1. *Березанский Ю. М., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических задач.— Укр. мат. журн., 1967, **19**, № 5, с. 3—32.
2. *Бойко Г. П., Волошина М. С., Гупало А. С.* Обобщенная задача Неймана для одного класса эллиптических систем второго порядка. — Мат. физика, 1977, вып. 21, с. 65—70.
3. *Волошина М. С.* Про деякі граничні задачі для сильно еліптичних систем диференціальних рівнянь другого порядку. — Доп. АН УРСР, 1959, № 4, с. 364—368.
4. *Волошина М. С.* Розв'язки задач Діріхле і Неймана для деяких систем диференціальних рівнянь за допомогою матриць Гріна. — Вісн. Львів. політехн. ін-ту, 1973, № 75, с. 69—75.
5. *Волошина М. С.* Розв'язок третьої граничної задачі для деяких систем диференціальних рівнянь за допомогою матриці Гріна. — Там же, 1974, № 87, с. 113—115.
6. *Гупало Г. С.* Про узагальнену задачу Неймана. — Доп. АН УРСР. Сер. А, 1967, № 3, с. 199—201.
7. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики.— М.: Гостехиздат, 1953.— 416 с.
8. *Данко С. П., Рогожин В. С.* О трех подходах к решению обобщенных задач Дирихле и Неймана для эллиптических уравнений второго порядка. — Дифференц. уравнения, 1971, **7**, № 3, с. 501—509.
9. *Коваленко И. П., Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Функция Грина общих неоднородных граничных задач для систем, эллиптических по Дуглису — Ниренбергу.— Укр. мат. журн., 1978, **30**, № 5, с. 664—668.
10. *Лаврук Б. Р.* Про одну граничну задачу для системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку еліптичного типу.— Доп. АН УРСР, 1956, № 3, с. 214—219.
11. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М. : Мир, 1971.—371 с.
12. *Ройтберг Я. А.* Эллиптические граничные задачи в обобщенных функциях для систем уравнений.— В кн.: Тр. Всесоюз. конф. по уравнениям с частными производными, посвящ. 75-летию со дня рождения акад. И. Г. Петровского, Москва, 27—31 янв. 1976. М. : Наука, 1978, с. 426—427.
13. *Szmydt Z.* Sur un probleme de Neumann generalise.— Ann. Polon. math., 1964, **15**, N 3, p. 309—325.

Львовский государственный ун-т им. Ив. Франко — Получено 12.07.83

УДК 517.97

Я. Е. Баранецкий

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследованию асимптотики спектра операторно-дифференциальных уравнений с регулярными по переменной t условиями посвящены многие работы (см., например, библиографию в [9]). Спектральные свойства многоточечной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений изучались в работах [1, 5, 6]. В [2, 3] исследуется разрешимость аналогов многоточечной задачи для уравнений в частных производных.

Настоящая статья посвящена изучению асимптотики спектра оператора Валле—Пуссена.

Пусть: 1°. H — сепарабельное гильбертово пространство. 2°. A — линейный, неограниченный, положительный, самосопряженный оператор в H. 3°. $\exists A^{-1} \in \sigma_\infty(H)$.

$$H_1 = L_2((0, 1), H), (u(t), v(t))_{H_1} = \int_0^1 (u(t), v(t))_H dt,$$

$$H(A^\theta) = \{u \in H: A^\theta u \in H\}, \quad \| u \|_{H(A^\theta)} = \| A^\theta u \|_H, \ \theta \geqslant 0,$$

$$H_2 = \{u(t) \in H_1 : A^{2m} u(t) \in H_1, \ u^{(2m)}(t) \in H_1\},$$

$$\| u(t) \|^2_{H_2} = \| A^{2m} u(t) \|^2_{H_1} + \| u^{(2m)}(t) \|^2_{H_1}.$$

По теореме о следах [8, теорема 1.3.1] при $j = \overline{1, 2m-1}$ $u^{(j)}(t)$ — непрерывные функции $[0, 1] \to H(A^{2m-j-1/2})$. Следовательно, на H_2 определены операторы d_{ij}:

$$d_{lj}u(t) \equiv u^{(l-1)}(t_j),\ l=\overline{1,\ \nu_j},\ j=\overline{1,\ p}, \tag{1}$$
$$\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_p=2m,\ 0=t_1<t_2<\ldots<t_p=1.$$

Рассмотрим в пространстве H_1 задачу

$$Lu(t) \equiv (-1)^m u^{(2m)}(t) + A^{2m}u(t) = f(t), \tag{2}$$
$$u(t) \in D(L) = \{u(t) \in H_2,\ d_{lj}u = 0,\ l=\overline{1,\ \nu_j},\ j=\overline{1,\ p}\}. \tag{3}$$

Пусть

$$U_s(t) = \begin{cases} \exp \omega_s At, & s=\overline{1,\ m}, \\ \exp \omega_s A(t-1), & s=\overline{m+1,\ 2m}, \end{cases} \tag{4}$$

где $\omega_s = \psi_s + i\varphi_s$, $s=\overline{1,\ m}$ — корни уравнения $\omega^{2m}=(-1)^{m+1}$, пронумерованные так, что $\psi_1 \leqslant \psi_2 \leqslant \ldots \leqslant \psi_{2m}$, $\omega_s = -\omega_{2m-s+1}$, при m четном $\varphi_{2j-1} > \varphi_{2j}$, при m нечетном $\varphi_{2j} > \varphi_{2j+1}$, $\varphi_1 = 0$;

$$U_0(t,\ \tau) = \begin{cases} A^{1-2m} \sum\limits_{j=1}^{m} p_j \exp \omega_j A(t-\tau), & t > \tau, \\ A^{1-2m} \sum\limits_{j=1}^{m} p_j \exp \omega_j A(\tau - t), & t \leqslant \tau, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$p_j = \prod_{2m \geqslant r \neq j \geqslant 1} (\omega_r - \omega_j)^{-1};$$
$$R(A) = \det [d_{lj}U_s(t)]_{l=\overline{1,\ \nu_j};\ j=\overline{1,\ p}}^{s=\overline{1,\ 2m}}.$$

Обозначим

$$W = \left\{ y \in \mathbb{C},\ y = \sum_{j=1}^{p} t_j \sum_{r=\delta_{j-1}+1}^{\delta_j} \omega_{l_r},\ \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & 2m \\ l_1, & l_2, & \ldots, & l_{2m} \end{pmatrix} \in S \right\},$$

где S — множество перестановок чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ 2m$; $\delta_j = \sum\limits_{k=1}^{j} \nu_k$; $\delta_0 = 0$; $W_0 = \{y \in W,\ \operatorname{Re} y \geqslant \operatorname{Re} z\ \forall z \in W\}$.

Раскрывая определитель $R(A)$, получим

$$RA = A^{\theta_2} \sum_{y \in W} b(y) \exp (y - \theta_1) A,$$
$$R_0(A) = A^{\theta_2} \sum_{y \in W_0} b(y) \exp (y - \theta_1) A, \tag{6}$$

где

$$b(y) \in \mathbb{C},\ y \in W;\ \theta_1 = \omega_{m+1} + \ldots + \omega_{2m};\ \theta_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} \nu_j (\nu_j - 1).$$

Предположим, что $R(\lambda_k(A)) \neq 0$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$, где $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$ — спектр оператора A; $\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) \leqslant \ldots$.

Решение $u(t)$ задачи (2), (3) ищем в виде

$$u(t) = \int_0^1 G(t,\ \tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{7}$$

где $G(t,\ \tau) = R^{-1}(A)\, G_0(t,\ \tau)$,

$$G_0(t,\ \tau) = \det \begin{pmatrix} U_1(t) & \ldots & U_{2m}(t) & U_0(t,\ \tau) \\ d_{11}U_1(t) & \ldots & d_{11}U_{2m}(t) & d_{11}(U_0)_t \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{\nu_p p}U_1(t) & \ldots & d_{\nu_p p}U_{2m}(t) & d_{\nu_p p}(U_0)_t \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что $G(t,\ \tau)$ операторнозначная функция Грина задачи (2), (3).

Кроме условий 1°—3°, предположим дополнительно, что: 4°. $\lambda_k(A) \sim \theta_3 k^\alpha$, $\theta_3 > 0$, $\alpha > 0$. 5°. Множества $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^\infty = S_p(A)$ и $N(R)$ — множество нулей функции R — в конечной комплексной плоскости не пересекаются. 6°. Расстояние между $S_p(A)$ и $N(R_0)$ больше ε для некоторого положительного ε. Используя представление операторов $G_0(t, \tau)$, $R(A)$, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1°—6°. Тогда 0 есть точка непрерывного спектра оператора L. Если

$$f(t) \in H_3 = \left\{v(t) \in H_1,\ l^{\theta_4} v(t) \in H_1,\ \theta_4 = \sum_{i=1}^{q-1} (t_i - t_{i+1}) \psi_{\delta_i},\ \delta_{q-1} < m < \delta_q\right\},$$

тогда $\exists!$ решение $u(t)$ задачи (2), (3), принадлежащее пространству H_2.

Замечание 1. Если заменить условие 4° более сильным

$$\mathring{4}_1.\ \lambda_k(A) = \theta_3 k^\alpha,\ k = 1, 2, \ldots,$$

и отказаться от 6°, то для «почти всех» в смысле меры Лебега наборов $T = (t_1, \ldots, t_p, \theta_3)$ [2, 3] утверждение теоремы 1 имеет место.

Рассмотрим в H_1 задачу на собственные значения для оператора L:

$$(-1)^m u^{(2m)}(t) + A^{2m} u(t) = \lambda u(t), \tag{8}$$

$$d_{lj} u = 0,\ l = \overline{1, \nu_j},\ j = \overline{1, p}. \tag{9}$$

Решение задачи (8), (9) ищем в виде $v_k(t) l_k$, $v_k(t) : [0, 1] \to \mathbb{C}$, где l_k — собственный вектор оператора A; $A l_k = \lambda_k(A) l_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Из свойства оператора A следует, что $\{l_k\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированный базис H. Поэтому для определения $v_k(t)$ получим задачу

$$(-1)^m v_k^{(2m)}(t) + \left(\lambda_k^{2m}(A) - \lambda\right) v_k(t) = 0, \tag{10}$$

$$v_k^{(l-1)}(t_j) = 0,\ l = \overline{1, \nu_j},\ j = \overline{1, p}. \tag{11}$$

Обозначим

$$\rho_k = |\lambda_k(L) - \lambda_k^{2m}(A)|^{1/2m} \exp\left(\frac{i}{2m} \arg(-\lambda(L) + \lambda_k^{2m}(A))\right). \tag{12}$$

При этом

$$\lambda_k(L) = -\rho_k^{2m} + \lambda_k^{2m}(A). \tag{13}$$

Задача (8), (9) имеет нетривиальное решение, если и только если $R(\rho_k) = 0$, где

$$R(\rho_k) = \det [(\omega_s \rho_k)^{l-1} \exp \omega_s \rho_k t_j]_{l=\overline{1, \nu_j},\ j=\overline{1, p}}^{s=\overline{1, 2m}}. \tag{14}$$

Используя результаты работ [1, 4, 7] и свойства множества W, можно показать, что нули функции $R(\rho_k)$ имеют представление

$$\rho_{kn}^{2r} = 2\pi C_1 n \exp 2ir\beta + \varphi_{r1}(n),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{15}$$

$$\rho_{kn}^{2r-1} = 2\pi C_2 n \exp (2r - 1) i\beta + \varphi_{r2}(n),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

где $\varphi_{r1}(n)$, $\varphi_{r2}(n)$, $n = \overline{1, m}$ — равномерно ограниченные по n гладкие функции параметров $b(y)$, $y \in W$. При этом, если m четное, то $C_1 = C_1(J_2) \in \mathbb{R}$, $C_2 = C_2(J_1) \in \mathbb{R}$; если m нечетное, то $C_1 = C_1(J_1) \in \mathbb{R}$, $C_2 = C_2(J_2) \in \mathbb{R}$, где $J_1 = \{t_s,\ \delta_s$ — четное число$\} \subset \{t_s\}_{s=1}^p$; $J_2 = \{t_s\}_{s=1}^p \setminus J_1$; $\beta = \pi/2m$.

Замечание 2. Можно показать, что серии нулей вида (15), (16) содержат ограниченное число подпоследовательностей, которое не превышает количества цепочек, образующих $J_1(J_2)$, $J_2(J_1)$. Под цепочкой длины $l + 1$ будем понимать множество точек t_j, t_{j+1}, $\ldots$, t_{j+l}, таких, что δ_j, δ_{j+1}, $\ldots$, δ_{j+l-1}, $1 + \delta_{j+l}$ — четные или нечетные числа одновременно, $1 \leqslant j$, $j + l \leqslant p$.

Принимая во внимание соотношение (13), получим

$$\lambda_{kn}^r(L) \sim \lambda_k^{2m}(A) + C^r n^{2m}, \ k, n \in \mathbb{Z}, \ k \geqslant 0, \ r = 0, 1, \tag{17}$$

где $C^0 < 0$, $C^1 > 0$.

Пусть m — четное число. Перенумеровав множество $\{\lambda_{kn}^1\}_{k+|n|>0}$ в порядке возрастания модулей, получим множество $\{\mu_s^1\}_{s=1}^{\infty}$. Применяя лемму работы [9], получим

$$\mu_s^1(L) \sim C_3 s^{\alpha_1}, \ C_3 = C_3(\theta_3, C^0), \ \alpha_1 = 2m\frac{\alpha}{\alpha+1}. \tag{18}$$

Рассмотрим часть спектра $\{\lambda_{kn}^0\}_{k, n \in Z}^{k>0}$ оператора L. Из условия 6° и соотношений (13), (15) следует, что

$$|\lambda_{kn}^0| \geqslant \varepsilon\psi_{kn},$$

$$\psi_{kn} = \sum_{j=0}^{2m-1} \alpha_j (\rho_{kn}^0)^j (\lambda_k(A))^{2m-j-1},$$

$$\alpha_j \geqslant 0, \ \alpha_j \in \mathbb{Z}, \ j = \overline{1, 2m-1}, \ \alpha_0 = \alpha_{2m-1} = 1. \tag{19}$$

В силу леммы работы [9], перенумеровав множество $\{\psi_{kn}\}$ в порядке возрастания модулей, получим множество $\{\psi_s\}_{s=1}^{\infty}$:

$$\psi_s \sim C_4 s^{\alpha_2}, \ C_4 = C_4(\theta_3, C_1), \ \alpha_2 = (2m-1)\frac{\alpha}{\alpha+1}.$$

Множество $\{\lambda_{kn}^0(L)\}$ при этой нумерации перейдет в множество $\{\mu_s^0(L)\}_{s=1}^{\infty}$:

$$|\mu_s^0(L)| \geqslant \mathrm{const}\, \varepsilon s^{\alpha_2}.$$

Таким образом, функция распределения $N_L(\lambda)$ собственных значений оператора L имеет оценку

$$\mathrm{const}\,|\lambda|^{\alpha_1^{-1}} \leqslant N_L(\lambda) \leqslant \mathrm{const}\,|\lambda|^{\alpha_2^{-1}}. \tag{20}$$

Аналогично получим в случае нечетного m.

Замечание 3. Если выполняются условия $1°-4_1°$, 5° и $\alpha > m^{-1}$ то для «почти всех» наборов T [2, 3] имеет место оценка

$$\mathrm{const}\,||n| + k|^{\alpha_3} \leqslant |\lambda_{kn}^r(L)| \leqslant \mathrm{const}\,(|n| + k)^{\alpha_4}, \tag{21}$$

где

$$\alpha_4 = 2m\min\{1, \alpha\}, \ \alpha_3 > 2m\min\{1, \alpha\} - 2 - j, \ j > 0.$$

Пример. Пусть $p = 2m$, m — четное число. В этом случае спектр оператора L имеет асимптотическое представление

$$\lambda_{kn}^0(L) \sim \lambda_k^{2m}(A) - \frac{(\pi n)^{2m}}{(\varphi_{2r}(t_{2r} - t_{2r-1}))^{2m}}, \ r = \overline{1, m},$$

$$\lambda_{kn}^1(L) \sim \lambda_k^{2m}(A) + \frac{(\pi n)^{2m}}{(\sin 2r\beta\,(t_{2r} - t_{2r+1}))^{2m}}, \ r = \overline{1, m-1},$$

$n, k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$.

В случае нечетного m спектр оператора L имеет асимптотику

$$\lambda_{kn}^0(L) \sim \lambda_k^{2m}(A) - \frac{(\pi n)^{2m}}{(\varphi_{2r}(t_{2r} - t_{2r+1}))^{2m}}, \ r = \overline{1, m-1},$$

$$\lambda_{kn}^1(L) \sim \lambda_k^{2m}(A) + \frac{(\pi n)^{2m}}{((t_{2r} - t_{2r-1})\sin 2r\beta)^{2m}}, \ r = \overline{1, m},$$

$n, k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$.

Теорема 2. Пусть $\lambda \notin S_p(L)$ и выполняются условия 1°—6°, тогда $\lambda \in S_c(L)$.

Таким образом, доказано $\rho(L) = \varnothing$, если выполняются условия 1°—6°, тогда $\mathbb{C} = S_p(L) \cup S_c(L)$, $S_r(L) = \varnothing$ и $S_p(L)$ — дискретное множество не имеет точек накопления, имеющее асимптотическое представление (17), где $\rho(L)$ — резольвентное множество; $S_r(L)$ — остаточный спектр.

1. *Беллабаси Ю.* Регуляризованные следы многоточечной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков. — Дифференц. уравнения, 1983, **19**, № 6, с. 938—944.
2. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами. — Там же, 1977, **13**, № 4, с. 637—645.
3. *Бобик О. І., Боднарчук П. І., Пташник Б. Й., Скоробогатько В. Я.* Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними.— К.: Наук. думка, 1972.—175 с.
4. *Жданович В. Ф.* Формулы для нулей полиномов Дирихле и квазиполиномов. — ДАН СССР, 1960, **135**, № 5, с. 1046—1049.
5. *Завгородний М. Г.* Асимптотика и структура спектра многоточечной краевой задачи / Воронеж. ун-т. — Воронеж, 1982.—21 с. — Рукопись деп. в ВИНИТИ 16.02.83, № 861—83. Деп.
6. *Завгородний М. Г., Покорный Ю. В.* Об асимптотике спектра краевой задачи Валле — Пуссена. — В кн.: Краевые задачи: Межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Перм. политехн. ин-т, 1979, с. 133—135.
7. *Лидский В. Б., Садовничий В. А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций.— Функциональный анализ и его применения, 1967, **1**, № 2, с. 52—59.
8. *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М.: Мир, 1971.—371 с.
9. *Мамедов К. С.* Асимптотика функции распределения собственных чисел абстрактного дифференциального оператора.— Мат. заметки, 1982, **31**, № 1, с. 41—51.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 17.01.84

УДК 517.946 : 517.21 : 518.31

З. И. Васюнык, А. К. Прикарпатский

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ГАМИЛЬТОНОВОМ ФОРМАЛИЗМЕ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ОПЕРАТОРОМ ДИРАКА

1. Рассмотрим дифференциальную операцию Дирака с быстроубывающими «потенциалами» $q(x, t)$, $r(x, t)$ из класса Шварца [1—8]:

$$\frac{\partial}{\partial x} y = i\lambda(x, t)\sigma y + \begin{bmatrix} 0 & q(x, t) \\ r(x, t) & 0 \end{bmatrix} y, \quad \sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где $y \in C^{(1)}(\mathbb{R}^1, \mathbb{C}^2)$; параметр $\lambda \in C^{(1)}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^1)$ — некоторая комплекснозначная функция переменных x, $t \in \mathbb{R}^1$. Опишем класс динамических систем для функций $q(x, t)$, $r(x, t)$, удовлетворяющих следующему условию: обратная задача рассеяния для них является разрешимой при помощи алгебраического алгоритма Гельфанда — Левитана — Марченко. С этой целью, следуя схеме работ [2, 4—8], построим фундаментальные решения Ψ и Φ для $\forall t \in \mathbb{R}^1$ как параметра со следующим асимптотическим поведением на $x = \pm\infty$:

$$\begin{gathered} \Psi(x, t; \lambda)|_{x\to-\infty} \sim \begin{bmatrix} e^{i\gamma(x,t)} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma(x,t)} \end{bmatrix} = \Psi_-, \\ \Phi(x, t; \lambda)_{x\to+\infty} \sim \begin{bmatrix} e^{i\gamma(x,t)} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma(x,t)} \end{bmatrix} = \Phi_+, \end{gathered} \tag{2}$$

где

$$\gamma \in C^{(1)}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^1); \ \frac{\partial}{\partial x}\gamma(x, t) = \lambda(x, t).$$

Тогда, очевидно, выполнено следующее соотношение:

$$\Psi(x, t; \lambda) := \Phi(x, t; \lambda) S(t, \lambda), \tag{3}$$