elliptic equations // Azerbaijan J. Math. – 2017. – **7**, No. 2. – P. 33–40.
12. *Aleroev T. S., Kirane M., Malik S. A.* Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition // Electron. J. Differ. Equat. – 2013. – **2013**, No. 270. – P. 1–16.
13. *Alifanov O. M.* Inverse heat transfer problems. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1994. – xii+348 p.
14. *Anh V. V., Leonenko N. N.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random data // J. Stat. Phys. – 2001. –**104**, No. 5-6. – P. 1349–1387.
15. *Duan Jun-Sheng.* Time- and space-fractional partial differential equations // J. Math. Phys. – 2005. – **46**, No. 1. – 13504. – https://doi.org/10.1063/1.1819524.
16. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.
   https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9.

17. *El-borai M. M., Mostafa O. L., Foad H. A.* Existence and uniqueness solution of an inverse problems for fractional evolution equations // Int. J. Basic & Appl. Sci. IJBAS-IJENS. – 2012. – **12**, No. 4. – P. 63–75.
18. *Ismailov M. I., Çiçek M.* Inverse source problem for a time-fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions // Appl. Math. Model. – 2016. – **40**, No. 7-8. – P. 4891–4899. – https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.12.020.
19. *Ismailov M. I., Kanca F., Lesnic D.* Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions // Appl. Math. Comput. – 2011. – **218**, No. 8. – P. 4138–4146.
https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.09.044.
20. *Jin B., Rundell W.* A turorial on inverse problems for anomalous diffusion processes // Inverse Probl. – 2015. – **31**, 035003. – 40 p.
https://doi.org/10.1088/0266-5611/31/3/035003.
21. *Kilbas A. A., Sajgo M.* H-transforms: Theory and applications. – Boca Raton etc.: Chapman & Hall/CRC Press, 2004. – 408 p. – Ser.: Analytical Methods and Special Functions.
22. *Lopushansky A., Lopushanska H.* Inverse source Cauchy problem for a time fractional diffusion-wave equation with distributions // Electron. J. Differ. Equat. – 2017. – **2017**, No. 182. – P. 1–14. – http://ejde.math.txstate.edu/2017/182.
23. *Luchko Yu.* Boundary value problems for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2009. – **12**, No. 4. – P. 409–422.
24. *Meerschaert M. M., Nane E., Vellaisamy P.* Fractional Cauchy problems on bounded domains // Ann. Probab. – 2009. – **37**, No. 3. – P. 979–1007.
25. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin etc: De Gruyter, 2014. – xii+297 p.
26. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. – New York–Basel: Marcel Dekker Inc., 2000. – 709 p.
27. *Zhang Ying, Xu Xiang.* Inverse source problem for a fractional diffusion equation // Inverse Probl. – 2011. – **27,** No. 3. – Art. 035010. – 12 p.
https://doi.org/10.1088/0266-5611/27/3/035010

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ В ВЕСОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ПРАВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Изучается обратная задача Коши для уравнения диффузии с дробными производными и обобщенными функциями в правых частях. Задача состоит в определении обобщенного решения прямой задачи и неизвестного, зависящего от времени, множителя из пространства весовых распределений в правой части уравнения. Устанавливается однозначная разрешимость задачи.

Ключевые слова: *обобщенная функция, производная дробного порядка, обратная задача, вектор-функция Грина.*

INVERSE PROBLEM ON DETERMINING A RIGHT-HAND SIDE OF THE FRACTIONAL EQUATION IN WEIGHT DISTRIBUTIONS

The inverse Cauchy problem for a fractional diffusion equation with distributions in right-hand sides is studied. This problem is to find a generalized solution of the direct problem and an unknown time-dependent factor from the space of weight distributions in a source. The unique solvability of the problem is established.

Key words: *distribution, fractional derivative, inverse problem, Green vector-function.*

[1] Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ,
[2] Жешувський ун-т, Жешув, Польща,
[3] Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
21.10.18