

## ОСЕСИМЕТРИЧНІ РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ І ВІБРОРОЗІГРІВ ПОДАТЛИВОЇ НА ЗСУВ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ СЕНСОРАМИ

*Розглянуто задачу про вимушені осесиметричні коливання і дисипативний розігрів шарнірно опертої в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричним сенсором з урахуванням деформації поперечного зсуву і температурної залежності властивостей матеріалів. Досліджено вплив температурної залежності, деформації поперечного зсуву та умов теплообміну на амплітудно- і температурно-частотні характеристики вимушених коливань оболонки та теплову деградацію системи.*

**Ключові слова:** резонансні коливання, дисипативний розігрів, в'язкопружна циліндрична оболонка, п'єзоактуатор, поперечний зсув

**Вступ.** Конструкційні елементи типу балок, пластин і оболонок із непружних активних і пасивних матеріалів із характерними властивостями шаруватості, анізотропії складників та податливості на зсув широко застосовують у сучасній техніці. Найчастіше вони перебувають у стані вимушених коливань під дією інтенсивних гармонічних навантажень з частотою, що близька до резонансної. При цьому через внутрішні гістерезисні втрати в непружних матеріалах деформування супроводжується дисипативним розігрівом [3, 6, 17, 18]. Такі умови експлуатації можуть призвести до втрати робоздатності конструкційних елементів через високі динамічні напруження, амплітуди прогинів тонкостінних елементів, температуру вібророзігріву тощо. Для контролю їх термомеханічної поведінки застосовують п'єзоелектричні включення, які виконують роль сенсорів або актуаторів [4, 8, 13, 15, 16, 19].

Відомі електротермомеханічні моделі та розв'язки конкретних задач про вимушені коливання і дисипативний розігрів тонкостінних шаруватих балок, пластин і оболонок із непружних пасивних (без п'єзоєфекта) і п'єзоактивних матеріалів та описано їх контроль за допомогою п'єзоелектричних складників [8–13, 17, 20, 21]. Результати цих досліджень узагальнено в працях [4, 5, 17, 18]. Зокрема, в межах класичної теорії оболонок Кірхгофа–Лява розглянуто [7, 9, 10–12] задачу про вимушені коливання і вібророзігрів в'язкопружних циліндричних оболонок та їх контроль за допомогою п'єзоелектричних актуаторів і сенсорів.

У цій статті в межах уточненої теорії оболонок С. П. Тимошенка числово розв'язано задачу про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно закріпленої циліндричної оболонки з п'єзоелектричним сенсором. Досліджено вплив температурної залежності властивостей матеріалів і враховано вплив деформації поперечного зсуву на електротермомеханічну поведінку оболонки за вимушених коливань.

**1. Формулювання задачі. Основні рівняння.** Розглянемо тришарову циліндричну оболонку довжиною  $l$ , віднесену до ортогональної системи координат  $a, q, z$  з координатою  $z=0$  на середині внутрішнього шару радіусом  $R$  і товщиною  $h_0$ . Внутрішній шар виготовлено із пасивного трансверсально-ізотропного матеріалу, а зовнішні товщиною  $h_1$  – із поляризованої по товщині в протилежних напрямках п'єзокераміки. Матеріали шарів вважаємо в'язкопружними, властивості яких залежать від температури. Поляризацію верхнього ( $z \in h_0/2$ ) і нижнього ( $z \in -h_0/2$ ) п'єзошарів

✉ y.zhuk@i.ua

характеризують значення п'єзомодулів  $+d_{31}$  і  $-d_{31}$  відповідно. Поверхні, що контактують з пасивним шаром, покриті суцільними нескінченно тонкими електродами, на яких задано електричний потенціал  $f(\pm h_0/2) = 0$ . Поверхні  $z = \pm(h_0/2 + h_1)$  електродовані на ділянці  $s^\pm = 2\rho R D_a$ , де  $(D_a = a_1 - a_0)$ , та неелектродовані поза нею, де виконуються такі електростатичні граничні умови:

$$\oint_{s^\pm} D_z^\pm dz = 0, \quad (a_0 < a \leq a_1); \quad D_z^\pm = 0, \quad (0 \leq a < a_0, a_1 < a \leq l). \quad (1)$$

Тут  $D_z^\pm$  – нормальна компонента електричної індукції в п'єзоелектричних шарах.

Оболонка навантажена осесиметричним поверхневим тиском  $q_z = q_0^c(a) \cos wt$ , що змінюється за гармонічним законом у часі  $t$  з амплітудою  $q_0^c$  і круговою частотою  $w$ , яка близька до резонансної. В результаті гармонічного деформування на розімкнутих електродах сенсора  $s^\pm$  виникають електричні потенціали  $\pm V_s$ , амплітудні значення яких розраховують або визначають експериментально. Вважаємо, що торці оболонки вільні в тангенціальному і шарнірно закріплені в поперечному напрямках, а на її межових поверхнях виконуються умови конвективного теплообміну зі зовнішнім середовищем температури  $T_c$ .

Під час математичного моделювання задачі також припускаємо, що по всьому пакету шарів виконуються гіпотези С. П. Тимошенка для механічних величин. Вважаємо, що складові  $D_a$  і  $D_q$  вектора електричної індукції в п'єзошарах можна знехтувати, а компоненти вектора електричної напруженості  $E_a$  і  $E_q$  знаходимо із визначальних рівнянь  $D_a = 0$ ,  $D_q = 0$ . При цьому із рівнянь електростатики випливає, що нормальна компонента  $D_z = \text{const}$  у п'єзошарах не залежить від товщинної координати [3]. В'язкопружні властивості матеріалів описуємо в межах концепції комплексних модулів [3, 6], компоненти яких залежать від температури. Температуру дисипативного розігріву оболонки вважаємо постійною по товщині пакета шарів.

Використовуючи методологію [3, 7] та прийняті припущення, задачу про вимушені коливання і вібророзігрів розглядуваної оболонки відносно шуканих комплексних величин зводимо до розв'язання:

рівнянь гармонічних коливань (множник  $e^{iwt}$  опускаємо)

$$\begin{aligned} \frac{N_a}{a} + r \cdot w^2 u = 0; \quad \frac{Q_a}{a} - \frac{N_q}{R} + r \cdot w^2 w + q_z = 0; \\ \frac{M_a}{a} - Q_a + r \cdot w^2 y_a = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

визначальних співвідношень для зусиль і моментів

$$\begin{aligned} N_a = C_{11} e_a + C_{12} e_q; \quad N_q = C_{12} e_a + C_{11} e_q; \quad Q_a = k_s C_{44} e_{az}; \\ M_a = D_{11} \alpha_a + M_E; \quad M_q = D_{12} \alpha_a + M_E; \end{aligned} \quad (3)$$

залежностей між амплітудними значеннями деформацій і переміщень

$$e_a = \frac{du}{da}; \quad e_q = \frac{w}{R}; \quad \alpha_a = \frac{dy_a}{da}; \quad J_a = -\frac{dw}{da}; \quad e_{az} = y_a - J_a; \quad (4)$$

виразів для електричної індукції в п'єзошарах

$${}^m D_z = -b_{33} \frac{V_a}{h_1} \pm b_{31} (\mathbf{e} \mathbf{m} \bar{h}_1 \mathbf{e}_a); \quad z \in -\frac{h_0}{2}, \quad z \in \frac{h_0}{2}; \quad (5)$$

усередненого за період коливань і по товщині оболонки рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial a^2} - \frac{2a_s}{lH} (T - T_c) + \frac{w}{2lH} \langle W \rangle \quad (6)$$

з дисипативною функцією

$$\langle W \rangle = N_a \mathbf{e} \mathbf{e}_a - N_q \mathbf{e} \mathbf{e}_q + N_q \mathbf{e} \mathbf{e}_q - N_q \mathbf{e} \mathbf{e}_q + M_a \mathbf{e} \mathbf{e}_a - M_a \mathbf{e} \mathbf{e}_a + O_a \mathbf{e} \mathbf{e}_{az} - O_a \mathbf{e} \mathbf{e}_{az}. \quad (7)$$

Механічні граничні умови такі:

$$N_a = 0, \quad w = 0, \quad M_a = 0; \quad \mathbf{a} = 0, \mathbf{I}. \quad (8)$$

Граничні та початкові умови для рівняння теплопровідності мають вигляд

$$l \frac{\partial T}{\partial a} = \pm a_{0,1} (T - T_c), \quad \mathbf{a} = 0, \mathbf{I}; \quad T = T_0, \quad t = 0. \quad (9)$$

Обумовлену гармонічним деформуванням оболонки амплітуду електричних потенціалів на розімкнутих електродах сенсора на основі розв'язку задачі (2)–(9) і першої граничної умови (1) обчислюємо за формулою

$$\frac{V_s}{h_1} = \frac{a_1}{a_0} \frac{\int b_{31} (\mathbf{e} + \bar{h} \mathbf{e}_a) da}{\int b_{33} da}. \quad (10)$$

У співвідношеннях (2)–(10) введено такі позначення:

$$C_{1n} = c_{1n} h_0 + (c_{1n}^E + g_{33}) h_1; \quad C_{44} = G_{az} h_0 + 2c_{44}^E h_1;$$

$$D_{1n} = \frac{c_{1n} h_0^3 + 2(c_{1n}^E + g_{33}) \bar{h}_{13}}{12};$$

$$c_{11} = \frac{E}{1 - n^2}; \quad c_{12} = n c_{11}; \quad c_{11}^E = \frac{1}{s_{11}^E (1 - n_E^2)}; \quad c_{12}^E = n_E c_{11}^E; \quad n_E = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E};$$

$$c_{44}^E = \frac{1}{s_{44}^E - d_{15}^2 / e_{11}^T}; \quad b_{31} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - n_E)}; \quad b_{33} = e_{33}^T (1 - k_p^2);$$

$$k_p^2 = \frac{2d_{31}^2}{e_{33}^T s_{11}^E (1 - n_E)}; \quad g_{33} = \frac{b_{31}^2}{b_{33}}; \quad r_{..} = 2r_1 h_1 + r_0 h_0;$$

$$r_{..} = \frac{2r_1 \bar{h}_{13} + r_{..} h_0^3}{12}; \quad \bar{h}_{13} = 4h_1^3 + 6h_1^2 h_0 + 3h_1 h_0^2; \quad \bar{h}_1 = \frac{h_0 + h_1}{2};$$

$$H = 2h_1 + h_0; \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_a + \mathbf{e}_q. \quad (11)$$

Тут  $s_{kk}^E = s_{kk}^E (1 - id_{kk}^s)$ ,  $d_{ik} = d_{ik}^E (1 - id_{ik}^d)$ ,  $e_{kk}^T = e_{kk}^E (1 - id_{kk}^e)$  – залежні від температури комплексні податливості, п'єзомодулі та діелектричні проникності п'єзокераміки;  $E = E^E + iE^E$ ,  $G_{az} = G_{az}^E + iG_{az}^E$ ,  $n = \text{const}$  – модулі Юнга і поперечного зсуву та коефіцієнт Пуассона пасивного матеріалу;  $k_s$  – коефіцієнт поперечного зсуву;  $w = w^E + iw^E$ ,  $u = u^E + iu^E$ ,  $y_a = y_a^E + iy_a^E$  – амплітуди прогинів, поздовжніх переміщень і кута повороту нормального елемента;  $N_a$ ,  $N_q$ ,  $O_a$  і  $M_a$ ,  $M_q$  – амплітуди зусиль і згинальних моментів;  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$  – питомі густини пасивного і п'єзоактивного матеріалів;  $l$ ,  $a$  –

усереднені коефіцієнти тепло- і температуропровідності;  $a_s = (a_+ + a_-)/2$ ;  $a_{\pm}$ ,  $a_{0,1}$  – коефіцієнти теплообміну на відповідних поверхнях і торцях оболонки;  $T_0$  – початкова температура оболонки.

**2. Методика побудови розв'язку задачі.** Задача електротермомеханіки (2)–(9) через залежність властивостей матеріалів від температури є взаємозв'язана і нелінійна. Для її розв'язання застосовують покроковий за часом метод [3]. При цьому рівняння (2)–(4) записують відносно шуканих величин  $N_a$ ,  $Q_a$ ,  $M_a$ ,  $u$ ,  $w$ ,  $y_a$  у вигляді звичайних диференціальних рівнянь нормальної форми:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_a}{\partial a} &= -r \cdot w^2 u; \\ \frac{\partial M_a}{\partial a} &= Q_x - r \cdot w^2 y_a; \\ \frac{\partial Q_a}{\partial a} &= \frac{n_C}{R} N_a + \frac{c_{11}}{R^2} w - q_z - r \cdot w^2 w; \\ \frac{du}{da} &= J_C N_a - \frac{n_C}{R} w; \\ \frac{\partial y_a}{\partial a} &= J_D M_a; \\ \frac{\partial w}{\partial a} &= -y_a + J_{SD} Q_a; \end{aligned} \quad (12)$$

де  $J_C = 1 / C_{11}$ ,  $J_D = 1 / D_{11}$ ,  $n_C = C_{12} / C_{11}$ ,  $c_{11} = C(1 - n^2)$ ,  $J_{SD} = 1 / (k_s C_{44})$ .

Систему рівнянь (12) з граничними умовами (8) розділяємо на дійсну і уявну частини і на кожному кроці за часом інтегруємо її, використовуючи типову програму розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь. На першому кроці розв'язуємо лінійну задачу за ізотермічних властивостей матеріалів. Далі обчислюємо дисипативну функцію (7) і розв'язуємо задачу теплопровідності (6), (9) методом кінцевих різниць зі застосуванням явної схеми. Потім з урахуванням розподілу температури розраховуємо жорсткісні характеристики (11) і процес повторюємо на наступному кроці за часом. Під час реалізації такої методології використовуємо безрозмірні просторову  $x = a / l$  і часову  $t = at / l^2$  координати та параметри  $g_s = a_{\pm,0,1} l / l$  при  $n_E = \text{const}$ .

**3. Результати числових розрахунків та їх аналіз.** Розрахунки виконували в околі першої частоти найбільш енергоємної згинальної моди коливань оболонки, внутрішній шар якої виготовлено із пасивного полімеру [10], а зовнішні п'зошари сенсора – із в'язкопружної п'езокераміки ЦТСтБС-2 [1]. Температурні залежності їх експериментально отриманих в'язкопружних характеристик апроксимували такими виразами:

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{C}} &= (1672 - 118.6 T) \times 10^6 \text{ Па}; E_{\mathcal{C}} = (15.01 - 1.205 T) \times 10^6 \text{ Па}; G_{az} = 0.04 E; n = 0.36; \\ s_{\mathcal{C}}^s &= 12.5(1 - 0.3077 \times 10^{-3} \bar{T}) \times 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; s_{\mathcal{C}}^d = 39.7(1 + 0.5458 \times 10^{-3} \bar{T}) \times 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; \\ d_{11}^s &= 0.16(1 + 0.6155 \times 10^{-3} \bar{T} + 0.4158 \times 10^{-4} \bar{T}^2) \times 10^{-2}; \bar{\mathcal{P}} = T - T_0; n_E = 0.37; \\ d_{44}^s &= 0.14(1 + 8.33 \times 10^{-3} \bar{T}) \times 10^{-2}; d_{\mathcal{C}}^s = -1.6(1 + 0.219 \times 10^{-2} \bar{T}) \times 10^{-10} \text{ Кл/м}; \\ d_{31}^d &= 0.4(1 + 1.198 \times 10^{-2} \bar{\mathcal{P}} + 1.823 \times 10^{-4} \bar{T}^2) \times 10^{-2}; l = 0.45 \text{ Вт/м}^{\circ}\text{C}; \end{aligned}$$

$$d_{15}^{\mathcal{C}} = 4.5(1 + 0.9722 \times 10^{-3} \bar{T}) \times 10^{-10} \text{ Кл/м}; \quad d_{15}^d = 0.35(1 + 0.3571 \times 10^{-2} \bar{T}) \times 10^{-2};$$

$$e_{11}^{\mathcal{C}} = 18.5e_0(1 + 0.4505 \times 10^{-2} \bar{T}) \times 10^2; \quad d_{11}^e = 0.5(1 + 0.015 \bar{T}) \times 10^{-2};$$

$$e_{33}^{\mathcal{C}} = 21e_0(1 + 0.111 \times 10^{-3} \bar{T} + 0.8426 \times 10^{-4} \bar{T}^2) \times 10^2; \quad e_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$d_{33}^e = 0.35(1 + 0.0119 \bar{T} + 0.119 \times 10^{-3} \bar{T}^2) \times 10^{-2}; \quad r_0 = 929 \text{ кг/м}^3; \quad r_1 = 7520 \text{ кг/м}^3.$$

Геометричні параметри оболонки такі:  $l = 0.2$  м,  $h_0 = 0.04$  м,  $h_1 = 0.1 \times 10^{-4}$  м,  $R = 0.2$  м. Коефіцієнт поперечного зсуву  $k_s = 5/6$  [2].

П'єзоактивні ділянки сенсора вибирали так, щоб його середина збігалася з координатою максимальних прогинів оболонки.

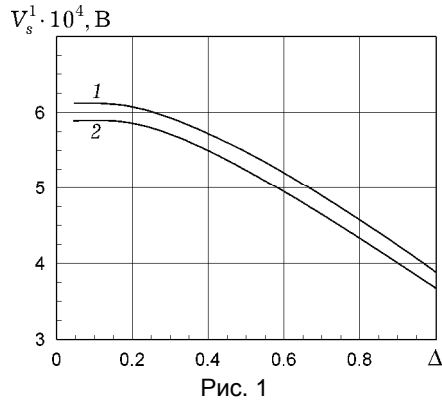


Рис. 1

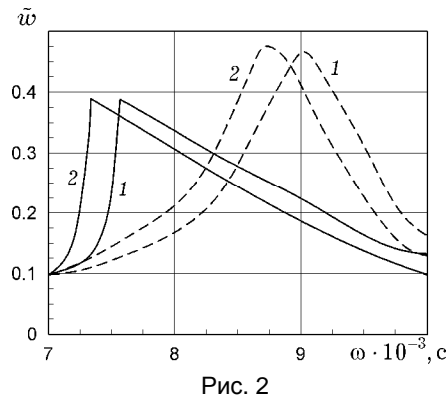


Рис. 2

Залежності амплітуди електричного потенціалу  $V_s^1$ , обчисленого за формулою (10) за ізотермічних властивостей матеріалів ( $T = T_0$ ) оболонки з постійною амплітудою навантаження  $q_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = q_0 = 1$  Па, від безрозмірного параметра ширини еталонного сенсора  $D = D_a/l$  зображені на рис. 1 (криві 1, 2). Крива 1 розрахована на резонансній частоті  $\omega_p = 9000 \text{ с}^{-1}$  у класичному формулюванні задачі, а крива 2 – на частоті  $8800 \text{ с}^{-1}$  з урахуванням деформації поперечного зсуву. Тут і далі у розрахунках прийняли, що центр сенсора збігається з координатою  $x = 0,5$  максимальних прогинів оболонки. Отже, якщо враховувати деформацію зсуву, показник  $V_s^1$  зменшується для всіх розмірів сенсора, а мінімальне його значення досягається за повного покриття оболонки п'єзошарами ( $D = 1$ ). Нижче числові результати наведені для сенсора шириною  $D = 1$ .

На рис. 2–4 подано частотні залежності максимальних значень амплітуд прогину  $\tilde{w} = |w(0,5l)|/h_0 \times 10^3$  м електричного показника сенсора  $V_s$  і усталеної температури  $T_m$  дисипативного розігріву за вимушених коливань оболонки з амплітудою навантаження  $q_0 = 0.4 \times 10^4$  Па і параметром теплообміну  $g_s = 0.5$ . Криві 1 розраховані для класичного формулювання задачі, а криві 2 – з урахуванням деформації поперечного зсуву та інерції повороту. При цьому штрихові лінії обчислені за ізотермічних властивостей матеріалів, а суцільні – з урахуванням їх температурної залежності. Виявили, що врахування деформації поперечного зсуву призводить до зміщення частотних характеристик у бік менших частот і супроводжується деяким збільшенням амплітуди та зменшенням електричного показника сенсора і температури вібророзігріву на уточненій частоті. Врахування тем-

пературної залежності властивостей матеріалів призводить до відомого ефекту трансформації частотних характеристик у характеристики «м'якого» типу [7, 9] як для класичного, так і уточненого формулювань задачі.

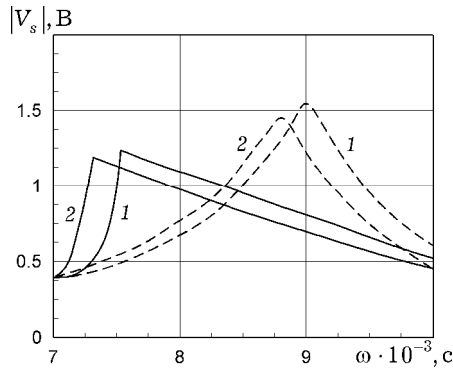


Рис. 3

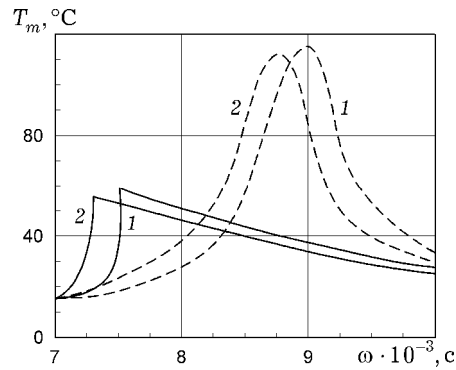


Рис. 4

Зі збільшенням амплітуди гармонічного навантаження та за відповідних умов теплообміну з навколишнім середовищем температура вібророзігріву тонкостінних шаруватих елементів із в'язкопружних пасивних і п'єзоактивних матеріалів може досягати критичного значення  $T_k$ , т. зв. точки деградації, коли настає теплове руйнування систем через розплавлення пасивного складника або деполаризації п'єзокераміки (точка Кюрі). Тоді необхідно визначити амплітуду механічного навантаження  $q_k$ , що відповідає критичному значенню  $T_k$  стаціонарної температури дисипативного розігріву, а також критичний час  $t_k$  роботоздатності системи під час дії навантаження, що перевищує критичне. Для визначеності вважаємо, що розглядуваний об'єкт деградує з досягненням критичної температури вібророзігріву  $T_m = T_k = 120^\circ\text{C}$  хоча б у одній точці.

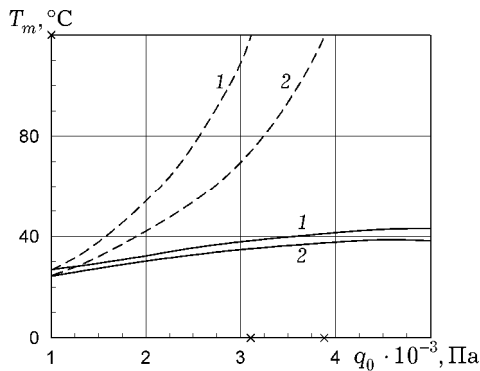


Рис. 5

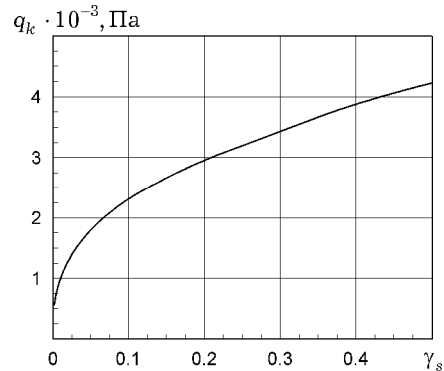


Рис. 6

На рис. 5 (криві 1, 2) побудовано залежності максимальної усталеної температури дисипативного розігріву  $T_m$  у середньому перерізі оболонки від амплітуди механічного навантаження  $q_0$ , розраховані з частотою уточненого резонансу  $\omega = 8800 \text{ с}^{-1}$  і коефіцієнтами теплообміну  $g_s = 0.25; 0.5$  за ізотермічних (штрихові лінії) і температурнозалежних (суцільні) властивостей матеріалів. Хрестиками на осях ординат і абсцис позначено критичні значення величин  $T_k$  і  $q_k$ . За ізотермічних характеристик матеріалів залежність критичної амплітуди навантаження  $q_k$  від коефіцієнта теплообміну  $g_s$  ілюструє рис. 6. Як бачимо, за гармонічного навантаження оболонки критичні

значення  $q_k$  немонотонно зростають зі збільшенням коефіцієнта  $g_s$ , а за врахування температурної залежності властивостей матеріалів значення  $q_k$  суттєво збільшуються.

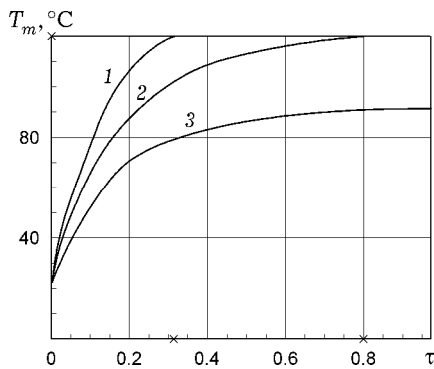


Рис. 7

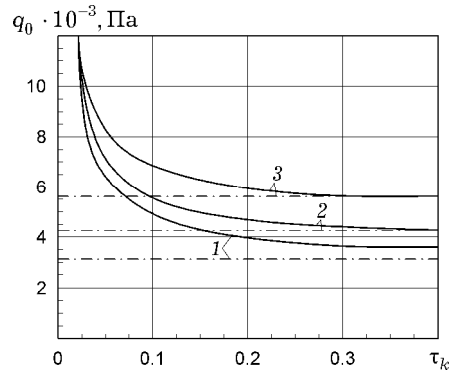


Рис. 8

Рис. 7 (криві 1–3) відтворює еволюцію максимальної температури вібророзігріву оболонки за часом  $t = at/l^2$  для ізотермічних властивостей матеріалів на частоті  $w = 8800 \text{ с}^{-1}$  для амплітуд механічного навантаження  $q_0 = (0.35; 0.415; 0.45) \cdot 10^4 \text{ Па}$  з параметром теплообміну  $g_s = 0.5$ . Тут хрестиками на осі ординат позначено значення температури деградації  $T_k$ , а на осі абсцис – критичний час  $t_k$ , що характеризує роботоздатність системи при  $q_0 \approx q_k = 0.415 \cdot 10^4 \text{ Па}$ . За навантажень  $q_0 < q_k$  (крива 1) система не деградує. На рис. 8 (криві 1–3) подано залежності амплітуд навантаження, що перевищують критичні значення ( $q_0 \approx q_k$ ), від критичного параметра часу  $t_k$ . Криві розраховані при коливаннях оболонки з частотою  $w = 8800 \text{ с}^{-1}$  для коефіцієнтів теплообміну  $g_s = 0.25, 0.5$  і  $1.0$  відповідно. Критичні значення  $q_k$  описують штрих-пунктирні лінії. Наведені криві, які є аналогом кривих Велера з теорії циклічного руйнування матеріалів, характеризують довговічність системи під час її теплового руйнування, що суттєво залежить від умов теплообміну з довкіллям.

**Висновки.** Сформульовано та числово розв'язано задачу про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно опертої в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсорами під час осесиметричного моногармонічного навантаження та з урахуванням деформації поперечного зсуву і залежності властивостей пасивного і п'єзоактивного матеріалів від температури вібророзігріву. Досліджено вплив деформації зсуву, температурної залежності властивостей матеріалів та умов теплообміну на амплітудно- і температурно-частотні характеристики, електричні показники сенсора, критичні значення амплітуд механічного навантаження, за яких відбувається теплова деградація системи.

1. Болкисев А. М., Карлаш В. Л., Шульга Н. А. О зависимости свойств пьезо-керамических материалов от температуры // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 7. – С. 70–74.

Те саме: *Bolkisev A. M., Karlash V. L., Shul'ga, N. A. Temperature dependence of the properties of piezoelectric ceramics // Sov. Appl. Mech. – 1984. – 20, No. 7. – P. 650–653. – <https://doi.org/10.1007/BF00891725>*

2. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка. – 1981. – 516 с.

3. Карнаушов В. Г., Киричок И. Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек.— Киев: Наук. думка, 1986. — 222 с.
4. Карнаушов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И. Термомеханика неупругих тонкостенных элементов конструкций с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при гармоническом нагружении (обзор) // Прикл. механика. — 2017. — 53, № 1. — С. 9–74.  
 The same: *Karnaukhov V. G., Kirichok I. F., Kozlov V. I.* Thermomechanics of inelastic thin-walled structural members with piezoelectric sensors and actuators under harmonic loading (review) // *Int. App. Mech.* — 2017. — 53, No. 1. — P. 6–58. — <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0789-3>
5. Карнаушов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В. Вынужденные колебания и диссипативный разогрев гибких вязкоупругих прямоугольных шарнирно опертых пластин с актуаторами при учете деформаций поперечного сдвига // Прикл. механика. — 2018. — 54, № 5. — С. 101–110.  
 The same: *Karnaukhov V. G., Kozlov V. I., Karnaukhova T. V.* Forced vibrations and dissipative heating of hinged flexible viscoelastic rectangular plates with actuators under shear deformation // *Int. Appl. Mech.* — 2018. — 54, No. 1. — P. 85–93. — <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0862-6>
6. Карнаушов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. — Житомир: ЖГТУ, 2005. — 428 с.
7. Киричок И. Ф. Осесимметричные резонансные колебания и разогрев оболочек вращения и их контроль пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами // Прикл. механика. — 2010. — 46, № 8. — С. 42–57.  
 The same: *Kirichok I. F.* Control of axisymmetric resonant vibrations and self-heating of shells of revolution with piezoelectric sensors and actuators // *Int. Appl. Mech.* — 2011. — 46, No. 8. — P. 890–901. — <https://doi.org/10.1007/s10778-011-0379-8>
8. Киричок И. Ф. Резонансные осесимметричные колебания и виброразогрев вязкоупругой цилиндрической оболочки с пьезослоями при электромеханическом возбуждении // Прикл. механика. — 2015. — 51, № 5. — С. 99–106.  
 The same: *Kirichok I. F.* Resonant axisymmetric vibrations and vibrational heating of a viscoelastic cylindrical shell with piezolayers subject to electromechanical excitation // *Int. Appl. Mech.* — 2015. — 51, No. 5. — P. 567–573. — <https://doi.org/10.1007/s10778-015-0712-8>
9. Киричок И. Ф., Жук Я. А. Влияние граничных условий и температуры виброразогрева на резонансные осесимметричные колебания вязкоупругих цилиндрических оболочек с пьезоактуаторами и сенсорами // Теорет. и прикл. механика. — 2013. — Вып. 7. — С. 133–140.
10. Киричок И. Ф., Жук Я. О., Карнаухова Т. В. Резонансні коливання і дисипативний розігрів гнучкої в'язкопружної балки з п'єзоактуаторами при врахуванні деформації зсуву // Мат. методи та фіз.- мех. поля — 2017. — 60, № 2. — С. 66–74.  
 The same: *Kyrychok I. F., Zhuk Ya. O., Karnaukhova T. V.* Resonance vibration and dissipative heating of a flexible viscoelastic beam with piezoactuators in the presence of shear strains // *J. Math. Sci.* — 2019. — 243, No. 1. — P. 73–84. — <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04527-z>
11. Киричок И. Ф., Карнаухова Т. В. Вынужденные осесимметричные колебания и разогрев вязкоупругих цилиндрических оболочек с пьезоактуаторами // Прикл. механика. — 2010. — 46, № 10. — С. 53–61.  
 The same: *Kirichok I. F., Karnaukhova T. V.* Forced axisymmetric vibrations and self-heating of thermoviscoelastic cylindrical shells with piezoelectric actuators // *Int. Appl. Mech.* — 2011. — 46, No. 10. — P. 1132–1138. — <https://doi.org/10.1007/s10778-011-0405-x>
12. Киричок И. Ф., Карнаухова Т. В., Пересунько Н. В. Резонансные осесимметричные колебания и диссипативный разогрев цилиндрических оболочек и их контроль с помощью пьезоэлектрических актуаторов // Теорет. и прикл. механика. — 2010. — Вып. 46. — С. 132–140.
13. Киричок И. Ф., Чернюшок О. А. Вынужденные колебания и виброразогрев гибкой вязкоупругой балки с пьезоэлектрическими сенсором и актуатором с учетом деформации сдвига // Прикл. механика. — 54, № 5. — С. 87–95.  
 The same: *Kirichok I. F., Chernyushok O. A.* Forced vibration and self-heating of a flexible viscoelastic beam with piezoelectric sensor and actuator with account of shear strain // *Int. Appl. Mech.* — 2018. — 54, No. 5. — P. 568–576. — <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0910-2>



14. *Нестеренко Н. П., Червинко О. П., Сенченков И. К.* Моделирование ультразвукового разогрева структурных элементов полимерных волокнистых композитов при нормальном нагружении // Вестник нац. техн. ун-та "ХПИ". – 2002. – № 9. – С. 3–8.
15. *Blanguernon A., Lene F., Bernadou M.* Active control a beam a piezoceramic element // Smart Mater. Struct. – 1999. – 8. – P. 116–124.  
– <https://doi.org/10.1088/0964-1726/8/1/013>
16. *Gabbert U., Tzou H. S.* Smart structures and structronic systems. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001. – 384 p.
17. *Katunin A.* Criticality of the self-heating effect in polymers and polymer matrix composites during fatigue, and their application in non-destructive testing // Polymers. – 2019. – 11, No. 1: 19. – <https://doi.org/10.3390/polym11010019>
18. *Katunin A., Fidali M.* Fatigue and thermal failure of polymeric composites subjected to cyclic loading // Adv. Compos. Lett. – 2012. – 21. – P. 64–69.  
– <https://doi.org/10.1177/096369351202100301>
19. *Tani J., Takaga T., Qiu J.* Intelligent material systems: Application of functional materials // Appl. Mech. Rev. – 1998. – 51, No. 8. – P. 505–521.  
– <https://doi.org/10.1115/1.3099019>
20. *Tzou H. S.* Piezoelectric shells. Distributed sensing and control of continua. – Dordrecht – Boston – London: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 400 p.
21. *Tzou H. S., Bergman L. A.* Dynamics and control of distributed systems. – London: Cambridge Univ. Pres, 1998. – 374 p.

**ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВИБРОРАЗОГРЕВ ПОДАТЛИВОЙ НА СДВИГ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СЕНСОРАМИ**

*Рассмотрена задача о вынужденных осесимметричных колебаниях и диссипативном разогреве шарнирно опертой вязкоупругой цилиндрической оболочки с пьезоэлектрическим сенсором при учете деформации поперечного сдвига и температурной зависимости свойств материалов. Исследовано влияние температурной зависимости, деформации поперечного сдвига и условий теплообмена на амплитудно- и температурно-частотные характеристики вынужденных колебаний оболочки и тепловую деградацию системы.*

**Ключевые слова:** резонансные колебания, диссипативный разогрев, вязкоупругая цилиндрическая оболочка, пьезоактуатор, поперечный сдвиг

**AXISYMMETRIC RESONANT VIBRATION AND DISSIPATIVE HEATING OF THE SHEAR COMPLIANT VISCOELASTIC CYLINDRICAL SHELL WITH PIEZOELECTRIC SENSORS**

*The problem of the forced axisymmetric vibration and dissipative heating of hinged viscoelastic cylindrical shell with piezoelectric sensor is studied with account of shear strain and temperature dependence of the material properties. Influence of the properties' temperature dependence, accounting of the shear strain and the heat transfer boundary conditions on the amplitude- and temperature–frequency characteristics of the shell forced vibration as well as on the thermal degradation of the system is investigated*

**Key words:** resonant vibration, dissipative heating, viscoelastic cylindrical shell, piezoelectric actuator, shear strain

<sup>1</sup>Ин-т механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ,

<sup>2</sup>Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ,

<sup>3</sup>Київ. нац. ун-т харчових технологій, Київ