Вычислительный эксперимент, проведенный на базе численных методов устойчивой коррекции, убеждает в целесообразности практического использования последних. Этим подтверждается полезность развиваемого направления в построении численных методов решения жестких систем дифференциальных уравнений.

1. *Боднарчук П. И., Кутнив М. В., Максымив Е. М.* Дробно-рациональные численные методы решения слабо жестких задач. — В кн.: Тез. лекций и докл. Всесоюз. школы «Численные методы решения задач математической физики» (Львов, 25 мая — 4 июня 1983 г.). М. : Знание, 1983, ч. 3, с. 2—4.
2. *Боднарчук П. И., Слоневский Р. В., Пустомельников И. П.* Дробно-рациональные численные методы решения «жестких» задач. — Там же, с. 4—6.

Львовский политехнический ин-т Получено 08.02.84

УДК 517.52

Х. И. Кучминская, О. Н. Сусь

ДВА ПРИЗНАКА СХОДИМОСТИ ДВУМЕРНЫХ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Предметом наших исследований будут двумерные цепные дроби (ДЦД) [2] вида

$$\frac{a_0|}{|\Phi_0} + \frac{a_1|}{|\Phi_1} + \ldots, \quad \Phi_i = b_i + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i}|}{|b_{i+j,i}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j}|}{|b_{i,i+j}}, \tag{1}$$

n-я подходящая дробь которых определяется по формуле

$$P_n/Q_n = \sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{a_i|}{|\Phi_i^{(n-2i)}}, \tag{2}$$

где

$$\Phi_i^{(k)} = b_i + \sum_{j=1}^{k} \frac{a_{i+j,i}|}{|b_{i+j,i}} + \sum_{j=1}^{k} \frac{a_{i,i+j}|}{|b_{i,i+j}}; \quad \Phi_i^{(0)} = b_i, \ k = 0, 1, \ldots.$$

При введении обозначений

$$\frac{P_n(i)}{Q_n(i)} = \Phi_{i-1}^{(n-2i+2)} + \frac{a_i|}{|\Phi_i^{(n-2i)}} + \ldots + \frac{a_{[n/2]}|}{|\Phi_{[n/2]}^{(n-2[n/2])}}, \quad i = \overline{1, [n/2]}, \tag{3}$$

в предположении, что

$$\frac{P_n(0)}{Q_n(0)} = 0, \quad \frac{P_n([n/2]+1)}{Q_n([n/2]+1)} = \Phi_{[n/2]}^{(n-2[n/2])}, \quad \frac{P_n([n/2]+2)}{Q_n([n/2]+2)} = \infty, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

аналогично как и в работах [1, 4], нетрудно получить формулу разности двух соседних подходящих дробей

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^{i+1} \left[\Phi_i^{(n-2i)} - \Phi_i^{(n-1-2i)}\right] \prod_{j=0}^{i} \frac{a_j Q_{n-1}(j+1)\, Q_n(j+1)}{P_{n-1}(j+1)\, P_n(j+1)} +$$

$$+ (-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} \frac{Q_n\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+2\right)}{P_n\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+2\right)} \prod_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{a_{\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}\, a_j Q_{n-1}(j+1)\, Q_n(j+1)}{P_{n-1}(j+1)\, P_n(j+1)}. \tag{4}$$

Обозначая

$$R_{i,n-1} = -\frac{a_i Q_{n-1}(i+1)\, Q_n(i+1)}{P_{n-1}(i+1)\, P_n(i+1)},$$

$$R_{\left[\frac{n-1}{2}\right]+1,\, n-1} = \frac{a_{\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} Q_n\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+2\right)}{P_n\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+2\right)},$$

из (4) получим

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left[\Phi_i^{(n-2i)} - \Phi_i^{(n-1-2i)}\right] \prod_{j=0}^{i} R_{j,n-1} + \prod_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} R_{j,n-1}. \quad (5)$$

Поскольку

$$\Phi_i^{(n-2i)} - \Phi_i^{(n-1-2i)} = \frac{A_{n-2i}}{B_{n-2i}} - \frac{A_{n-1-2i}}{B_{n-1-2i}} + \frac{A'_{n-2i}}{B'_{n-2i}} - \frac{A'_{n-1-2i}}{B'_{n-1-2i}} =$$

$$= (-1)^{n-2i+1}\left\{\frac{a_{i+1,i}\cdots a_{n-i,i}}{B_{n-2i}B_{n-1-2i}} + \frac{a_{i,i+1}\cdots a_{i,n-i}}{B'_{n-2i}B'_{n-1-2i}}\right\} = \prod_{j=0}^{n-2i} \rho_j + \prod_{j=0}^{n-2i} \rho'_j, \quad (6)$$

где

$$\frac{A_k}{B_k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_{i+j,i}|}{|b_{i+j,i}}; \quad \frac{A'_k}{B'_k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_{i,i+j}|}{|b_{i,i+j}}; \quad \rho_k = -\frac{a_{i+k,i}B_{k-2}}{B_k},$$

$$k = 1,\ 2,\ \ldots, \quad \rho_0 = -1, \quad B_0 = B_{-1} = B_{-2} = 1,$$

формулу разности (4) можно записать в виде

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left(\prod_{j=0}^{n-2i} \rho_j + \prod_{j=0}^{n-2i} \rho'_j\right)\left(\prod_{j=0}^{i} R_{j,n-1}\right) + \prod_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} R_{j,n-1}. \quad (7)$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Значение ДЦД (1), когда $b_0 = 1$ равно сумме двойного ряда $\sum\limits_{i,j\geqslant 0} c_{ij}$, где

$$c_{00} = a_0; \quad c_{k-i,i} = \prod_{j=0}^{k-2i} \rho_j \prod_{j=0}^{i} R_{j,k-1}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots; \quad (8)$$

$$c_{kk} = \prod_{j=0}^{k} R_{j,k-1}; \quad c_{i,k-i} = \prod_{j=0}^{k-2i} \rho'_j \prod_{j=0}^{i} R_{j,k-1}, \quad i = \overline{0,\ [n/2]}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Доказательство. Записав n-ю подходящую дробь в виде

$$P_n/Q_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (P_k/Q_k - P_{k-1}/Q_{k-1}),$$

с учетом (6), (7) имеем

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \left(\prod_{j=0}^{k-2i} \rho_j + \prod_{j=0}^{k-2i} \rho'_j\right) \prod_{j=0}^{i} R_{j,k-1} +$$

$$+ \prod_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]+1} + R_{j,k-1} = \sum_{p+m=k} c_{pm}. \quad (9)$$

Тогда значение ДЦД (1) равно пределу

$$\lim_{n\to\infty} (P_n/Q_n) = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij}.$$

ДЦД (1) нетрудно привести к дроби с частными знаменателями, равными единице. Для этого достаточно положить

$$c_0 = a_0/b_0, \quad c_i = a_i/b_i b_{i-1}, \quad c_{i+1,i} = \frac{a_{i+1,i}}{b_i b_{i+1,i}}, \quad c_{i,i+1} = \frac{a_{i,i+1}}{b_i b_{i,i+1}},$$

$$c_{i+j,i}=\frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}b_{i+j-1,i}};\quad c_{i,i+j}=\frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}b_{i,i+j-1}},\quad j=2,\ 3,\ \ldots \tag{10}$$

(c_i, c_{ij} — частные числители преобразованной дроби). Поэтому рассмотрим ДЦД (1) с коэффициентами $b_i=1$, $b_{ij}=1$, i, $j=0$, 1, ...

Теорема 2. Если все частные знаменатели ДЦД (1) равны единице, а частные числители удовлетворяют условиям

$$|a_i|\leqslant 1/8,\quad |a_{i+1,i}|\leqslant 1/16,\quad |a_{i,i+1}|\leqslant 1/16,$$

$$|a_{i+k,i}|\leqslant 1/4,\quad |a_{i,i+k}|\leqslant 1/4,\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\quad k=2,\ 3,\ \ldots, \tag{11}$$

то ДЦД (1) сходится.

Доказательство. Преобразуем формулу (3):

$$(P_n(i)/Q_n(i))=\Phi_{i-1}^{(n-2i+2)}\left[1+\sum_{j=i}^{[n/2]}\frac{a_j|}{|\Phi_{j-1}^{(n-2j+2)}\Phi_j^{(n-2j)}}\right],$$

тогда с учетом того, что

$$|\Phi_k^{(n-2k)}|=\left|1+\sum_{i=1}^{n-2k}\frac{a_{k+i,k}|}{|1}+\sum_{i=1}^{n-2k}\frac{a_{k,k+i}|}{|1}\right|\geqslant$$

$$\geqslant 1-\cfrac{|a_{k+1,k}|}{1-\cfrac{1/4}{1-\cfrac{1/4}{1-\ddots}}}-\cfrac{|a_{k,k+1}|}{1-\cfrac{1/4}{1-\cfrac{1/4}{1-\ddots}}}=1-\frac{|a_{k+1,k}|}{1/2}-\frac{|a_{k,k+1}|}{1/2}\geqslant\frac{3}{4}$$

и

$$\left|1+\sum_{j=i}^{[n/2]}\frac{a_j|}{|\Phi_{j-1}^{(n-2j+2)}\Phi_j^{(n-2j)}}\right|\geqslant 1-\cfrac{2/9}{1-\cfrac{2/9}{1-\ddots}}=\frac{2}{3},$$

получим оценку

$$\left|\frac{P_n(i)}{Q_n(i)}\right|\geqslant\frac{1}{2}. \tag{12}$$

Из (12), (11) следует, что

$$|R_{i,n-1}|\leqslant\frac{1}{2},\quad i=\overline{1,\ \left[\frac{n-1}{2}\right]+1},\quad n=2,\ 3,\ \ldots.$$

Нетрудно проверить, что

$$\rho_k\rho_{k+2}=-\frac{a_{k+i+2,i}}{a_{k+i+1,i}}-\frac{1+a_{k+i+1,i}+a_{k+i+2,i}}{a_{k+i+1,i}}\,\rho_{k+2}$$

или

$$\rho_{k+2}=-\frac{a_{k+i+2,i}}{1+a_{k+i+2,i}+a_{k+i+1,i}(1+\rho_k)}. \tag{13}$$

Аналогичные соотношения имеют место и для ρ_k'. Причем

$$|\rho_0|=|\rho_0'|=1,\ |\rho_1|\leqslant 1/16,\ |\rho_1'|\leqslant 1/16,\ |\rho_2|\leqslant 1/3,\ |\rho_2'|\leqslant 1/3,$$

$$|\rho_3|\leqslant|a_{3+i,i}|/(1+|a_{2+i,i}|+|a_{3+i,i}|)\leqslant\frac{2}{4},\ |\rho_3'|\leqslant\frac{2}{4}.$$

Далее с учетом формулы (13), используя метод математической индукции, получим

$$|\rho_k|\leqslant\frac{k-1}{k+1},\ |\rho_k'|\leqslant\frac{k-1}{k+1}. \tag{14}$$

Теперь воспользуемся теоремой 1 и оценим

$$|c_{kk}| = \prod_{j=0}^{k} |R_{j,k-1}| \leqslant 2^{-(k+1)},$$

$$|c_{k0}| = \prod_{j=0}^{k} |p_j|\,|R_{0,k-1}| \leqslant \frac{1}{16}\,\frac{1}{k(k+1)},$$

$$|c_{k+i,i}| = \prod_{j=0}^{k} |p_j| \prod_{j=0}^{i} |R_{j,k+2i-1}| \leqslant 2^{-i}\,\frac{1}{16k(k+1)}.$$

Аналогичные оценки справедливы для $c_{i,k+i}$. Тогда ряд $\sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij}$ мажорируется произведением рядов

$$\frac{1}{2}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k(k+1)}\right)\left(1+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{xy}{2}\right)^k\right)$$

в точке $(x, y) = (1, 1)$.

Теорема доказана.

Рассмотрим ДЦД (1) с частными числителями, равными единице (к такому виду нетрудно привести ДЦД (1), если все a_i, $a_{ij} \neq 0$), n-я подходящая дробь которой имеет вид

$$\frac{P_n}{Q_n} = \sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{1\,|}{|\,\Phi_i^{(n-2i)}}, \quad \Phi_i^{(n-2i)} = b_i + \sum_{j=1}^{n-2i} \frac{1\,|}{|\,b_{i+j,i}} + \sum_{j=1}^{n-2i} \frac{1\,|}{|\,b_{i,i+j}}. \tag{15}$$

Пусть у такой дроби все $\Phi_i^{(n-2i)}$, являющиеся суммой двух цепных дробей, сходятся, т. е. для произвольного $\varepsilon > 0$

$$|\Phi_i^{(m-2i)} - \Phi_i^{(n-2i)}| < \varepsilon$$

при $m-2i$, $n-2i > N$. Тогда имеет место аналог необходимого условия сходимости цепных дробей [3].

Теорема 3. Если у ДЦД (1) с частными числителями, равными единице, все суммы цепных дробей $\Phi_i^{(n-2i)}$, $i = 0, 1, \ldots$, сходятся, кроме того, суммы их подходящих дробей равномерно ограничены:

$$|\Phi_i^{(n-2i)}| \leqslant B_i, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{16}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_{n,n+1}} + \frac{1}{b_{n+1,n}}\right) \neq 0 \tag{17}$$

и ряд $\sum_{i=0}^{\infty} B_i$ сходится, тогда такая ДЦД расходится.

Доказательство. Пусть $\frac{P_{n,k}}{Q_{n,k}}$ будет подходящей дробью дроби (15), т. е.

$$\frac{P_{n,k}}{Q_{n,k}} = \frac{1\,|}{|\,\Phi_0^{(n)}} + \frac{1\,|}{|\,\Phi_1^{(n-2)}} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,\Phi_k^{(n-2k)}}, \quad k = \overline{0,\ [n/2]}, \tag{18}$$

$$\frac{P_{n,[n/2]}}{Q_{n,[n/2]}} = \frac{P_n}{Q_n}.$$

Используя метод математической индукции и условие (16), получаем

$$|P_{n,k}| \leqslant \prod_{i=1}^{k}(1+B_i), \quad |Q_{n,k}| \leqslant \prod_{i=0}^{k}(1+B_i),$$

$$|P_n| \leqslant \prod_{i=1}^{[n/2]}(1+B_i), \quad |Q_n| \leqslant \prod_{i=0}^{[n/2]}(1+B_i).$$

Поскольку ряд $\sum_{i=0}^{\infty} B_i$ сходится, то сходится произведение $\prod_{i=0}^{\infty} (1 + B_i)$ и, таким образом, последовательности $\{P_{2n}\}$, $\{P_{2n+1}\}$, $\{Q_{2n}\}$, $\{Q_{2n+1}\}$ ограничены. Кроме того, эти последовательности стремятся к конечному пределу, что доказывается аналогично, как и в работе [4].

Из формулы (5) получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} (P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n) \neq 0,$$

тем самым четные и нечетные подходящие дроби ДЦД (1) сходятся к разным пределам, поэтому ДЦД (1) расходится.

1. *Боднар Д. И., Кучминская Х. И.* О сходимости разложения функции двух переменных в соответствующую ветвящуюся цепную дробь. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 3—6.
2. *Кучминская Х. И.* Приближение функций двух переменных двумерными цепными дробями. — В кн.: Междунар. конф. по теории приближения функций, СССР, Киев, 30 мая — 6 июня 1983 г. : Тез. докл. Киев : Ин-т матем. АН УССР, 1983, с. 110.
3. *Хованский А. Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. — М. : Гостехиздат, 1956.—203 с.
4. *Siemaszko W.* On some conditions for convergence of branched continued fractions.— Lect. Notes Math., 1981, 888, p. 367—370.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 23.11.83

УДК 539.377

В. А. Шевчук

МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ПРОЦЕССА ДИФФУЗИОННОГО НАСЫЩЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ВЗАИМОСВЯЗИ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМАЦИИ И ДИФФУЗИИ ВЕЩЕСТВА

Диффузионное насыщение поверхности металлических изделий соответствующими химическими элементами является одним из основных способов получения защитных покрытий, которые используются для повышения долговечности и надежности деталей машин, придания им необходимых физико-химических свойств. Для расчета напряженного состояния и режима образования диффузионных покрытий может быть использована математическая модель, приведенная в работе [1], которая позволяет учитывать взаимосвязь процессов деформации и диффузии вещества.

Система дифференциальных уравнений и краевых условий, описывающих процесс диффузионного насыщения, представляет собой сложную краевую задачу математической физики. Аналитическое решение может быть получено лишь для некоторых частных задач такого рода, а для большинства практически важных случаев получение аналитического решения крайне затруднено. Поэтому представляется целесообразным применение численных методов, ориентированных на современные мощные ЭВМ.

В данной работе для решения нестационарной взаимосвязанной задачи о диффузионном насыщении сферических деформируемых твердых тел для случая центральной симметрии предложена схема численного расчета, основанная на сведении исходной системы уравнений и краевых условий к решению некоторой неклассической краевой задачи для физической переменной (концентрации диффундирующего вещества) и последующему определению механических переменных (перемещений и напряжений) через решение этой неклассической краевой задачи.

Для центральносимметричной задачи, в изотермическом случае, в предположении, что время релаксации механических процессов значительно меньше времени релаксации процессов, связанных с переносом