УДК 519.6: 539.3

І. І. Прокопишин[1✉], С. М. Шахно[2]

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВІ ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО КОНТАКТ ПРУЖНИХ ТІЛ ЗА НАЯВНОСТІ НЕЛІНІЙНИХ ВІНКЛЕРІВСЬКИХ ПОВЕРХНЕВИХ ШАРІВ

Розглянуто задачу про контактну взаємодію багатьох пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів. Для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння з недиференційовним оператором, що відповідає цій контактній задачі, запропоновано неявні двоточкові комбіновані диференціально-різницеві паралельні ітераційні алгоритми декомпозиції області типу Робіна. Здійснено програмну реалізацію цих алгоритмів для випадку плоских контактних задач на основі скінченноелементних апроксимацій. Проведено порівняння числової ефективності двоточкових та одноточкових ітераційних методів декомпозиції області для задачі про контакт через нелінійний вінклерівський прошарок двох пружних тіл з виїмкою.

***Ключові слова**: контактні задачі, варіаційні рівняння, диференціально-різницеві ітераційні методи, напівгладкий метод Ньютона, методи декомпозиції області, метод скінченних елементів.*

Вступ. У механіці суцільного середовища часто виникає необхідність розв'язувати нелінійні операторні та варіаційні рівняння з недиференційовними операторами. Зокрема, такими рівняннями описуються математичні моделі теорії пластичності, механічної контактної взаємодії та руху рідин.

Класичний ітераційний метод Ньютона, який має квадратичну швидкість збіжності в околі розв'язку, вимагає існування похідної від оператора і безпосередньо не може бути застосовним до таких рівнянь. Тому для розв'язування нелінійних рівнянь з недиференційовними операторами застосовують різні його модифікації, а саме: різницеві ітераційні методи [1, 11, 12, 28], напівгладкі методи Ньютона [18, 23, 29] та комбіновані диференціально-різницеві ітераційні методи [13–16, 22].

У напівгладких методах Ньютона похідну оператора, яку використовують у класичному методі Ньютона, замінюють узагальненою похідною, а в методах різницевого типу – певними різницевими формулами. У диференціально-різницевих методах недиференційовний оператор представляють у вигляді суми диференційовної і недиференційовної частин та застосовують різницеву формулу лише для недиференційовної частини, а для диференційовної частини використовують похідну.

У пропонованій статті розглядається задача про неідеальний механічний контакт багатьох пружних тіл за наявності нелінійних поверхневих шарів вінклерівського типу та досліджується проблема числового розв'язування нелінійного варіаційного рівняння з недиференційовним оператором у гільбертовому просторі, яке еквівалентне цій задачі у слабкому розумінні.

Ефективними числовими методами розв'язування задач математичної фізики у складних багатокомпонентних областях, зокрема задач про контактну взаємодію багатьох тіл, є алгоритми декомпозиції області. Ці алгоритми зводять такі задачі до розв'язування послідовності простіших задач в окремих підобластях (тілах), що дозволяє розпаралелювати обчислення і поєднувати різні математичні моделі та методи в різних підобластях. Методи декомпозиції області (МДО) для розв'язування задач про контакт пружних тіл без поверхневих шарів розвинуто у працях [17, 19, 21, 25].

На жаль, безпосереднє застосування згаданих вище різницевих, диференціально-різницевих і напівгладких ітераційних методів до розв'язування нелінійного варіаційного рівняння, яке відповідає задачі про контакт тіл з

✉ ihor84@gmail.com

поверхневими шарами, не зумовлює декомпозиції за підобластями (тілами). Тому актуальною є розробка ітераційних методів для цього рівняння, які дозволять здійснити таку декомпозицію, тобто звести його розв'язування до розв'язування на кожній ітерації незалежних варіаційних рівнянь в окремих підобластях (тілах).

У роботах [6–9, 20, 27] розроблено одноточкові ітераційні методи декомпозиції області типу Робіна для розв'язування нелінійних варіаційних рівнянь зі штрафом, що відповідає задачі про контакт багатьох тіл без поверхневих шарів. Деякі з цих методів можна трактувати як модифікації напівгладких методів Ньютона. У працях [6, 20] доведено теореми про їхню збіжність. У роботі [10] запропоновано двоточкові ітераційні алгоритми декомпозиції області для розв'язування такого рівняння, які є модифікаціями диференціально-різницевих методів Ньютона – хорд [13, 15] і Ньютона – Курчатова [13, 14], і досліджено числову ефективність цих алгоритмів. У працях [4, 26] отримано одноточкові ітераційні алгоритми декомпозиції області типу Робіна для розв'язування варіаційного рівняння задачі про контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів.

У пропонованій роботі розроблено двоточкові ітераційні методи декомпозиції області для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння з недиференційовним оператором, що відповідає задачі про контакт через нелінійні вінклерівські шари багатьох пружних тіл. Ці МДО отримано на основі модифікацій комбінованих диференціально-різницевих методів Ньютона – хорд [13, 15] та Ньютона – Курчатова [13, 14]. Проведено числовий аналіз запропонованих методів для плоскої задачі про контактну взаємодію через нелінійний поверхневий шар двох ізотропних пружних тіл з виїмкою з використанням скінченноелементних апроксимацій на трикутниках. Здійснено порівняння впливу ітераційних параметрів на швидкість збіжності двоточкових і одноточкових алгоритмів декомпозиції області.

1. **Постановка задачі**. Розглянемо задачу про контакт через нелінійні вінклерівські поверхневі шари N пружних тіл $\Omega_\alpha \subset \mathbf{R}^3$ з ліпшицевими межами $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, N$ [4, 26] (рис. 1). Позначимо $\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^{N} \Omega_\alpha$.

У просторі $\mathbf{R}^3$ введемо декартову систему координат з ортонормованим базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Напружено-деформований стан у точці $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ кожного з тіл Ω_α визначають вектор переміщень $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = u_{\alpha i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, симетричні тензори деформацій $\hat{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ і напружень $\hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) = \sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, які задовольняють рівняння рівноваги, закон Гука та співвідношення Коші:

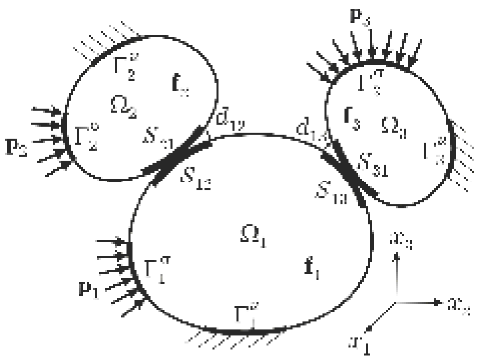

Рис. 1

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + f_{\alpha i}(\mathbf{x}) = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, N, \tag{1}$$

$$\sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \sum_{k,l=1}^{3} C_{\alpha ijkl}(\mathbf{x})\,\varepsilon_{\alpha kl}(\mathbf{x}),$$

$$i, j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, N, \tag{2}$$

$$\varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{\alpha i}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{\alpha j}(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right),$$

$$i,j = 1,2,3, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad \alpha = 1,2,\ldots,N, \qquad (3)$$

де $f_{\alpha i}(\mathbf{x})$ – компоненти вектора об'ємних сил $\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x}) = f_{\alpha i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, що діють на тіло Ω_α, а $C_{\alpha ijkl}(\mathbf{x})$ – компоненти симетричного тензора пружних сталих, які мають властивість [24]

$$(\forall \alpha) \quad (\exists b_\alpha, c_\alpha > 0) \quad (\forall x \in \Omega_\alpha)$$

$$\left\{ b_\alpha \sum_{i,j} \varepsilon^2_{\alpha ij} \le \sum_{i,j,k,l} C_{\alpha ijkl}\varepsilon_{\alpha ij}\varepsilon_{\alpha kl} \le c_\alpha \sum_{k,l} \varepsilon^2_{\alpha kl} \right\}. \qquad (4)$$

На поверхні $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$ кожного з тіл введемо локальний ортонормований базис $\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{\eta}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha$, де $\boldsymbol{\xi}_\alpha$, $\boldsymbol{\eta}_\alpha$ – одиничні дотичні, а $\mathbf{n}_\alpha$ – одинична зовнішня нормаль, та запишемо вектори переміщень і напружень на Γ_α у цьому базисі:

$$\mathbf{u}_\alpha = u_{\alpha\xi}\boldsymbol{\xi}_\alpha + u_{\alpha\eta}\boldsymbol{\eta}_\alpha + u_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha = \hat{\sigma}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha = \sigma_{\alpha\xi}\boldsymbol{\xi}_\alpha + \sigma_{\alpha\eta}\boldsymbol{\eta}_\alpha + \sigma_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha.$$

Нехай поверхня Γ_α складається з трьох частин, які не перетинаються:

$\Gamma_\alpha = \Gamma^u_\alpha \cup \Gamma^\sigma_\alpha \cup S_\alpha$, де $\Gamma^u_\alpha = \overline{\Gamma^u_\alpha}$, $\Gamma^u_\alpha \ne \varnothing$, $S_\alpha = \bigcup_{\beta \in B_\alpha} S_{\alpha\beta} \ne \varnothing$.

На частині Γ^u_α, $\alpha = 1,2,\ldots,N$, задано кінематичні крайові умови, які для спрощення варіаційних формулювань вважаємо нульовими, а на частині Γ^σ_α – статичні крайові умови:

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Gamma^u_\alpha, \quad \alpha = 1,2,\ldots,N, \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma^\sigma_\alpha, \quad \alpha = 1,2,\ldots,N, \qquad (6)$$

де $\mathbf{p}_\alpha = p_{\alpha\xi}\boldsymbol{\xi}_\alpha + p_{\alpha\eta}\boldsymbol{\eta}_\alpha + p_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha$ – задані зовнішні навантаження.

Поверхня $S_{\alpha\beta} \subset \Gamma_\alpha$ відповідає ділянці можливого контакту тіла Ω_α з тілом Ω_β, а $B_\alpha \subset \{1,2,\ldots,N\}$ – множина індексів усіх тіл, які контактують з тілом Ω_α, $B_\alpha \ne \varnothing$, $\alpha = 1,2,\ldots,N$. Вважаємо, що поверхні $S_{\alpha\beta} \subset \Gamma_\alpha$ і $S_{\beta\alpha} \subset \Gamma_\beta$ достатньо близькі ($S_{\alpha\beta} \approx S_{\beta\alpha}$) [2], так що їхні нормалі відрізняються лише знаком: $\mathbf{n}_\alpha(\mathbf{x}) \approx -\mathbf{n}_\beta(\mathbf{x}')$, де $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}$ – проекція точки $\mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}$ на поверхню $S_{\beta\alpha}$. Позначимо через $d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - x'_i)^2}$ відстань по нормалі між тілами Ω_α і Ω_β до деформації.

Поверхні $S_{\alpha\beta}$ і $S_{\beta\alpha}$ мають нелінійні поверхневі шари (покриття) вінклерівського типу. Сумарне обтиснення $w_{\alpha\beta}$ цих шарів є відомою функцією нормального контактного напруження:

$$w_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \psi_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x})) = \psi_{\alpha\beta}(\sigma_{\beta n}(\mathbf{x}')), \quad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}.$$

Обернену залежність запишемо так:

$$\sigma_{\alpha n}(\xi) = \sigma_{\beta n}(\xi') = g_{\alpha\beta}(w_{\alpha\beta}(\xi)), \quad \xi \in S_{\alpha\beta}, \quad \xi' = P(\xi) \in S_{\beta\alpha}.$$

Вважаємо, що нелінійна функція $g_{\alpha\beta}(z)$ є неперервною і має такі властивості [4, 26]:

$$g_{\alpha\beta}(0) = 0, \qquad (\forall\, y,z) \qquad \{y < z \Rightarrow g_{\alpha\beta}(y) < g_{\alpha\beta}(z)\}, \tag{7}$$

$$(\exists M_{\alpha\beta} > 0) \qquad (\forall\, y,z) \qquad \{|g_{\alpha\beta}(y) - g_{\alpha\beta}(z)| \le M_{\alpha\beta}\,|y - z|\}. \tag{8}$$

На поверхнях $S_{\alpha\beta}$ задаємо такі умови одностороннього контакту через нелінійні поверхневі шари [4, 26]:

$$\sigma_{\alpha\xi}(\xi) = \sigma_{\beta\xi}(\xi') = 0, \qquad \sigma_{\alpha\eta}(\xi) = \sigma_{\beta\eta}(\xi') = 0, \tag{9}$$

$$\sigma_{\alpha n}(\xi) = \sigma_{\beta n}(\xi') = g_{\alpha\beta}(w_{\alpha\beta}(\xi)) \le 0, \tag{10}$$

$$u_{\alpha n}(\xi) + u_{\beta n}(\xi') + w_{\alpha\beta}(\xi) \le d_{\alpha\beta}(\xi), \tag{11}$$

$$[u_{\alpha n}(\xi) + u_{\beta n}(\xi') + w_{\alpha\beta}(\xi) - d_{\alpha\beta}(\xi)]\,\sigma_{\alpha n}(\xi) = 0, \tag{12}$$

де $\xi \in S_{\alpha\beta}$, $\xi' = P(\xi) \in S_{\beta\alpha}$, $\beta \in B_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, N$.

Зазначимо, що контактна задача (1)–(3), (5), (6), (9)–(12) є нелінійною, оскільки нелінійними є контактні умови (10) і (12).

2. **Варіаційні формулювання** [4, 26]. Для кожної із областей Ω_α розглянемо простори Соболєва $V_\alpha = [H^1(\Omega_\alpha)]^3$ і введемо в них замкнені підпростори $V_\alpha^0 = \{\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha : \mathbf{u}_\alpha = 0$ на $\Gamma_\alpha^u\}$ зі скалярним добутком

$$(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0} = \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega_\alpha} \left(u_{\alpha i} v_{\alpha i} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_{\alpha i}}{\partial x_j} \frac{\partial v_{\alpha i}}{\partial x_j} \right) d\Omega$$

і нормою $\|\mathbf{u}_\alpha\|_{V_\alpha^0} = \sqrt{(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\alpha)_{V_\alpha^0}}$. Значення елементів просторів V_α і V_α^0 на частинах поверхні області Ω_α будемо розуміти у сенсі слідів [3] і для спрощення позначатимемо їх тими самими символами.

Уведемо простір $V_0 = V_1^0 \times V_2^0 \times \ldots \times V_N^0 = \{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_N)^\bullet : \mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha^0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, N\}$, який є декартовим добутком просторів V_α^0. У просторі V_0 означимо скалярний добуток $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_0} = \sum_{\alpha=1}^{N} (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0}$ і норму $\|\mathbf{u}\|_{V_0} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_0}}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0$.

У гільбертовому просторі V_0 означимо білінійну форму $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ таку, що $A(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ відповідає сумарній енергії пружної деформації тіл:

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^{N} a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha), \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0,$$

$$a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) : \hat{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)\, d\Omega, \qquad \mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0,$$

а також лінійну форму $L(\mathbf{v})$, яка відповідає роботі заданих сил:

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{l}_\alpha(\mathbf{v}_\alpha), \qquad \mathbf{v} \in V_0,$$

$$\ell_\alpha(\mathrm{v}_\alpha) = \int\limits_{\Omega_\alpha} \mathrm{f}_\alpha \cdot \mathrm{v}_\alpha \, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_\alpha^\sigma} \mathrm{p}_\alpha \cdot \mathrm{v}_\alpha \, dS, \qquad \mathrm{v}_\alpha \in V_\alpha^0,$$

де $\mathrm{f}_\alpha \in [L_2(\Omega_\alpha)]^3$, $\mathrm{p}_\alpha \in [L_2(\Gamma_\alpha^\sigma)]^3$, $\alpha = 1, 2, \ldots, N$.

Крім цього, означимо в просторі V_0 невід'ємний неквадратичний функціонал $J(\mathrm{u})$, що відповідає сумарній енергії деформації поверхневих шарів [5]:

$$J(\mathrm{u}) = \sum_{\{\alpha,\beta\}\in Q} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \left[\int\limits_0^{d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n}} g_{\alpha\beta}^-(z)\, dz \right] dS \ge 0, \qquad \mathrm{u} \in V_0,$$

де $g_{\alpha\beta}^-(z) = \{0,\ z \ge 0\} \cup \{g_{\alpha\beta}(z),\ z < 0\}$, а $Q = \{\{\alpha,\beta\} : \alpha \in \{1, 2, \ldots, N\},\ \beta \in B_\alpha\}$ – множина всіх можливих невпорядкованих пар індексів тіл, що контактують між собою. Функціонал $J(\mathrm{u})$ є один раз диференційовним за Ґато [5]:

$$J'(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = -\sum_{\{\alpha,\beta\}\in Q} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} g_{\alpha\beta}^-(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n})[v_{\alpha n} + v_{\beta n}]\, dS, \qquad \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V_0.$$

Диференціал Ґато $J'(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ є нелінійним за u і лінійним за v.

Теорема 1 [4, 5, 26]. *Контактна задача* (1)–(3), (5), (6), (9)–(12) *еквівалентна в слабкому розумінні задачі мінімізації у просторі* V_0 *неквадратичного функціонала*

$$F_1(\mathrm{u}) = F(\mathrm{u}) + J(\mathrm{u}) = \frac{1}{2} A(\mathrm{u}, \mathrm{u}) - L(\mathrm{u}) + J(\mathrm{u}) \to \min_{\mathrm{u} \in V_0} \tag{13}$$

з наступним знаходженням величин $w_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$, $\Xi_\alpha = \Gamma_\alpha \setminus \Gamma_\alpha^u$, $\{\alpha,\beta\} \in Q$, *за формулою*

$$w_{\alpha\beta} = \tilde{g}_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha n}), \quad \sigma_{\alpha n} = g_{\alpha\beta}^-(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n}), \qquad \{\alpha,\beta\} \in Q. \tag{14}$$

Якщо поверхні $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, N$, *усіх тіл є ліпшицевими,* $\Gamma_\alpha^u \ne \varnothing$, $\mathrm{f}_\alpha \in [L_2(\Omega_\alpha)]^3$, $\mathrm{p}_\alpha \in [L_2(\Gamma_\alpha^\sigma)]^3$, $C_{\alpha ijk\ell} \in L_\infty(\Omega_\alpha)$, $i, j, k, \ell = 1, 2, 3$, $\alpha = 1, 2, \ldots, N$, $d_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$, $\{\alpha,\beta\} \in Q$, *і виконуються умови* (4), (7) *і* (8), *то задача* (13) *має єдиний розв'язок* $\bar{\mathrm{u}} \in V_0$, *а її розв'язання еквівалентне розв'язанню в просторі* V_0 *нелінійного за* u *варіаційного рівняння*

$$F_1'(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = A(\mathrm{u}, \mathrm{v}) + J'(\mathrm{u}, \mathrm{v}) - L(\mathrm{v}) = 0 \qquad \forall\, \mathrm{v} \in V_0,\ \mathrm{u} \in V_0. \tag{15}$$

Отже, розв'язування вихідної контактної задачі зведено до розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (15) у гільбертовому просторі V_0. Це варіаційне рівняння – недиференційовне, оскільки доданок $J'(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ у загальному випадку не є диференційовним за Ґато.

3. **Одноточкові алгоритми декомпозиції області** [4, 26]. Спершу для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (15) контактної задачі (1)–(3), (5), (6), (9)–(12) застосуємо такий неявний одноточковий нестаціонарний ітераційний метод [4]:

$$G^k(\mathrm{u}^{k+1}, \mathrm{v}) = G^k(\mathrm{u}^k, \mathrm{v}) - \gamma^k F_1'(\mathrm{u}^k, \mathrm{v}) \qquad \forall\, \mathrm{v} \in V_0, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{16}$$

де $G^k : V_0 \times V_0 \to \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$, – деякі білінійні форми у просторі V_0, $\gamma^k \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}_0$, – ітераційні параметри, а $\mathrm{u}^k \in V_0$, $k \in \mathbf{N}_0$, – k-ті наближення до точного розв'язку $\bar{\mathrm{u}} \in V_0$ рівняння (15).

Зазначимо, що в загальному випадку ітераційний метод (16), застосований до розв'язування (15), не приводить до декомпозиції задачі за підобластями. Декомпозиції можна досягти лише завдяки певному вибору білінійних форм G^k у цьому методі.

Надалі будемо вважати, що функції $g_{\alpha\beta}(z)$, $\{\alpha,\beta\}\in\Theta$, мають узагальнені похідні, які позначатимемо через $g'_{\alpha\beta}(z)$, $\{\alpha,\beta\}\in\Theta$. Виберемо білінійні форми G^k так [4, 26]:

$$G^k(u,v)=\partial^2 F_1(u^k,u,v)=A(u,v)+\partial^2 J(u^k,u,v),\qquad u,v\in V_0, \tag{17}$$

де

$$\partial^2 J(u^k,u,v)=\sum_{\{\alpha,\beta\}\in\Theta}\int_{S_{\alpha\beta}}\chi^k_{\alpha\beta}\, g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta}-u^k_{\alpha n}-u^k_{\beta n})\times$$

$$\times[u_{\alpha n}+u_{\beta n}][v_{\alpha n}+v_{\beta n}]\,dS,$$

$$\chi^k_{\alpha\beta}=-[\operatorname{sgn}(d_{\alpha\beta}-u^k_{\alpha n}-u^k_{\beta n})]^-,\qquad \{\alpha,\beta\}\in\Theta.$$

Тут $\partial^2 J(u^k,u,v)$ і $\partial^2 F_1(u^k,u,v)$ – другі субдиференціали Ґато функціоналів J і F_1 у точці $u^k\in V_0$ за напрямками $u\in V_0$ і $v\in V_0$.

Ітераційний метод (16) з білінійними формами G^k у вигляді (17) при $\gamma^k=1$, $k=0,1,\ldots$, відповідає неявному напівгладкому методу Ньютона для розв'язування варіаційного рівняння (15). Однак цей ітераційний метод не приводить до декомпозиції задачі за підобластями.

Тепер опишемо такі варіанти вибору білінійних форм методу (16), які дозволяють здійснити декомпозицію, тобто звести розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (15) у всій області Ω до розв'язування на кожній ітерації незалежних лінійних варіаційних рівнянь в окремих тілах Ω_α.

Виберемо білінійні форми G^k таким чином [4, 26]:

$$G^k(u,v)=A(u,v)+X^k(u,v),\qquad u,v\in V_0,$$

$$X^k(u,v)=\sum_{\{\alpha,\beta\}\in\Theta}\int_{S_{\alpha\beta}}\psi^k_{\alpha\beta}\, g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta}-u^k_{\alpha n}-u^k_{\beta n})[u_{\alpha n}v_{\alpha n}+u_{\beta n}v_{\beta n}]\,dS, \tag{18}$$

де $\psi^k_{\alpha\beta}(x)=\{0,x\in S_{\alpha\beta}\setminus S^k_{\alpha\beta}\}\cup\{1,x\in S^k_{\alpha\beta}\}$ – характеристичні функції деяких заданих підобластей $S^k_{\alpha\beta}\subset S_{\alpha\beta}$, $k\in\mathbf{N}_0$, поверхонь $S_{\alpha\beta}$, $\{\alpha,\beta\}\in\Theta$. Зокрема, ці функції можна задати, як у напівгладкому методі Ньютона:

$$\psi^k_{\alpha\beta}=\chi^k_{\alpha\beta}=\chi_{\alpha\beta}(u^k)=-[\operatorname{sgn}(d_{\alpha\beta}-u^k_{\alpha n}-u^k_{\beta n})]^-,\qquad \{\alpha,\beta\}\in\Theta. \tag{19}$$

Покажемо, що внаслідок такого вибору білінійних форм G^k отримаємо декомпозицію за підобластями. Позначимо $\tilde u^{k+1}=[u^{k+1}-(1-\gamma^k)u^k]/\gamma^k$. Тоді ітераційний метод (16) з білінійними формами (18) можна записати у такому еквівалентному вигляді:

$$A(\tilde u^{k+1},v)+X^k(\tilde u^{k+1},v)=L(v)+X^k(u^k,v)-J'(u^k,v)\quad \forall v\in V_0, \tag{20}$$

$$u^{k+1}=\gamma^k\tilde u^{k+1}+(1-\gamma^k)u^k,\qquad k=0,1,\ldots. \tag{21}$$

Спільні величини для підобластей в ітераційному процесі (20), (21) є відомими з попереднього ітераційного кроку. Тому варіаційне рівняння (20) розпадається на N незалежних варіаційних рівнянь у підобластях Ω_α, і метод (20), (21) еквівалентний такому ітераційному методу [4, 26]:

$$a_\alpha(\tilde u_\alpha^{k+1}, v_\alpha) + \sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}} \psi^k_{\alpha\beta}\, g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u^k_{\alpha n} - u^k_{\beta n})\,\tilde u^{k+1}_{\alpha n} v_{\alpha n}\, dS =$$

$$= \ell_\alpha(v_\alpha) + \sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}} \psi^k_{\alpha\beta}\, g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u^k_{\alpha n} - u^k_{\beta n})\, u^k_{\alpha n} v_{\alpha n}\, dS +$$

$$+ \sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}} g^-_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u^k_{\alpha n} - u^k_{\beta n})\, v_{\alpha n}\, dS$$

$$\forall v_\alpha \in V^0_\alpha, \quad \alpha = 1,2,\dots,N, \tag{22}$$

$$u^{k+1}_\alpha = \gamma^k \tilde u^{k+1}_\alpha + (1-\gamma^k)\, u^k_\alpha, \qquad \alpha = 1,2,\dots,N, \quad k = 0,1,\dots . \tag{23}$$

На кожному кроці k методу (22), (23) необхідно паралельно розв'язувати N незалежних лінійних варіаційних рівнянь (22) в окремих тілах Ω_α. Ці варіаційні рівняння відповідають крайовим задачам теорії пружності з умовами Робіна (Пуанкаре) на поверхнях $S_{\alpha\beta}$. Тому ітераційний метод (22), (23) належить до ***паралельних схем Робіна*** (***Пуанкаре***) ***декомпозиції області.***

Вибираючи різні характеристичні функції $\psi^k_{\alpha\beta} = \psi^k_{\alpha\beta}(x)$, $\{\alpha,\beta\}\in Q$, $k\in\mathbf{N}_0$, можемо отримати різні варіанти алгоритму декомпозиції області (22), (23). Так, покладаючи $\psi^k_{\alpha\beta}(x)\equiv 0$, тобто $S^k_{\alpha\beta} = \varnothing$, $\{\alpha,\beta\}\in Q$, $k\in\mathbf{N}_0$, одержуємо ***паралельну схему Неймана***. Інший граничний випадок відповідає вибору $\psi^k_{\alpha\beta}(x)\equiv 1$, тобто $S^k_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}$, $\{\alpha,\beta\}\in Q$, $k\in\mathbf{N}_0$.

Виконані числові дослідження показали, що функції $\psi^k_{\alpha\beta}(x)$ найефективніше задавати у вигляді (19). Такий варіант вибору забезпечить кращу збіжність методу (22), (23) порівняно з вибором $\psi^k_{\alpha\beta}(x)\equiv 0$, $\{\alpha,\beta\}\in Q$, $k\in\mathbf{N}_0$, або $\psi^k_{\alpha\beta}(x)\equiv 1$, $\{\alpha,\beta\}\in Q$, $k\in\mathbf{N}_0$. Тоді алгоритм декомпозиції області (22), (23) можна трактувати як *модифікацію напівгладкого методу Ньютона.*

4. **Двоточкові алгоритми декомпозиції області**. Перепишемо нелінійне варіаційне рівняння (15) контактної задачі (1)–(3), (5), (6), (9)–(12) у такій формі:

$$F_1'(u,v) = F'(u,v) + J'(u,v) = 0 \qquad \forall v\in V_0,\ u\in V_0. \tag{24}$$

Тут $F'(u,v) = A(u,v) - L(v)$ – диференційовна за Ґато частина, а $J'(u,v)$ – недиференційовна частина. Диференціал Ґато від $F'(u,v)$ за напрямком $w\in V_0$ має вигляд $F''(u,v,w) = A(v,w)$, $u,v,w\in V_0$.

Розглянемо диференціально-різницеві ітераційні методи для розв'язування цього варіаційного рівняння.

Диференціально-різницеві методи для варіаційних рівнянь з недиференційовним оператором – це багатоточкові модифікації методу Ньютона, у яких застосовується лише диференціал від диференційовної частини оператора, а недиференційовній частині відповідає певна різницева формула (поділена різниця).

Зазначимо, що поділена різниця першого порядку для функціонала $J'(u,v)$ має вигляд

$$H(y,z,u,v) =$$

$$= -\sum_{\{\alpha,\beta\}\in Q}\int_{S_{\alpha\beta}} \frac{g^-_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - y_{\alpha n} - y_{\beta n}) - g^-_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - z_{\alpha n} - z_{\beta n})}{y_{\alpha n} + y_{\beta n} - z_{\alpha n} - z_{\beta n}}\,\times$$

$$\times\, [u_{\alpha n} + u_{\beta n}][v_{\alpha n} + v_{\beta n}]\, dS, \qquad y,z,u,v\in V_0.$$

Застосуємо до розв'язування варіаційного рівняння (24) такий неявний двоточковий ітераційний метод:

$$G^{k,k-1}(\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{v}) = G^{k,k-1}(\mathbf{u}^{k},\mathbf{v}) - \gamma^k F_1'(\mathbf{u}^{k},\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in V_0,\ k = 0,1,\ldots, \tag{25}$$

де $G^{k,k-1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = G(\mathbf{u}^{k},\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u},\mathbf{v})$, $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0$, $k = 0,1,\ldots$, – деякі задані функціонали, лінійні за $\mathbf{u} \in V_0$ і за $\mathbf{v} \in V_0$; $\gamma^k \in \mathbf{R}$, $k = 0,1,\ldots$, – ітераційні параметри; $\mathbf{u}^k \in V_0$, $k = 1,2,\ldots$, – k-ті наближення до точного розв'язку $\bar{\mathbf{u}} \in V_0$ рівняння (15), а $\mathbf{u}^0,\mathbf{u}^{-1} \in V_0$ – початкові наближення.

Виберемо білінійні форми $G^{k,k-1}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ у методі (25) таким чином:

$$G^{k,k-1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = F'(\mathbf{u}^{k},\mathbf{u},\mathbf{v}) + H(\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u}^{k},\mathbf{u},\mathbf{v}) =$$

$$= A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + H(\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u}^{k},\mathbf{u},\mathbf{v}), \qquad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0. \tag{26}$$

У результаті отримаємо ітераційний метод (25), (26) для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (24), який при $\gamma^k = 1$ відповідає неявному комбінованому диференціально-різницевому методу Ньютона – хорд [13, 15].

Якщо ж білінійні форми $G^{k,k-1}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ у методі (25) вибрати так:

$$G^{k,k-1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = F'(\mathbf{u}^{k},\mathbf{u},\mathbf{v}) + H(2\mathbf{u}^{k} - \mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u},\mathbf{v}) =$$

$$= A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + H(2\mathbf{u}^{k} - \mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u},\mathbf{v}), \qquad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0, \tag{27}$$

то при $\gamma^k = 1$ одержимо неявний комбінований диференціально-різницевий ітераційний метод Ньютона – Курчатова [13, 14] для розв'язування рівняння (24), який описується ітераційними формулами (25), (27).

Однак диференціально-різницеві ітераційні методи Ньютона – хорд і Ньютона – Курчатова, як і напівгладкий метод Ньютона, не приведуть до декомпозиції задачі за підобластями, оскільки поділена різниця $H(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v})$ містить величини $u_{\alpha n}v_{\beta n}$ і $u_{\beta n}v_{\alpha n}$, $\{\alpha,\beta\} \in Q$, які є спільними для різних тіл. Тому задля досягнення декомпозиції пропонуємо модифікації цих методів, які полягають у використанні у білінійних формах (26) і (27), замість поділеної різниці $H(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v})$, $\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0$, функціонала

$$\tilde{H}(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v}) =$$

$$= -\sum_{\{\alpha,\beta\} \in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} \frac{g^-_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - y_{\alpha n} - y_{\beta n}) - g^-_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - z_{\alpha n} - z_{\beta n})}{y_{\alpha n} + y_{\beta n} - z_{\alpha n} - z_{\beta n}} \times$$

$$\times [u_{\alpha n}v_{\alpha n} + u_{\beta n}v_{\beta n}]\,dS, \qquad \mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0,$$

який не містить доданків, спільних для підобластей.

Отже, білінійні форми $G^{k,k-1}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0$, в ітераційному методі (25) задаємо у вигляді

$$G^{k,k-1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \tilde{H}(\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u}^{k},\mathbf{u},\mathbf{v}), \qquad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0, \tag{28}$$

або

$$G^{k,k-1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \tilde{H}(2\mathbf{u}^{k} - \mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u},\mathbf{v}), \qquad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0. \tag{29}$$

Увівши позначення $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} = [\mathbf{u}^{k+1} - (1-\gamma^k)\mathbf{u}^k]/\gamma^k$, $k = 0,1,\ldots$, запишемо ітераційний метод (25) з білінійними формами (28) у такому еквівалентному вигляді:

$$A(\tilde{u}^{k+1}, v) + \tilde{H}(u^{k-1}, u^k, \tilde{u}^{k+1}, v) =$$

$$= L(v) + \tilde{H}(u^{k-1}, u^k, u^k, v) - J'(u^k, v), \tag{30}$$

$$u^{k+1} = \gamma^k \tilde{u}^{k+1} + (1-\gamma^k)\, u^k, \qquad k = 0,1,\ldots. \tag{31}$$

Варіаційне рівняння (30) розпадається на N незалежних варіаційних рівнянь у тілах Ω_α, тому метод (30), (31) еквівалентний такому ітераційному процесу:

$$a_\alpha(\tilde{u}_\alpha^{k+1}, v_\alpha) +$$

$$+ \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \frac{g^{-}_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^{k-1} - u_{\beta n}^{k-1}) - g^{-}_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^{k} - u_{\beta n}^{k})}{u_{\alpha n}^{k-1} + u_{\beta n}^{k-1} - u_{\alpha n}^{k} - u_{\beta n}^{k}}\, \tilde{u}_{\alpha n}^{k+1} v_{\alpha n}\, dS =$$

$$= \mathbf{l}_\alpha(v_\alpha) +$$

$$+ \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \frac{g^{-}_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^{k-1} - u_{\beta n}^{k-1}) - g^{-}_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^{k} - u_{\beta n}^{k})}{u_{\alpha n}^{k-1} + u_{\beta n}^{k-1} - u_{\alpha n}^{k} - u_{\beta n}^{k}}\, u_{\alpha n}^{k} v_{\alpha n}\, dS +$$

$$+ \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} g^{-}_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^{k} - u_{\beta n}^{k}) v_{\alpha n}\, dS, \quad \forall v_\alpha \in V_\alpha^0, \ \alpha = 1,2,\ldots,N, \tag{32}$$

$$u_\alpha^{k+1} = \gamma^k \tilde{u}_\alpha^{k+1} + (1-\gamma^k)\, u_\alpha^k, \qquad \alpha = 1,2,\ldots,N, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{33}$$

У результаті одержуємо двоточковий алгоритм декомпозиції області (32), (33), який можна вважати *модифікацією диференціально-різницевого методу Ньютона – хорд*.

Подібно ітераційний метод (25) з білінійними формами (29) можна звести до вигляду

$$A(\tilde{u}^{k+1}, v) + \tilde{H}(2u^k - u^{k-1}, u^{k-1}, \tilde{u}^{k+1}, v) = L(v) +$$

$$+ \tilde{H}(2u^k - u^{k-1}, u^{k-1}, u^k, v) - J'(u^k, v) \qquad \forall v \in V_0, \tag{34}$$

$$u^{k+1} = \gamma^k \tilde{u}^{k+1} + (1-\gamma^k)\, u^k, \qquad k = 0,1,\ldots, \tag{35}$$

який еквівалентний такому методу:

$$a_\alpha(\tilde{u}_\alpha^{k+1}, v_\alpha) +$$

$$+ \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \frac{g^{-}_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - 2u_{\alpha n}^{k} - 2u_{\beta n}^{k} + u_{\alpha n}^{k-1} + u_{\beta n}^{k-1}) - g^{-}_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^{k-1} - u_{\beta n}^{k-1})}{2(u_{\alpha n}^{k} + u_{\beta n}^{k} - u_{\alpha n}^{k-1} - u_{\beta n}^{k-1})} \times$$

$$\times\, \tilde{u}_{\alpha n}^{k+1} v_{\alpha n}\, dS = \mathbf{l}_\alpha(v_\alpha) +$$

$$+ \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \frac{g^{-}_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - 2u_{\alpha n}^{k} - 2u_{\beta n}^{k} + u_{\alpha n}^{k-1} + u_{\beta n}^{k-1}) - g^{-}_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^{k-1} - u_{\beta n}^{k-1})}{2(u_{\alpha n}^{k} + u_{\beta n}^{k} - u_{\alpha n}^{k-1} - u_{\beta n}^{k-1})} \times$$

$$\times\, u_{\alpha n}^{k} v_{\alpha n}\, dS + \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} g^{-}_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^{k} - u_{\beta n}^{k}) v_{\alpha n}\, dS$$

$$\forall v_\alpha \in V_\alpha^0, \quad \alpha = 1,2,\ldots,N, \tag{36}$$

$$u_\alpha^{k+1} = \gamma^k \tilde{u}_\alpha^{k+1} + (1-\gamma^k)\, u_\alpha^k, \qquad \alpha = 1,2,\ldots,N, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{37}$$

Отриманий двоточковий метод декомпозиції області (36), (37) можемо трактувати як *модифікацію диференціально-різницевого методу Ньютона – Курчатова.*

На кожній k-й ітерації алгоритмів декомпозиції області (32), (33) і (36), (37) потрібно паралельно розв'язувати N незалежних лінійних варіаційних рівнянь (32) або (36) в окремих підобластях Ω_α, що відповідають задачам теорії пружності з такими крайовими умовами Робіна (Пуанкаре) на ділянках можливого контакту $S_{\alpha\beta}$:

$$\tilde{\sigma}^{k+1}_{\alpha\beta n} + \varphi^{k,k-1}_{\alpha\beta}\tilde{u}^{k+1}_{\alpha n} = g^{-}_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u^{k}_{\alpha n} - u^{k}_{\beta n}) + \varphi^{k,k-1}_{\alpha\beta}u^{k}_{\alpha n}, \qquad x \in S_{\alpha\beta},$$

де $\tilde{\sigma}^{k+1}_{\alpha\beta n}$ – невідомі зусилля. Тут величина $\varphi^{k,k-1}_{\alpha\beta}$ у випадку алгоритму (32), (33) має вигляд

$$\varphi^{k,k-1}_{\alpha\beta} = \frac{g^{-}_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u^{k-1}_{\alpha n} - u^{k-1}_{\beta n}) - g^{-}_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u^{k}_{\alpha n} - u^{k}_{\beta n})}{u^{k-1}_{\alpha n} + u^{k-1}_{\beta n} - u^{k}_{\alpha n} - u^{k}_{\beta n}},$$

а у випадку алгоритму (36), (37) вона визначається так:

$$\varphi^{k,k-1}_{\alpha\beta} = \frac{g^{-}_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - 2u^{k}_{\alpha n} - 2u^{k}_{\beta n} + u^{k-1}_{\alpha n} + u^{k-1}_{\beta n}) - g^{-}_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u^{k-1}_{\alpha n} - u^{k-1}_{\beta n})}{2(u^{k}_{\alpha n} + u^{k}_{\beta n} - u^{k-1}_{\alpha n} - u^{k-1}_{\beta n})}.$$

Отже, для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (15) задачі про контакт багатьох пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів розроблено ряд одноточкових напівгладких і двоточкових диференціально-різницевих паралельних ітераційних алгоритмів декомпозиції області, які зводять це рівняння до розв'язування на кожному ітераційному кроці незалежних крайових задач лінійної теорії пружності в окремих тілах з умовами Робіна на зонах контакту. Для наближеного розв'язування задач у тілах можна застосовувати різні числові методи, зокрема метод скінченних елементів (МСЕ) або метод граничних елементів (МГЕ).

5. **Числові дослідження**. Здійснено програмну реалізацію розроблених методів декомпозиції області для плоских задач про контакт через поверхневі вінклерівські шари двох і трьох пружних тіл із застосуванням скінченноелементних апроксимацій на лінійних і квадратичних трикутних елементах.

Дослідження числової ефективності двоточкових і одноточкових алгоритмів декомпозиції області проведено для задачі про контактну взаємодію через нелінійний вінклерівський шар двох ізотропних пружних тіл Ω_1 і Ω_2, одне з яких має крайову виїмку (рис. 2). Тіла мають висоту h і довжину ℓ. Висота виїмки описується функцією $r(x_1) = r_0[1 - (x_1 - \ell)^2 / b^2]^{3/2}$, де $x_1 \in [\ell - b, \ell]$, $r_0 = 5 \cdot 10^{-4} b$, b – довжина виїмки. На нижню межу тіла Ω_1 і верхню межу тіла Ω_2 діє нормальне стискувальне навантаження сталої інтенсивності q. На правій і лівій межах кожного з тіл задано умови симетрії. Модулі Юнґа та коефіцієнти Пуассона матеріалів тіл однакові: $E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Зоною можливого контакту

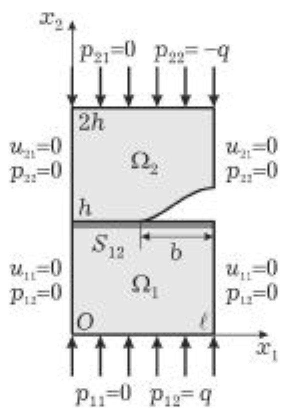

Рис. 2

є $S_{12} = \{x = (x_1, x_2)^\top : x_1 \in [0, l],\ x_2 = h\}$, а відстань між тілами до деформації дорівнює $d_{12}(x) = r_0\{[1 - (x_1 - l)^2 / b^2]^+\}^{3/2}$, $x \in S_{12}$, де $y^+ = \max\{0, y\}$.

Нелінійну функцію g_{12}, яка описує зв'язок між нормальними напруженнями і переміщеннями вінклерівського шару, задаємо у вигляді

$$g_{12}(w_{12}(x)) = \frac{1}{B^{1/\alpha}} \operatorname{sgn}(w_{12}(x))\,|w_{12}(x)|^{1/\alpha}, \qquad x \in S_{12}.$$

Описану задачу розв'язано за допомогою двоточкових алгоритмів декомпозиції області (32), (33) і (36), (37), які є модифікаціями комбінованих методів Ньютона – хорд і Ньютона – Курчатова відповідно та одноточкового алгоритму декомпозиції області (22), (23) з характеристичною функцією $\psi_{12}^k = \chi_{12}^k$, який можна трактувати як модифікацію напівгладкого методу Ньютона. Для розв'язування задач в окремих тілах на кожному кроці МДО застосовували МСЕ з лінійними трикутними елементами. Ітераційні параметри γ^k, $k \in \mathbf{N}_0$, в усіх алгоритмах МДО задавали однаковими на всіх ітераціях, тобто $\gamma^k = \gamma > 0$, $k = 0, 1, \mathbf{K}$. Початкові наближення для контактних переміщень вибирали у вигляді $u_{\alpha n}^0(x) \equiv 10^{-4} b$, $u_{\alpha n}^{-1}(x) \equiv 2 \cdot 10^{-4} b$, $\alpha = 1, 2$, $x \in S_{12}$. За критерій завершення ітераційного процесу вибирали такий:

$$\frac{\left\| u_{\alpha n}^{k+1} - u_{\alpha n}^k \right\|_2}{\left\| u_{\alpha n}^{k+1} \right\|_2} \le \varepsilon_u, \quad \alpha = 1, 2,$$

де $\|u_{\alpha n}\|_2 = \sqrt{\sum_j [u_{\alpha n}(x^j)]^2}$ – дискретна норма, $x^j \in S_{12}$ – вузли скінченно-елементного розбиття ділянки можливого контакту S_{12}, а $\varepsilon_u > 0$ – відносна точність. Числові розрахунки здійснено для таких геометричних і фізичних парамерів: $h = 1$ см, $l = 4$ см, $b = 1$ см, $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$, $q = 10$ МПа, $B = 4 \cdot 10^{-6}$ см/(МПа)$^{\alpha}$, $\alpha = 1.1$. Для кожного з тіл застосовували скінченноелементне розбиття на 1024 трикутні скінченні елементи. За такого розбиття вздовж зони можливого контакту S_{12} міститься по 32 скінченних елементи з кожного боку.

У роботі [4] проведено числові дослідження цієї задачі за допомогою одноточкових методів декомпозиції області (22), (23). У цій праці проаналізовано залежність збіжності алгоритму МДО (22), (23) від вибору ітераційного параметра γ, а також вивчено вплив параметрів нелінійного вінклерівського шару та довжини тіл на нормальне контактне напруження.

У пропонованій статті досліджено двоточкові алгоритми декомпозиції області (32), (33) і (36), (37) для розв'язування сформульованої задачі. Здійснено порівняння швидкості збіжності цих алгоритмів і одноточкового алгоритму (22), (23), (19) за різних значень ітераційного параметра γ.

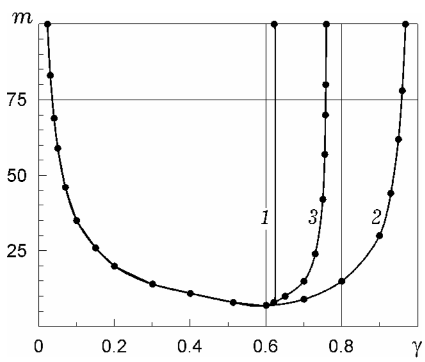

Рис. 3

На рис. 3 наведено графіки залежності загальної кількості ітерацій m, необхідної для досягнення точності $\varepsilon_u = 0.001$, від ітераційного параметра γ для різних алгоритмів МДО. Крива *1* відповідає цій залежності для одноточкового МДО (22), (23), (19), який є модифікацією напівгладкого методу Ньютона, крива *2* – для двоточкового алгоритму (32), (33), який є модифікацією методу Ньютона – хорд, а крива *3* – для двоточкового МДО (36), (37), який можна трактувати як модифікацію методу Ньютона – Курчатова.

Значення кількості ітерацій m вибраних вище алгоритмів при деяких значеннях параметра γ наведено у табл. 1. Стовпчик ***I*** відповідає значенням m для одноточкового алгоритму (22), (23), (19), а стовпці ***II*** і ***III*** – для двоточкових МДО (32), (33) і (36), (37).

Бачимо, що при $\gamma \in (0, 0.6]$ усі три алгоритми для розглядуваної задачі збігаються з майже однаковою швидкістю, а при $\gamma > 0.6$ збіжність усіх алгоритмів є різною. Найширшу область збіжності за параметром γ має алгоритм (32), (33), який є модифікацією методу Ньютона – хорд (стовпчик ***II***). Цей алгоритм збігається за $\gamma \in (0, 0.999]$. Алгоритм (36), (37), який є модифікацією методу Ньютона – Курчатова, є збіжним при $\gamma \in (0, 0.76]$. Найменшу область збіжності за γ серед трьох алгоритмів для сформульованої задачі має алгоритм (22), (23), (19), що є модифікацією напівгладкого методу Ньютона. Він збігається для $\gamma \in (0, 0.6205]$. При $\gamma \in [0.62, 0.6205]$ модифікація методу Ньютона – хорд (32), (33) збігається швидше, ніж одноточковий алгоритм (22), (23), (19), а при $\gamma \in [0.62, 0.76]$ має вищу швидкість збіжності, ніж модифікація методу Ньютона – Курчатова (36), (37).

Таблиця 1. Кількість ітерацій m за різних значень параметра γ.

γ	***I***	***II***	***III***
0.02	108	108	109
0.05	59	59	59
0.1	35	35	35
0.2	20	20	20
0.3	14	14	14
0.4	11	11	11
0.5	9	9	9
0.6	7	7	7
0.6205	8	7	8
0.6206	–	7	8
0.7	–	9	15
0.75	–	12	42
0.76	–	12	134
0.761	–	12	–
0.8	–	15	–
0.9	–	30	–
0.95	–	62	–
0.98	–	158	–
0.99	–	318	–
0.995	–	638	–
0.999	–	3198	–
1	–	–	–

Оптимальним значенням ітераційного параметра γ для усіх трьох алгоритмів є $\gamma_* = 0.6$. При цьому значенні γ методи декомпозиції (22), (23), (19) і (32), (33), а також (36), (37) досягають точності $\varepsilon_u = 0.001$ за $m = 7$ ітерацій.

Отже, серед розглянутих алгоритмів декомпозиції області найбільш ефективним для розв’язування сформульованої задачі є застосування двоточкового МДО (32), (33), який є модифікацією методу Ньютона – хорд. Цей метод має найширший діапазон допустимих значень ітераційного параметра γ і, починаючи з деякого значення γ, – вищу швидкість збіжності порівняно з модифікацією методу Ньютона – Курчатова (36), (37) та одноточковим методом (22), (23), (19).

Висновки. Розглянуто задачу про односторонній контакт через нелінійні вінклерівські поверхневі шари багатьох пружних тіл. Наведено слабке формулювання цієї задачі у вигляді нелінійного варіаційного рівняння з недиференційовним оператором у гільбертовому просторі, отримане у працях [4, 5, 26].

Для розв’язування нелінійного варіаційного рівняння, що відповідає контактній задачі, запропоновано двоточкові паралельні ітераційні методи декомпозиції області типу Робіна, які одержано на основі модифікацій неявних комбінованих диференціально-різницевих ітераційних методів Ньютона – хорд [13, 15] і Ньютона – Курчатова [13, 14].

Здійснено числову реалізацію отриманих алгоритмів МДО для плоских задач про контакт двох і трьох пружних тіл за можливої наявності нелінійних поверхневих шарів вінклерівського типу на основі скінченноелементних апроксимацій. Розроблені методи апробовано для числового розв'язування плоскої задачі про контактну взаємодію через нелінійний вінклерівський прошарок двох ізотропних пружних тіл з виїмкою. Досліджено вплив вибору ітераційних параметрів на швидкість збіжності методів декомпозиції області. Проведено порівняння числової ефективності двоточкових алгоритмів МДО і одноточкового алгоритму декомпозиції області, запропонованого у працях [4, 26].

Встановлено, що для розглянутої задачі двоточкові алгоритми декомпозиції області, отримані на основі модифікацій комбінованих диференціально-різницевих ітераційних методів, є ефективнішими, ніж одноточковий МДО, який можна інтерпретувати як модифікацію напівгладкого методу Ньютона, оскільки вони мають ширшу область значень допустимих ітераційних параметрів і, починаючи з певного значення ітераційного параметра, досягають заданої точності за меншу кількість ітерацій.

1. *Бартіш М. Я., Щербина Ю. М.* Про один різницевий метод розв'язування нелінійних операторних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1972. – № 7. – С. 579–582.
2. *Кравчук А. С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // Прикл. математика и механика. – 1978. – 42, № 3. – С. 467–473.

   Те саме: *Kravchuk A. S.* Formulation of the problem of contact between several deformable bodies as a nonlinear programming problem // J. Appl. Math. Mech. – 1978. – 42, No. 3. – P. 489–498 – https://doi.org/10.1016/0021-8928(78)90117-X.
3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 588 с.

   Те саме: *Lions J.-L.* Quelques méthodes de résolution des problèms aux limites non linéares. – Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1969. – 554 p.
4. *Мартиняк Р. М., Прокопишин І. А., Прокопишин І. І.* Контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 3. – С. 43–56.

   Те саме: *Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A., Prokopyshyn I. I.* Contact of elastic bodies with nonlinear Winkler surface layers // J. Math. Sci. – 2015. – 205, No. 4. – P. 535–553. – https://doi.org/10.1007/s10958-015-2265-0.
5. *Прокопишин И. А., Хлебников Д. Г.* Эквивалентные вариационные постановки односторонних контактных задач для упругих тел при наличии нелинейного поверхностного слоя // Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела: Тез. докл. респ. науч.-техн. конф. – Харьков: ХИСИ, 1989. – С. 83–85.
6. *Прокопишин І. І.* Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач контакту пружних тіл: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02. – Львів, 2010. – 163 с.
7. *Прокопишин І. І., Дияк І. І., Мартиняк Р. М.* Числове дослідження задач про контакт трьох пружних тіл методами декомпозиції області // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2013. – 49, № 1. – С. 46–55.

   Те саме: *Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M.* Numerical analysis of the problems of contact of three elastic bodies by the domain decomposition methods // Mater. Sci. – 2013. – 49, No. 1. – P. 45–58. – https://doi.org/10.1007/s11003-013-9581-7.
8. *Прокопишин І.* Методи декомпозиції області для задач про односторонній контакт нелінійно пружних тіл // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2012. – Вип. 15. – С. 75–87.
9. *Прокопишин І.* Паралельні схеми методу декомпозиції області для контактних задач теорії пружності без тертя // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2008. – Вип. 14. – С. 123–133.
10. *Прокопишин І., Шахно С.* Диференціально-різницеві ітераційні алгоритми декомпозиції області для задач про односторонній контакт багатьох пружних тіл // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2017. – Вип. 25. – С. 125–140.

11. *Шахно С. М.* Про двокроковий ітераційний процес в узагальнених умовах Ліпшиця для поділених різниць першого порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 1. – С. 59–66.
Те саме: *Shakhno S. M.* On a two-step iterative process under generalized Lipschitz conditions for first-order divided differences // J. Math. Sci. – 2010. – 168, No. 4. – P. 576–584. – https://doi.org/10.1007/s10958-010-0008-9.
12. *Шахно С. М.* Про різницевий метод з квадратичною збіжністю для розв'язування нелінійних операторних рівнянь // Мат. студії. – 2006. – 26, № 1. – С. 105–110.
13. *Шахно С. М., Мельник І. В., Ярмола Г. П.* Аналіз збіжності комбінованого методу для розв'язування нелінійних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 1. – С. 31–39.
Те саме: *Shakhno S. M., Mel'nyk I. V., Yarmola H. P.* Analysis of the convergence of a combined method for the solution of nonlinear equations // J. Math. Sci. – 2014. – 201, No. 1. – P. 32–43. – https://doi.org/10.1007/s10958-014-1971-3.
14. *Шахно С. М., Ярмола Г. П.* Двоточковий метод для розв'язування нелінійних рівнянь з недиференційовним оператором // Мат. студії. – 2011. – 36, № 2. – С. 213–220.
15. *Argyros I. K.* A unifying local-semilocal convergence analysis and applications for two-point Newton-like methods in Banach space // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – 298, No. 2. – P. 374–397. – https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.04.008.
16. *Argyros I. K., Shakhno S.* Extended local convergence for the combined Newton–Kurchatov method under the generalized Lipschitz conditions // Mathematics. – 2019. – 7, No. 2. – Article 207, 12 p. – https://doi.org/10.3390/math7020207.
17. *Avery P., Farhat C.* The FETI family of domain decomposition methods for inequality-constrained quadratic programming: Application to contact problems with conforming and nonconforming interfaces // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2009. – 198, No. 21-26. – P. 1673–1683. – https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.12.014.
18. *Chen X., Nashed Z., Qi L.* Smoothing methods and semismooth methods for nondifferentiable operator equations // SIAM J. Numer. Anal. – 2000. – 38, No. 4. – P. 1200–1216.
19. *Dostál Z., Kozubek T., Vondrák V., Brzobohatý T., Markopoulos A.* Scalable TFETI algorithm for the solution of multibody contact problems of elasticity // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2010. – 82, No. 11. – P. 1384–1405. – https://doi.org/10.1002/nme.2807.
20. *Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., Prokopyshyn I. A.* Penalty Robin–Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity: Convergence results // http://arxiv.org/pdf/1208.6478v1.pdf. – 2012. – 32 p.
21. *Haslinger J., Kučera R., Sassi T.* A domain decomposition algorithm for contact problems: Analysis and implementation // Math. Model. Nat. Phenom. – 2009. – 4, No 1. – P. 123–146. – https://doi.org/10.1051/mmnp/20094106.
22. *Hernández M. A., Rubio M. J.* The secant method for nondifferentiable operators // Appl. Math. Lett. – 2002. – 15, No. 4. – P. 395–399. – https://doi.org/10.1016/S0893-9659(01)00150-1.
23. *Hintermüller M., Ito K., Kunisch K.* The primal-dual active set strategy as semismooth Newton method // SIAM J. Optim. – 2002. – 13, No. 3. – P. 865–888.
24. *Kikuchi N., Oden J. T.* Contact problem in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods. – Philadelphia: SIAM, 1988. – xiii+495 p.
25. *Koko J.* Uzawa block relaxation domain decomposition method for a two-body frictionless contact problem // Appl. Math. Lett. – 2009. – 22, No. 10. – P. 1534–1538. – https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.03.021.
26. *Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A.* Domain decomposition methods for problems of unilateral contact between elastic bodies with nonlinear Winkler covers // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. – 2014. – 98. – P. 739–748.
27. *Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A.* Penalty Robin–Robin domain decomposition schemes for contact problems of nonlinear elasticity // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. – 2013. – 91. – P. 647–654.
28. *Shakhno S. M.* On an iterative algorithm with superquadratic convergence for solving nonlinear operator equations // J. Comput. Appl. Math. – 2009. – 231, No. 1. – P. 222–235. – https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.02.010.
29. *Ulbrich M.* Semismooth Newton methods for operator equations in function spaces // SIAM J. Optim. – 2002. – 13, No. 3. – P. 805–842.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВИНКЛЕРОВСКИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ

Рассмотрена задача о контактом взаимодействии нескольких упругих тел при наличии нелинейных винклеровских поверхностных слоев. Для решения нелинейного вариационного уравнения с недифференцируемым оператором, которое соответствует этой контактной задаче, предложены неявные двухточечные комбинированные дифференциально-разностные параллельные итерационные алгоритмы декомпозиции области типа Робина. Выполнена программная реализация этих алгоритмов для случая плоских контактных задач на основе конечноэлементных аппроксимаций. Проведено сравнение численной эффективности двухточечных и одноточечных итерационных методов декомпозиции области для задачи о контакте через нелинейный винклеровский слой двух упругих тел с выемкой.

***Ключевые слова**: контактные задачи, вариационные уравнения, дифференциально-разностные итерационные методы, полугладкий метод Ньютона, методы декомпозиции области, метод конечных елементов.*

DIFFERENTIAL-DIFFERENCE ITERATIVE DOMAIN DECOMPOSITION METHODS FOR PROBLEM OF CONTACT BETWEEN ELASTIC BODIES WITH NONLINEAR WINKLER SURFACE LAYERS

A problem of contact interaction between several elastic bodies with nonlinear Winkler surface layers is considered. In order to solve a nonlinear variational equation with nondifferentiable operator, which corresponds to the contact problem, the implicit two-point combined differential-difference parallel iterative domain decomposition algorithms of Robin type are proposed. The program implementation of these algorithms with the use of the finite element approximations is developed for the case of the plane contact problems. The numerical efficiency of two-point and one-point iterative domain decomposition methods is compared for the problem of contact between two elastic bodies with a groove through a nonlinear Winkler layer.

Key words: contact problems, variational equations, differential-difference iterative methods, semi-smooth Newton method, domain decomposition methods, finite element method.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів

Одержано
28.02.19