$$\lambda_1 = c_0^{(2)} a_{13} - c_0^{(1)} a_{12} - a_{11}\delta; \quad \lambda_2 = \varphi_c - a_{12} c_0^{(1)} - a_{11}\delta.$$

Таким образом, получены выражения для распределения концентрации диффундирующего вещества (11)—(12) и компонентов тензора напряжений в слое и полупространстве (10).

1. *Архаров В. І.* Сучасні уявлення про явища дифузії речовини в твердому стані. — Фізика твердого тіла, 1972, вип. 2, с. 3—18.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. — М.: Наука, 1970.—939 с.
3. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Вариационная форма теории термодиффузионных процессов в деформируемом твердом теле. — Прикл. математика и механика, 1964, 33, № 4, с. 774—776.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 24.01.84.

УДК 539.3 : 538.54

А. Р. Гачкевич, Б. И. Чорный

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ И НАПРЯЖЕНИЯ В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ПЛАСТИНЕ, НАГРЕВАЕМОЙ ЛИНЕЙНЫМ ИНДУКТОРОМ

Рассматривается электропроводная упругая пластина толщины $2h$, в области которой (область D) отсутствуют «сторонние» заряды и токи. Пластина помещена в диэлектрическую среду (области $D_0^{\mp}$) и подвергается воздействию установившегося высокочастотного электромагнитного поля, создаваемого единичным линейным проводником с током (индуктором) параллельным поверхности пластины. Ставится задача об определении электромагнитного поля, соответствующего ему джоулева тепла, температурного поля и напряжений при данной схеме индукционного нагрева.

На первом этапе решения такой комплексной задачи, т. е. при определении электромагнитного поля, исходим из уравнений электродинамики, записанных относительно амплитуд напряженностей электрического поля $\vec{E}_0^{\pm}$, $\vec{E}$ в областях внешней среды и пластины [3]. Вводя прямоугольную декартову систему безразмерных (отнесенных к h) координат $\{x_1, x_2, z\}$ таким образом, чтобы ось x_1 совпала с направлением тока в проводнике, а плоскость $z=0$ — со срединной плоскостью пластины, амплитуду плотности тока в индукторе представим в виде

$$\vec{j}_0^{+} = j_0 \delta(x_2)\, \delta(z - z_0 - 1)\, \vec{i}_1, \tag{1}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; z_0 — расстояние от проводника до нагреваемой поверхности пластины. В этом случае отличными от нуля будут только составляющие $E_{01}^{\pm}$, E_1 амплитуд $\vec{E}_0^{\pm}$, $\vec{E}$. Для их определения имеем следующую систему уравнений [3]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + k_0^2\right) E_{01}^{\pm} = \begin{cases} i\omega\mu_0 h^2 j_0 \delta(x_2)\, \delta(z - z_0 - 1) & \text{в } D_0^{+}, \\ 0 \text{ в } D_0^{-}, \end{cases} \tag{2}$$

$$\left[\delta_*^2\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) - \frac{i}{2}\right] E_1 = 0 \text{ в } D, \tag{3}$$

граничных условий на поверхностях $z = \pm 1$ пластины

$$E_1 = E_{01}^{\pm}, \quad \frac{\partial}{\partial z} E_1 = \mu_* \frac{\partial}{\partial z} E_{01}^{\pm}, \tag{4}$$

к которым присоединяются условия на бесконечности (условия излучения [3]).

Здесь $D_0^{\pm}$ — области внешние по отношению к поверхностям $z=\pm 1$ пластины; $\mu_* = \mu/\mu_0$; $k_0^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2 h^2$; $\delta_* = \sqrt{2/\delta\mu\omega}/2h$ — параметр относительной глубины проникновения индукционных токов; ε_0, ε, μ_0, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости внешней среды и пластины; ω — угловая частота; σ — коэффициент электропроводности.

При высокочастотном электромагнитном воздействии задача (2)—(4) в связи с малостью параметра δ_* ($\delta_* \ll 1$) является сингулярно возмущенной. Согласно методике, изложенной в работе [5], решение такой задачи представляется в виде асимптотических разложений в степенные ряды по малому параметру δ_*. При этом коэффициенты разложения для области пластины строятся в окрестности поверхности $z=1$ как функции типа погранслоя и последовательно определяются с помощью рекуррентных соотношений через решения соответствующих краевых задач для области внешней среды D_0^+. Применив эту методику и используя преобразование Фурье по переменной x_2, получаем в пренебрежении токами смещения в области внешней среды ($k_0^2=0$) [4] следующее решение исходной задачи (2)—(4):

$$E_1 = -\frac{1+i}{2\sigma\delta_*}\left\{ I_1^{(0)} - (1-i)\,\mu_*\delta_* I_1^{(1)} - \left[i\left(2\mu_*^2 - 1\right) - \frac{1-i}{2}\zeta \right]\times \right.$$
$$\left. \times\, \delta_*^2 I_1^{(2)} + \ldots \right\} e^{-\sqrt{i/2}\,\zeta}. \tag{5}$$

Здесь $\zeta = (1-z)/\delta_*$;

$$I_1^{(0)} = \frac{j_0}{\pi}\frac{z_0}{z_0^2+x_2^2};\quad I_1^{(1)} = \frac{z_0^2-x_2^2}{z_0\left(z_0^2+x_2^2\right)} I_1^{(0)};\quad I_1^{(2)} = \frac{2\left(z_0^2-3x_2^2\right)}{\left(z_0^2+x_2^2\right)^2} I_1^{(0)}. \tag{6}$$

При определении джоулева тепла в пластине $Q = \frac{\sigma}{2}E_1\mathring{E}_1$ ($\mathring{E}_1$ — комплексно сопряженная к E_1 функция) ограничимся рассмотрением трех членов решения (5). Тогда имеем

$$Q(x_2,\ z) = \frac{e^{-\zeta}}{4\sigma\delta_*^2}\sum_{k=0}^{\infty} q_k(x_2)\,\zeta^k, \tag{7}$$

где

$$q_0(x_2) = I_1^{(0)^2} - 2\mu_*\delta_*\left(I_1^{(0)} - \mu_*\delta_* I_1^{(1)}\right) I_1^{(1)} -$$
$$-\,\delta_*^3\left(2\mu_*^2-1\right)\left[2\mu_* I_1^{(1)} - \delta_*\left(2\mu_*^2-1\right) I_1^{(2)}\right] I_1^{(2)};$$
$$q_1(x_2) = -\,\delta_*^2\left[I_1^{(0)} - 2\mu_*\delta_* I_1^{(1)} + \delta_*^2\left(2\mu_*^2-1\right) I_1^{(2)}\right] I_1^{(2)};$$
$$q_2(x_2) = \frac{1}{2}\delta_*^4 I_1^{(2)^2}.$$

На рис. 1 в виде графиков представлены результаты численных исследований распределения джоулева тепла $\left(\text{функции } Q_* = \frac{\sigma}{j_0^2}Q\right)$ на лицевой поверхности $z=1$ пластины в направлении координаты x_2 в зависимости от изменения параметров z_0 и δ_*. Расчеты выполнялись для пластины из неферромагнитного материала ($\mu_* = 1$) при $\delta_* = 0,1$ и $z_0 = 2;\ 3$ (соответственно кривые *1* и *2*).

Переходя теперь к определению температурного поля в пластине, примем, что на ее поверхностях $z=\pm 1$ имеет место конвективный теплообмен с внешней средой. Температура внешней среды считается постоянной и равной начальной температуре пластины. Тогда искомое температурное поле $T=T(x_2,\ z,\ \tau)$ определяется из решения задачи теплопроводности [3]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial}{\partial\tau}\right)T = -Q_0, \tag{8}$$

$$T|_{\tau=0}=0,\ \left(\frac{\partial}{\partial z}\pm \mathrm{Bi}^{\pm}\right)T|_{z=\pm 1}=0, \tag{9}$$

где $Q_0=\frac{h^2}{\lambda}Q$; $\tau=\frac{a}{h^2}t$ — критерий Фурье; t — время; λ, a — коэффициенты тепло- и температуропроводности; $\mathrm{Bi}^{\pm}=hH^{\pm}$ — критерии Био; $H^{\pm}$ — коэффициенты теплоотдачи с поверхностей $z=\pm 1$.

Для решения задачи (8), (9) последовательно применим конечное интегральное преобразование по толщинной координате z [1] и преобразование Фурье по переменной x_2. В результате приходим к довольно громоздкому решению в квадратурах, вычисление несобственных интегралов в котором удается произвести только для стационарного случая $(\tau\to\infty)$. С целью упрощения расчетных формул температуры, и как следствие напряжений, используем то обстоятельство, что характер распределения джоулевых тепловыделений на поверхности пластины с уменьшением значений параметров δ^* и z_0 приближается к гауссовому распределению (см. рис. 1). Поэтому, аппроксимируя поверхностное значение джоулева тепла экспоненциальной функцией вида

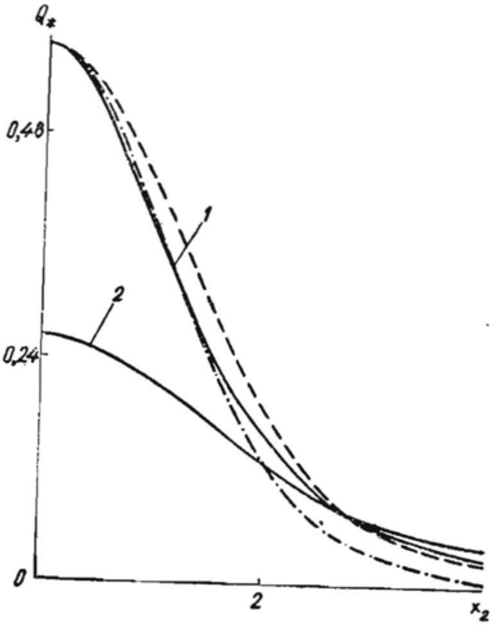

Рис. 1.

$$P(x_2)=\frac{j_0^2}{4\sigma\delta_*^2}Ae^{-x_2^2/b^2}, \tag{10}$$

получим такое решение задачи теплопроводности (8), (9):

$$T=t_*K\sum_{m=1}^{\infty}\Phi_m(z)F_m(x_2,\ \tau), \tag{11}$$

где

$$t_*=\frac{j_0^2h^2}{\sigma\lambda};\ K=\frac{\sqrt{\pi}Ab}{16\delta_*};\ \Phi_m(z)=\mathrm{Bi}^-\sin\beta_m(1+z)+\beta_m\cos\beta_m(1+z);$$

$$F_m(x_2,\ \tau)=\frac{P_m}{\beta_m\|\Phi_m\|^2}[\Lambda(x_2,\ b,\ \beta_m)-$$

$$-\Lambda(x_2,\ \sqrt{b^2+4\tau},\ \beta_m)]\,e^{(b\beta_m/2)^2};\ P_m=\frac{\varphi_m+\delta_*\beta_m\psi_m}{1+\delta_*^2\beta_m^2};$$

$$\varphi_m=\beta_m\cos 2\beta_m+\mathrm{Bi}^-\sin 2\beta_m;\ \psi_m=\beta_m\sin 2\beta_m-\mathrm{Bi}^-\cos 2\beta_m;$$

$$\|\Phi_m\|^2=\beta_m^2+(\mathrm{Bi}^-)^2+\frac{1}{2}\left[\mathrm{Bi}^-+\mathrm{Bi}^+\frac{\beta_m^2+(\mathrm{Bi}^-)^2}{\beta_m^2+(\mathrm{Bi}^+)^2}\right];$$

$$\Lambda(x,\ \alpha,\ \beta)=e^{\beta x}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\alpha\beta}{2}+\frac{x}{\alpha}\right)+e^{-\beta x}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\alpha\beta}{2}-\frac{x}{\alpha}\right);$$

β_m — неотрицательные корни уравнения $(\beta^2-\mathrm{Bi}^+\mathrm{Bi}^-)\,\mathrm{tg}\,2\beta=(\mathrm{Bi}^++\mathrm{Bi}^-)\,\beta$. При этом фигурирующие в выражении (10) константы A и b определяются следующим образом. Константа A — из соотношения

$$A=\frac{4\sigma\delta_*^2}{j_0^2}Q(x_2=0,\ z=1), \tag{12}$$

а константа b — из условия совпадения суммарных по координате x_2 тепловыделений в пластине для исходного распределения и полученного на основании аппроксимации, т. е. условия

$$\int_0^{x_0} Q(x_2,\ z=1)\,dx_2 = \int_0^{x_0} P(x_2)\,dx_2. \tag{13}$$

Отметим, что величина верхнего предела интегрирования x_0, вообще говоря, должна быть равна бесконечности, но так как основная часть джоулевых тепловыделений сосредоточена в зоне близкой к сечению $x_2=0$, то значение параметра x_0 практически можно определять с помощью соотношения

$$Q(x_2=x_0,\ z=1) = \alpha_* Q(x_2=0,\ z=1), \tag{14}$$

где α_* — заданная величина отклонения значения функции $Q(x_2,\ z=1)$ в точке $x_2=x_0$ от ее максимального значения.

В частности, для $\alpha_*=1/e=0{,}368$ и $\delta_*=0{,}1$ из соотношения (14) имеем $x_0=0{,}847z_0$ и соответственно из условия (13) — $b=0{,}802z_0$. Если же $x_0\to\infty$, то для того же значения $\delta_*=0{,}1$ получаем $b=0{,}934z_0$.

На рис. 1 для сравнения нанесены графики аппроксимирующей функции $P(x_2)$, соответствующие значениям константы b, вычисленным при $x_0\to\infty$ (штриховая линия) и $x_0=0{,}847\ z_0$ (штрих-пунктирная линия). Как видно, лучшее приближение в основной части зоны нагрева дает аппроксимация при x_0, определяемом на основании соотношения (14).

Проведенное также численное сравнение значений температуры, полученных на основании формулы (11) для случая $\tau\to\infty$, со значениями стационарного температурного поля, найденного исходя из джоулевых тепловых источников (7), показало, что при этом погрешность не превышает погрешности приближения исходного выражения джоулева тепла функцией (10).

Температурные напряжения в пластине найдем для случая, когда краевые сечения $x_1=x_1^{\pm}\to\pm\infty$ жестко защемлены, а $x_2=x_2^{\pm}\to\pm\infty$ свободны от внешних усилий. Тогда пластина находится в условиях плоской деформации, и, согласно [2], для отличных от нуля компонент напряжений имеем

$$\sigma_{11}=\nu\sigma_{22}-\alpha_T ET,\quad \sigma_{22}=\frac{\alpha_T E}{1-\nu}(T_1+zT_2-T). \tag{15}$$

Здесь α_T — коэффициент линейного теплового расширения; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости; $T_1=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}Tdz$, $T_2=\frac{3}{2}\times$ $\times\int_{-1}^{1}zTdz$ — характеристики усреднения температурного поля.

Интегрируя в соответствии с определением T_1 и T_2 выражение температурного поля (11), соотношения (15) запишем окончательно в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{11}&=\frac{\sigma_*}{1-\nu}K\sum_{m=1}^{\infty}[\nu(\Phi_{1m}+z\Phi_{2m})-\Phi_m(z)]F_m(x_2,\ \tau),\\ \sigma_{22}&=\frac{\sigma_*}{1-\nu}K\sum_{m=1}^{\infty}[\Phi_{1m}+z\Phi_{2m}-\Phi_m(z)]F_m(x_2,\ \tau),\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\sigma_*=\alpha_T Et_*;\quad \Phi_{1m}=\frac{1}{2\beta_m}[\varphi_m\sin 2\beta_m+\psi_m(1-\cos 2\beta_m)];$$

$$\Phi_{2m}=\frac{3}{2\beta_m^2}\{\varphi_m(1-\beta_m\sin 2\beta_m-\cos 2\beta_m)+\psi_m[\beta_m(1+\cos 2\beta_m)-\sin 2\beta_m]\}$$

На рис. 2—5 проиллюстрированы результаты численных исследований напряжений $\overset{\bullet}{\sigma}_{ji}=\sigma_{ij}/\sigma_*$ $(j=1,\ 2)$ в пластине из материала Ст Х18Н9Т для моментов времени $t=0{,}1;\ 0{,}5;\ 2;\ 10;\ 60$ с (сооответственно кривые *1—5*). При этом на рис. 2 и 3 приведены графики изменения напряжений σ_{ij}^{*} на лицевой поверхности пластины по координате x_2, а на рис. 4 и 5 — в сечении $x_2 = 0$ по толщине пластины. Расчеты выполнялись при значениях параметров $\delta_* = 0,1$ и $z_0 = 2$, а также константы $b = 0,802z_0$. Коэффициенты теплоотдачи с поверхностей пластины принимались $\mathrm{Bi}^+ = \mathrm{Bi}^- = \mathrm{Bi} = 0,1$; 1 (соответственно сплошные и штриховые линии).

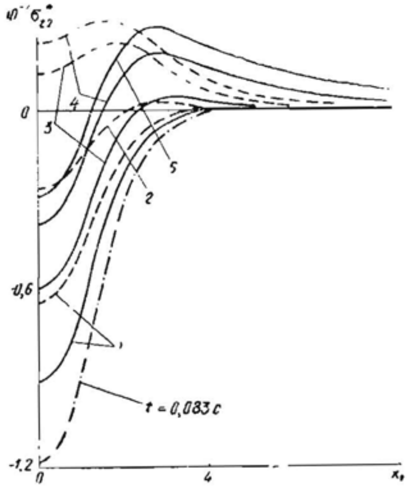

Рис. 2.

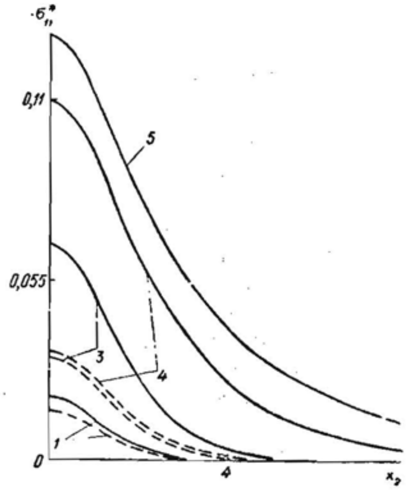

Рис. 3.

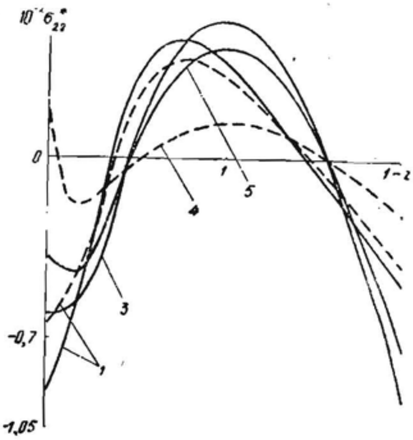

Рис. 4.

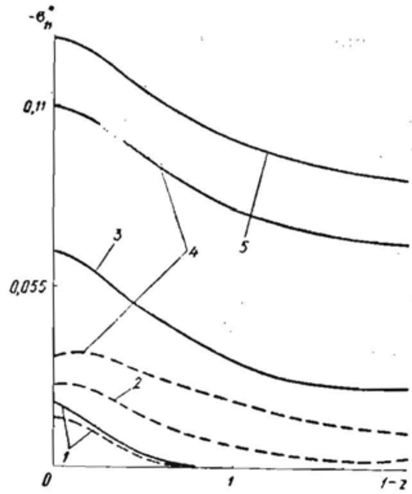

Рис. 5.

1. *Галицын А. С., Жуковский А. Н.* Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности.— Киев : Наук. думка, 1976.— 282 с.
2. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. — Киев : Наук. думка, 1970.—307 с.
3. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В.* Термоупругость электропроводных тел. — Киев : Наук. думка, 1977.—248 с.
4. *Тозони О. В., Маергойз И. Д.* Расчет трехмерных электромагнитных полей. — Киев : Техніка, 1974.—352 с.
5. *Чорный Б. И.* Асимптотическое представление решения уравнений электродинамики приповерхностного индукционного нагрева электропроводных оболочек. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 9, с. 83—86.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 04.01.84