8. *Kaup D., Newell A.* Evolution Equations, Singular Dispersion Relation, and Moting Eigenvalues.—Adv. Math., 1979, 31, № 1, p. 67—100.
9. *Magri F.* A Geometrical approach to the non-linear solvable equations.—Lect. Notes Phys., 1980, 120, p. 233—263.

Ин-т прикладных проблем
механики и математики АН УССР, Львов
Получено 18.11.83

УДК 517.948

Ю. И. Ковальчик

ОБ ИНТЕГРАЛЕ ФЕЙНМАНА ОТ ФУНКЦИОНАЛОВ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ФУНКЦИЯМИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Большой интерес к интегралу Фейнмана [7] вызван его приложениями в теоретической физике. Этому интегралу посвящено очень много работ, выполненных разными авторами. В краткой статье нет возможности перечислить даже главнейшие работы, посвященные фейнмановскому интегралу. Отметим только, что, например, в монографиях [5, 6] можно найти некоторые литературные ссылки. Интеграл Фейнмана порождает «меру», не обладающую ограниченной вариацией [1, 9] и не являющуюся счетно-аддитивной функцией множества [3]. Строгое математическое обоснование фейнмановского интеграла впервые предложил Р. Камерон [9]. Если подынтегральный функционал $F(x)$, где $x \in C$ (C — пространство непрерывных функций, заданных на сегменте $[a, b]$), удовлетворяет некоторым жестким ограничениям, в частности $F(\lambda x)$ при фиксированном x является аналитической функцией параметра λ, то интеграл Фейнмана от функционала $F: C \to \mathbb{R}^1$ существует [9]. Однако в [9] подчеркивалось, что эти условия только достаточные, и приводилась без доказательства теорема, принадлежащая Вудворду, в которой утверждалось, что интеграл Фейнмана от функционала $F(x) = f\left[\int\limits_a^b \alpha(t)\,dx(t)\right]$ существует, хотя $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ не только не является аналитической, но даже не будет непрерывной функцией. На f достаточно наложить требование абсолютной интегрируемости на всей действительной оси.

В данной статье рассмотрим три класса функционалов, являющихся функциями линейных функционалов, интегралы Фейнмана от которых существуют и даются формулы для их вычисления через конечнократные интегралы. В первой теореме обобщим результат Вудворда [9] на случай функции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$. Исследование отображения $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ при $n > 1$ важно для приложений, в частности, для приближенного вычисления интегралов Фейнмана.

Определим интеграл Фейнмана. Пусть C — пространство непрерывных функций $x: [a, b] \mapsto \mathbb{R}^1$, удовлетворяющих условию $x(a) = 0$, с равномерной нормой, $x \mapsto F(x)$ — функционал, заданный на C и имеющий смысл на функциях, которые допускают разрывы первого рода в конечном числе точек. Разобьем сегмент $[a, b]$ на m частей с помощью разбиения $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ так, что $\lim\limits_{m\to\infty} \max\limits_j (t_j - t_{j-1}) = 0$. Для каждой кривой $x(\cdot)$ построим ступенчатую $\bar{x}^{(m)}(\cdot)$:

$$\bar{x}^{(m)}(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} x(t_1) & \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ x(t_k) & \text{при } t_{k-1} < t \leqslant t_k,\ k = \overline{2, m}, \end{cases}$$

и положим $x(t_k) = x_k$ $(k = \overline{0, m})$. На ступенчатой $\bar{x}^{(m)}(\cdot)$ функционал превратился в функцию m переменных: $F(\bar{x}^{(m)}) = F_m(x_1, \ldots, x_m)$.

Интеграл Фейнмана от функционала $x \mapsto F(x)$ по пространству C определим следующим образом:

$$\int\limits_C F(x)\,dx \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^m [2\pi i(t_k - t_{k-1})]^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^m} F_m(x_1, \ldots, x_m) \exp\left[\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{t_k - t_{k-1}}\right] dx_1 \ldots dx_m,$$

если предел справа существует.

Необходимо отметить, что известны и другие определения интеграла Фейнмана (см., например, работы [8, 10]).

Пусть $\alpha_k : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ $(k = \overline{1, n})$ — функции ограниченной вариации. Символом $<\alpha_k, \alpha_j>$ обозначим скалярное произведение $\int_a^b \alpha_k(t)\alpha_j(t)\,dt$ $(k, j = \overline{1, n})$; $D_n = \| <\alpha_k, \alpha_j> \|_{k,j=1}^n$ — матрицу Грама;

$$(Cv, v) = \sum_{k,j=1}^{m} c_{kj} v_k v_j,$$

где $C = \|c_{kj}\|_{k,j=1}^n$ — квадратичная форма.

В введенном выше разбиении сегмента $[a, b]$ положим $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ $(k = \overline{1, m})$, составим скалярное произведение вида $<\alpha_l, \alpha_j>_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_l(t_{k-1})\alpha_j(t_{k-1})\Delta t_k$ и соответствующую матрицу Грама

$$D_{mn} = \| <\alpha_l, \alpha_j>_m \|_{l,j=1}^n.$$

Теорема 1. Пусть $\alpha_k : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ $(k = \overline{1, n})$ — линейно независимые функции ограниченной вариации на сегменте $[a, b]$, $x \in C[a, b]$ и $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}^n$ функция. Тогда существует интеграл Фейнмана от функционала $x \to f\left[\int_a^b \alpha_1(t)\,dx(t), \ldots, \int_a^b \alpha_n(t)\,dx(t)\right]$ и справедлива формула

$$\int_C f\left[\int_a^b \alpha_1(t)\,dx(t), \ldots, \int_a^b \alpha_n(t)\,dx(t)\right] dx =$$

$$= (2\pi i)^{-\frac{n}{2}} (\det D_n)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[\frac{i}{2}(D_n^{-1}u, u)\right] f(u)\,du. \quad (1)$$

Приведем схему доказательства. Заменим кривые $x(t)$ ступенчатыми $\bar{x}^{(m)}(t)$. Тогда

$$\int_C f\left[\int_a^b \alpha_1(t)\,dx(t), \ldots, \int_a^b \alpha_n(t)\,dx(t)\right] dx = \lim_{m\to\infty} I_m,$$

где

$$I_m = \prod_{k=1}^{m} [2\pi i(t_k - t_{k-1})]^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} f\left[\sum_{k=1}^{m} \alpha_1(t_{k-1})(x_k - x_{k-1}), \ldots,\right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{m} \alpha_n(t_{k-1})(x_k - x_{k-1})\right] \exp\left[\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{t_k - t_{k-1}}\right] dx_1 \ldots dx_m.$$

Лемма. В предположениях теоремы справедливо равенство

$$I_m = (2\pi i)^{-\frac{n}{2}} (\det D_{mn})^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[\frac{i}{2}(D_{mn}^{-1}u, u)\right] f(u)\,du. \quad (2)$$

Доказательство леммы опускаем, так как оно аналогично доказательству теоремы 1 из статьи [2].

Элементами матрицы D_{mn} являются выражения

$$<\alpha_l, \alpha_j>_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_l(t_{k-1})\alpha_j(t_{k-1})\Delta t_k.$$

Предел

$$\lim_{m\to\infty} <\alpha_l,\ \alpha_j>_m = \int_a^b \alpha_l(t)\,\alpha_j(t)dt = <\alpha_l,\ \alpha_j>.$$

Следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} \det D_{mn} = \det D_n$ и $\lim\limits_{m\to\infty} (D_{mn}^{-1}u,\ u) = (D_n^{-1}u,\ u)$.

После перехода к пределу при $m\to\infty$ в обеих частях формулы (2) в силу предположений теоремы получаем формулу (1).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. При $n=1$ матрица D_n будет состоять из одного элемента и формула (1) превратится в формулу Вудворда [9].

2. Пусть $\alpha_k : [a,\ b] \to \mathbb{R}^1\ (k=\overline{1,\ n})$ — ортонормированная система функций ограниченной вариации и $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\int_C f\left[\int_a^b \alpha_1(t)\,dx(t),\ \ldots,\ \int_a^b \alpha_n(t)\,dx(t)\right]dx =$$

$$= (2\pi i)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{i}{2}\sum_{k=1}^n u_k^2\right) f(u)\,du. \tag{3}$$

В этом случае формула (3) была установлена раньше В. И. Ладохиным [4] при дополнительном требовании непрерывности функций $\alpha_k(\cdot)$ $(k=\overline{1,\ n})$ и непрерывности отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$.

3. Пусть $\beta_k : [a,\ b] \to \mathbb{R}^1\ (k=\overline{1,\ n})$ — абсолютно интегрируемые на $[a,\ b]$ функции, такие, что функции $t \mapsto \int_t^b \beta_k(s)\,ds\ (k=\overline{1,\ n})$ линейно независимы на сегменте $[a,\ b]$ и $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}^n$ функция. Тогда существует интеграл Фейнмана от функционала

$$x \mapsto f\left[\int_a^b \beta_1(t)\,x(t)\,dt,\ \ldots,\ \int_a^b \beta_n(t)\,x(t)\,dt\right]$$

и справедлива формула

$$\int_C f\left[\int_a^b \beta_1(t)\,x(t)\,dt,\ \ldots,\ \int_a^b \beta_n(t)\,x(t)\,dt\right]dx =$$

$$= (2\pi i)^{-\frac{n}{2}} (\det D_n^*)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[\frac{i}{2}(D_n^{*-1}u,u)\right] f(u)\,du,$$

где

$$D_n^* = \left\| \int_a^b \left[\int_t^b \beta_k(s)\,ds \int_t^b \beta_j(s)\,ds\right] dt \right\|_{k,j=1}^n.$$

Данное утверждение немедленно вытекает из формулы (1), если положить

$$\alpha_l(t) = \int_t^b \beta_l(s)\,ds\ (l=\overline{1,\ n}).$$

Теорема 2. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}^n$ функция и $a \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n \leqslant b$ — фиксированные точки. Тогда существует интеграл Фейнмана от функционала $x \mapsto f[x(\tau_1),\ x(\tau_2),\ \ldots,\ x(\tau_n)]$ и справедлива формула

$$\int_C f[x(\tau_1),\ x(\tau_2),\ \ldots,\ x(\tau_n)]\,dx = \prod_{k=1}^n [2\pi i(\tau_k - \tau_{k-1})]^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} f(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n) \exp\left[\frac{i}{2}\sum_{k=1}^n \frac{(u_k - u_{k-1})^2}{\tau_k - \tau_{k-1}}\right] du_1 \ldots du_n, \tag{4}$$

где $\tau_0 = a$ и $u_0 = 0$.

Доказательство. Воспользуемся формулой (1). Положим

$$\alpha_l(t) = \begin{cases} -1 & \text{при } t \leqslant \tau_l, \\ 0 & \text{при } t > \tau_l, \ t \in [a, b], \ l = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_a^b \alpha_l(t)\,dx(t) = \int_a^b x(t)\,d\alpha_l(t) = x(\tau_l) \quad (l = \overline{1, n})$$

и

$$<\alpha_l, \alpha_j> = \min(\tau_l - a, \tau_j - a) \quad (l, \ j = \overline{1, n}).$$

Затем составляются $\det D_n$, квадратичная форма $(D_n^{-1}u, u)$ и эти выражения подставляются в формулу (1).

Замечания. 1. Может казаться, что формулу (4) не следует доказывать, а принять в качестве определения, но тогда были бы два определения интеграла Фейнмана: первое — когда подынтегральный функционал зависит от значений функции в конечном числе точек и второе — в бесконечном числе точек. Такая ситуация, очевидно, не корректна.

2. Можно не предполагать абсолютной интегрируемости функции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, а просто интегрируемость, и формула (4) все равно будет справедлива. Для этого необходимо непосредственно вычислить интеграл Фейнмана исходя из определения.

Введем еще две матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} \int_a^{\tau_1} \alpha_1(\tau)\,dt & \ldots & \int_a^{\tau_q} \alpha_1(t)\,dt \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \int_a^{\tau_1} \alpha_p(t)\,dt & \ldots & \int_a^{\tau_q} \alpha_p(t)\,dt \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \tau_1 - a & \tau_1 - a & \ldots & \tau_1 - a \\ \tau_1 - a & \tau_2 - a & \ldots & \tau_2 - a \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \tau_1 - a & \tau_2 - a & \ldots & \tau_q - a \end{pmatrix}.$$

Пусть A' — транспонированная по отношению к A матрица и C_{p+q} — блочная матрица вида

$$C_{p+q} = \begin{pmatrix} D_p & A \\ A' & B \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. Пусть $\alpha_k: [a, b] \to \mathbb{R}^1$ $(k = \overline{1, p})$ — линейно независимые функции ограниченной вариации на сегменте $[a, b]$; $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^1$, $g: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^1$ — таковы, что fg — абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}^{p+q}$ функция; определитель $\det C_{p+q} \neq 0$ и $a \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ \ldots \ < \tau_q \leqslant b$ — фиксированные точки. Тогда существует интеграл Фейнмана от функционала

$$x \mapsto f\left[\int_a^b \alpha_1(t)\,dx(t), \ \ldots, \ \int_a^b \alpha_p(t)\,dx(t)\right] g[x(\tau_1), \ \ldots, \ x(\tau_q)]$$

и

$$\int_C f\left[\int_a^b \alpha_1(t)\,dx(t), \ \ldots, \ \int_a^b \alpha_p(t)\,dx(t)\right] g[x(\tau_1), \ \ldots,$$

$$x(\tau_q)]\,dx = (2\pi i)^{-\frac{p+q}{2}} [\det(D_p - AB^{-1}A')]^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{q}(\tau_k-\tau_{k-1})\right]^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^{p+q}}\exp\left[\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{p+q}(C_{p+q}^{-1}u,\ u)\right]\times$$
$$\times f(u_1,\ \ldots,\ u_p)\,g(u_{p+1},\ \ldots,\ u_{p+q})\,du.$$

Для доказательства строится функционал

$$h(x)=f(x)\,g\left[\int\limits_a^b\alpha_{p+1}(t)\,dx(t),\ \ldots,\ \int\limits_a^b\alpha_{p+q}(t)\,dx(t)\right],$$

для которого специально выбираются функции $\alpha_{p+j}(t)$ $(j=\overline{1,\ q})$, а затем применяется теорема 1.

1. *Далецкий Ю. Л.* Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями.—Успехи мат. наук, 1962, **17**, вып. 5, с. 3—115.
2. *Егоров А. Д., Янович Л. А.* О точном и приближенном вычислении интегралов по гауссовой мере.—Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1971, № 1, с. 62—73.
3. *Ладохин В. И.* О «мере» в функциональном пространстве, отвечающей комплексному коэффициенту диффузии.—Учен. зап. Казан. ун-т, 1963, **123**, кн. 6, с. 36—42.
4. *Ладохин В. И.* Вычисление континуальных интегралов от функционалов $\Phi\left[\int\limits_0^T\alpha_1(\tau)\,dx(\tau),\ \ldots,\ \int\limits_0^T\alpha_m(\tau)\,dx(\tau)\right]$.—Успехи мат. наук, 1964, **19**, вып. 1, с. 155—159.
5. *Маслов В. П.* Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана.— М.: Наука, 1976.—192 с.
6. *Попов В. Н.* Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике.—М.: Атомиздат, 1976.—256 с.
7. *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям.—М.: Мир, 1968.—382 с.
8. *Albeverio S., Hōegh-Krohn R.* Mathematical theory of Feynman path integrals.— Institute of Math. University of Oslo, 1974.—126 p.—(Preprint/ISBN; 82-553-0193-3).
9. *Cameron R. H.* A family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals.—Journ. of Math. and Phys., 1960, **39**, № 2, p. 126—140.
10. *Combe Ph., Riedeau G., Rodriguez R., Sirugue-Collin M.* On some mathematical problems in the definition of Feynman path integrals.—Marseille, 1976.—24 p.— (Preprint/Centre de Physique Theoret.; 76P. 845).

Львовский государственный
ун-т им. Ив. Франко

Получено 08. 02. 84.

УДК 536.21

М. Я. Бартиш, И. В. Огирко, В. М. Фарат

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ НЬЮТОНА — КАНТОРОВИЧА

В [5] для решения одномерного нелинейного уравнения теплопроводности применен метод Ньютона — Канторовича. В данной статье рассмотрен случай двумерного нелинейного уравнения теплопроводности.

Как известно [4], уравнение теплопроводности с учетом зависимости коэффициента теплопроводности λ от температуры $t(x,\ y)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda\frac{\partial t}{\partial y}\right]=-\omega \text{ в } D, \qquad (1)$$

где ω — плотность внутренних источников тепла. Для простоты граничные условия выберем типа

$$t|_\Gamma=\varphi(x,\ y). \qquad (2)$$

При решении задачи (1)—(2) методом Ньютона — Канторовича [3] исходная задача заменяется последовательностью линейных краевых задач:

$$\lambda^{(n)}\left[\frac{\partial^2V^{(n)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V^{(n)}}{\partial y^2}\right]+2\frac{d\lambda^{(n)}}{dt}\left[\frac{\partial t^{(n)}}{\partial x}\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}+\frac{\partial t^{(n)}}{\partial y}\frac{\partial V^{(n)}}{\partial y}\right]+$$