4. *Романко В. К.* О корректных задачах для некоторых систем уравнений. — В кн.: Теория и методы решения некорректно поставленных задач и их приложения: Тез. докл. Всесоюз. шк.-семинара по теории некоррект. задач. Самарканд, 29 сент. — 6 окт. 1983 г. Новосибирск : ВЦ СО АН СССР, 1983, с. 185.

Московский физико-технический ин-т Получено 26.03.84.

УДК 517.946

А. С. Гупало, Г. П. Лопушанская

РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В ряде работ советских и зарубежных авторов [1, 2, 6, 8, 9, 11—13] доказана разрешимость общих граничных задач для уравнений и систем эллиптического типа в различных функциональных пространствах, а также пространствах обобщенных функций в конечной области. Исследование таких задач проводилось различными методами. В некоторых работах получены формулы решений.

Подход к граничным задачам в обобщенных функциях, использованный в работах [2, 6, 8, 13], дает возможность изучать одновременно как внутренние, так и внешние граничные задачи. В настоящей статье, развивая этот подход, доказывается единственность и строятся решения внутренней и внешней задач Неймана для неоднородной сильно эллиптической системы вариационного типа второго порядка в достаточно широких пространствах обобщенных функций. Классические решения внутренней и внешней задач Неймана для такой системы построены в [3—5].

Пусть

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u \equiv \sum_{k,\,l=1}^{n} A_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = F \tag{1}$$

— сильно эллиптическая система дифференциальных уравнений, являющаяся системой Эйлера для некоторого положительно определенного функционала; $A_{kl} = A_{lk} = A'_{kl}$ (штрих означает транспонирование) — постоянные действительные квадратные матрицы порядка p. Пусть Ω — область в R^n, $n \geqslant 3$, ограниченная замкнутой $n-1$-мерной поверхностью S класса C^∞; $[D(\overline{\Omega})]^p$, $[D(S)]^p$ — пространства бесконечно дифференцируемых вектор-функций в $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ и на S соответственно;

$$[X(\overline{\Omega})]^p = \left\{\varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p : C^*\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(y)\Big|_S = 0\right\},$$

где

$$C\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) + Q(y); \quad C^*\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) + Q'(y);$$

$$C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = -2\sum_{k,\,l=1}^{n} \tilde{A}_{lk}\nu_l(y)\frac{\partial}{\partial x_k}$$

— граничный оператор типа Неймана [3, 5] для системы (1); матрицы $\tilde{A}_{lk} = \tilde{A}'_{kl}$ единственным образом определяются матрицами A_{kl}; $\nu_l(y)$ $(l = \overline{1, n})$ — компоненты единичного вектора $\nu(y)$ внутренней нормали к S в точке y; $Q(y)$ — матрица с бесконечно дифференцируемыми на S элементами.

Через $[D'(\overline{\Omega})]^p$, $[D'(S)]^p$, $[X'(\overline{\Omega})]^p$ обозначаем пространства линейных непрерывных функционалов (обобщенных вектор-функций) над $[D(\overline{\Omega})]^p$,

$[D(S)]^p$, $[X(\overline{\Omega})]^p$ соответственно; через (φ, F) — действие обобщенной вектор-функции $[F \in [D'(\overline{\Omega})]^p \quad (F \in [X'(\overline{\Omega})]^p)$ на основную вектор-функцию $\varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p$ $(\varphi \in [X(\overline{\Omega})]^p)$; $<\varphi, F>$ — действие $F \in [D'(S)]^p$ на $\varphi \in [D(S)]^p$.

Постановка задачи Неймана. Пусть $F \in [X'(\overline{\Omega})]^p$, $B \in [D'(S)]^p$. В области Ω найти решение системы (1), удовлетворяющее граничному условию

$$C\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u = B \text{ на } S. \tag{2}$$

Вектор-функцию $u \in [D'(\overline{\Omega})]^p$ называем решением задачи (1) — (2), если для каждой $\psi \in [X(\overline{\Omega})]^p$ выполнено соотношение

$$\left(A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi, u\right) = (\psi, F) - \frac{1}{2} <\psi, B>. \tag{3}$$

Теорема 1. Если форма

$$\varphi' \overset{(s)}{Q}(y) \varphi \left(\overset{(s)}{Q} = \frac{Q + Q'}{2}\right) \tag{4}$$

положительно определена, то задача Неймана имеет единственное решение для любых $F \in [X'(\overline{\Omega})]$, $B \in [D'(S)]^p$. Если $Q(y) \equiv 0$ на поверхности S, то решение задачи единственно с точностью до произвольного постоянного столбца и для его существования необходимо выполнение условия

$$(E, F) - \frac{1}{2} <E, B> = 0, \tag{5}$$

где E — единичная матрица.

Доказательство. Пусть u_1, u_2 — два решения задачи (1) — (2), $u = u_1 - u_2$, тогда

$$\left(A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi, u\right) = 0 \quad \forall \psi \in [X(\overline{\Omega})]^p. \tag{6}$$

В случае (4) из результатов [3 — 5] следует существование единственной вектор-функции $\psi(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) = \varphi(x), \; x \in \Omega, \tag{7}$$

и граничному условию

$$C^*\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\psi(y)|_S = 0 \tag{8}$$

для каждой $\varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p$. Методами [7] можно показать, что $\psi \in [X(\overline{\Omega})]^p$. Поэтому из (6) получаем $(\varphi, u) = 0$ для каждой $\varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p$, т. е. $u = 0$ в $[D'(\overline{\Omega})]^p$.

В случае $Q(y) = 0$, $y \in S$, согласно [3], решение задачи (7) — (8) существует для вектор-функции $\varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p$, удовлетворяющей условию

$$\int_\Omega E\varphi(x)\,dx = 0, \tag{9}$$

и определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Для таких φ согласно (7), (6) $(\varphi, u) = 0$. Продолжим обобщенную вектор-функцию u, определенную на подпространстве $[D_E(\overline{\Omega})]^p$ вектор-функций $\varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p$, удовлетворяющих условию (9), на все пространство $[D(\overline{\Omega})]^p$, используя представление

$$\varphi(y) = \Phi(y) \int_\Omega E\varphi(x)\,dx + \varphi_0(y) \quad \forall \varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p, \tag{10}$$

где $\Phi(y)$ — произвольно выбранная матрица с бесконечно дифференцируемыми в $\overline{\Omega}$ элементами, для которой $\int_\Omega E\Phi(x)\,dx = E$, $\varphi_0 \in [D_E(\overline{\Omega})]^p$. По доказанному $(\varphi_0, u) = 0$, тогда из (10) получаем $(\varphi, u) = (\varphi, C)$ (C — произвольный постоянный вектор) для каждой $\varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p$, т. е. $u = C$ в пространстве $[D'(\overline{\Omega})]^p$.

Подставляя в (3) вместо ψ матрицу E, получаем (5).

Теорема 2. Если $F=0$, $B \in [D'(S)]^p$, $u(x)$ — решение в области Ω однородной системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее граничному условию

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} \varphi'(x_\varepsilon)\, C\left(x_\varepsilon, \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right) u(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = \langle \varphi, B\rangle \quad \forall\varphi \in [D(S)]^p \tag{11}$$

(S_ε — параллельная к S поверхность; $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x)$, если $x \in S$, $x_\varepsilon \in S_\varepsilon$; $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(x)$), то $u(x)$ является также решением задачи Неймана для однородной системы дифференциальных уравнений в смысле (3), т. е. удовлетворяет условию

$$\left(A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi,\ u\right) = -\frac{1}{2}\langle \psi, B\rangle \quad \forall\psi \in [X(\overline{\Omega})]^p. \tag{12}$$

Доказательство. Будем предполагать выполненным условие (4). Тогда решение $u(x)$ однородной системы дифференциальных уравнений в области Ω, удовлетворяющее условию (11), согласно [2], существует для каждой $B \in [D'(S)]^p$, единственно и имеет вид

$$u(x) = \langle \omega(x, y),\ R\rangle,\quad x \in \Omega, \tag{13}$$

где $\omega(x, y)$ — нормальная фундаментальная матрица оператора $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$; обобщенная вектор-функция R определяется по заданной обобщенной вектор-функции B формулами аналогично [2], при этом

$$\langle \varphi, B\rangle = \left\langle -\varphi(y) + \int_S \left[C\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\omega(x, y)\right]' \varphi(x)\, dS,\ R\right\rangle \quad \forall\varphi \in [D(S)]^p. \tag{14}$$

Равенство (12) с учетом (13) принимает вид

$$\left\langle \int_\Omega \omega(y, x)\, A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)\, dx,\ R\right\rangle = -\frac{1}{2}\langle \psi, B\rangle \quad \forall\psi \in [X(\overline{\Omega})]^p. \tag{15}$$

Из формулы Грина [10] для оператора $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ получаем представление в области Ω вектор-функции $\psi(z) \in [X(\overline{\Omega})]^p$, а переходя в ней к пределу, когда $z \to y \in S$, имеем

$$-\int_\Omega \omega(y, x)\, A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)\, dx = -\frac{1}{2}\psi(y) + \frac{1}{2}\int_S \left[C\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\omega(x, y)\right]' \psi(x)\, dS, \tag{16}$$

Из (16) и (14) получаем (15). В случае $Q(y) \equiv 0$, $y \in S$, доказательство проводится аналогично. Теорема доказана.

В [4] построена матрица Грина $\tilde{G}^{(2)}(x, y)$ задачи Неймана для системы (1) в случае $Q(y) \equiv 0$, $y \in S$, а в [5] — матрица Грина этой задачи при условии (4). Определим обобщенные вектор-функции u_1, u_2 равенствами

$$(\varphi, u_1) = \left(\int_\Omega \tilde{G}^{(2)}(y, x)\, \varphi(x)\, dx,\ F\right) - \left\langle \int_\Omega \tilde{G}^{(2)}(y, x)\, \varphi(x)\, dx,\ B\right\rangle, \tag{17}$$

$$(\varphi, u_2) = \left(\int_\Omega \tilde{G}^{(3)}(y, x)\, \varphi(x)\, dx,\ F\right) - \left\langle \int_\Omega \tilde{G}^{(3)}(y, x)\, \varphi(x)\, dx,\ B\right\rangle \tag{18}$$

для каждой $\varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p$.

Теорема 3. Если $Q(y) \equiv 0$, $y \in S$, то при выполнении условия (5) обобщенная вектор-функция u_1 является решением в смысле (3) задачи (1) — (2), удовлетворяющим дополнительному условию $(E, u_1) = 0$. Вектор-функция u_2 является решением в смысле (3) задачи (1) — (2) при условии (4).

Доказательство. Используя основные свойства матриц Грина и методы [7], можно показать, что для каждой $\varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p$

$$\int_\Omega \widetilde{G}^{(i)}(y, x)\varphi(x)\,dx \in [X(\overline{\Omega})]^p \cap [D(S)]^p, \quad i = 2, 3,$$

так что формулы (17) и (18) определяют обобщенные вектор-функции из $[D'(\overline{\Omega})]^p$. При этом из (5) следует, что $(E, u_1) = 0$.

Из формулы Грина для оператора $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ и формулы (16) получаем для каждой $\psi \in [X(\overline{\Omega})]^p$

$$\psi(y) + \frac{\alpha_i E}{\operatorname{mes}\Omega}\int_\Omega \psi(x)\,dx = \int_\Omega \widetilde{G}^{(i)}(y, x)\,A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)\,dx, \quad y \in \overline{\Omega},$$

$i = 2, 3$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$. Отсюда следует справедливость равенства (3) для $i = 2$ и $i = 3$.

Пусть $\Omega_e = R^n \setminus \overline{\Omega}$; $[D(\overline{\Omega}_e)]^p$ — пространство бесконечно дифференцируемых вектор-функций φ в области $\overline{\Omega}_e$, стремящихся к нулю на бесконечности так, что $\int_{\Omega_e} \omega(x, y)\varphi(y)\,dy < \infty$, $x \in R^n$; $[X(\overline{\Omega}_e)]^p$ — пространство бесконечно дифференцируемых в $\overline{\Omega}_e$ вектор-функций φ, удовлетворяющих условию $C^{(\nu)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0$, $x \in S$, и имеющих на бесконечности порядок нормальной фундаментальной матрицы для оператора $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$; $[D'(\overline{\Omega}_e)]^p$, $[X'(\overline{\Omega}_e)]^p$ — пространства линейных непрерывных функционалов над $[D(\overline{\Omega}_e)]^p$ и $[X(\overline{\Omega}_e)]^p$ соответственно.

Постановка внешней задачи Неймана. Пусть $F \in [X'(\overline{\Omega}_e)]^p$, $B \in [D'(S)]^p$. Найти вектор-функцию $u \in [D'(\overline{\Omega}_e)]^p$, удовлетворяющую для каждой $\psi \in [X(\overline{\Omega})]^p$ условию

$$\left(A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi, u\right) = (\psi, F) + \frac{1}{2}\langle\psi, B\rangle. \tag{19}$$

Аналогично предыдущим доказываются

Теорема 4. Решение внешней задачи Неймана единственно.

Теорема 5. Если $F = 0$, $u(x)$ — решение в Ω_e однородной системы дифференциальных уравнений, имеющее на бесконечности порядок нормальной фундаментальной матрицы и удовлетворяющее граничному условию

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\int_{S_{-\varepsilon}} \varphi'(x_{-\varepsilon})\,C^{(\nu)}\left(x_{-\varepsilon}, \frac{\partial}{\partial x_{-\varepsilon}}\right)u(x_{-\varepsilon})\,dS_{-\varepsilon} = \langle\varphi, B\rangle \quad \forall\varphi \in [D(S)]^p$$

($S_{-\varepsilon}$ — параллельная к S поверхность в Ω_e; $x_{-\varepsilon} = x - \varepsilon\nu(x)$, если $x \in S$, $x_{-\varepsilon} \in S_{-\varepsilon}$; $\varphi(x_{-\varepsilon}) = \varphi(x)$), то $u(x)$ является также решением внешней задачи Неймана в смысле (19).

Теорема 6. Обобщенная вектор-функция u, определенная равенством

$$(\varphi, u) = \left(\int_{\Omega_e} \widetilde{G}_e(y, x)\varphi(x)\,dx,\ F\right) + \left\langle \int_{\Omega_e} G_e(y, x)\varphi(x)\,dx,\ B\right\rangle$$

для каждой $\varphi \in [D(\overline{\Omega}_e)]^p$, где $\widetilde{G}_e(y, x)$ — матрица Грина внешней задачи Неймана для системы (1), является решением внешней задачи Неймана в смысле (19).

Аналогичные результаты имеют место для сильно эллиптической системы дифференциальных уравнений второго порядка вариационного типа с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами при условии существования для нее нормальной фундаментальной матрицы во всем пространстве R^n.

1. *Березанский Ю. М., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических задач.— Укр. мат. журн., 1967, **19**, № 5, с. 3—32.
2. *Бойко Г. П., Волошина М. С., Гупало А. С.* Обобщенная задача Неймана для одного класса эллиптических систем второго порядка. — Мат. физика, 1977, вып. 21, с. 65—70.
3. *Волошина М. С.* Про деякі граничні задачі для сильно еліптичних систем диференціальних рівнянь другого порядку. — Доп. АН УРСР, 1959, № 4, с. 364—368.
4. *Волошина М. С.* Розв'язки задач Діріхле і Неймана для деяких систем диференціальних рівнянь за допомогою матриць Гріна. — Вісн. Львів. політехн. ін-ту, 1973, № 75, с. 69—75.
5. *Волошина М. С.* Розв'язок третьої граничної задачі для деяких систем диференціальних рівнянь за допомогою матриці Гріна. — Там же, 1974, № 87, с. 113—115.
6. *Гупало Г. С.* Про узагальнену задачу Неймана. — Доп. АН УРСР. Сер. А, 1967, № 3, с. 199—201.
7. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики.— М.: Гостехиздат, 1953.— 416 с.
8. *Данко С. П., Рогожин В. С.* О трех подходах к решению обобщенных задач Дирихле и Неймана для эллиптических уравнений второго порядка. — Дифференц. уравнения, 1971, **7**, № 3, с. 501—509.
9. *Коваленко И. П., Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Функция Грина общих неоднородных граничных задач для систем, эллиптических по Дуглису — Ниренбергу.— Укр. мат. журн., 1978, **30**, № 5, с. 664—668.
10. *Лаврук Б. Р.* Про одну граничну задачу для системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку еліптичного типу.— Доп. АН УРСР, 1956, № 3, с. 214—219.
11. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М. : Мир, 1971.—371 с.
12. *Ройтберг Я. А.* Эллиптические граничные задачи в обобщенных функциях для систем уравнений.— В кн.: Тр. Всесоюз. конф. по уравнениям с частными производными, посвящ. 75-летию со дня рождения акад. И. Г. Петровского, Москва, 27—31 янв. 1976. М. : Наука, 1978, с. 426—427.
13. *Szmydt Z.* Sur un probleme de Neumann generalise.— Ann. Polon. math., 1964, **15**, N 3, p. 309—325.

Львовский государственный ун-т им. Ив. Франко Получено 12.07.83

УДК 517.97

Я. Е. Баранецкий

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследованию асимптотики спектра операторно-дифференциальных уравнений с регулярными по переменной t условиями посвящены многие работы (см., например, библиографию в [9]). Спектральные свойства многоточечной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений изучались в работах [1, 5, 6]. В [2, 3] исследуется разрешимость аналогов многоточечной задачи для уравнений в частных производных.

Настоящая статья посвящена изучению асимптотики спектра оператора Валле—Пуссена.

Пусть: 1°. H — сепарабельное гильбертово пространство. 2°. A — линейный, неограниченный, положительный, самосопряженный оператор в H. 3°. $\exists A^{-1} \in \sigma_\infty(H)$.

$$H_1 = L_2((0, 1), H), (u(t), v(t))_{H_1} = \int_0^1 (u(t), v(t))_H dt,$$

$$H(A^\theta) = \{u \in H: A^\theta u \in H\}, \quad \| u \|_{H(A^\theta)} = \| A^\theta u \|_H, \quad \theta \geqslant 0,$$

$$H_2 = \{u(t) \in H_1 : A^{2m} u(t) \in H_1, \ u^{(2m)}(t) \in H_1\},$$

$$\| u(t) \|^2_{H_2} = \| A^{2m} u(t) \|^2_{H_1} + \| u^{(2m)}(t) \|^2_{H_1}.$$

По теореме о следах [8, теорема 1.3.1] при $j = \overline{1, 2m-1}$ $u^{(j)}(t)$ — непрерывные функции $[0, 1] \to H(A^{2m-j-1/2})$. Следовательно, на H_2 определены операторы d_{ij}: