

$$\times \exp\left(-\frac{cl^2 - 4\lambda_1^2}{b^2 l^2} t\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4\lambda_n^2}{b^2 l^2} x_{ni}(x) e^{-\frac{cl^2 + 4\lambda_n^2}{b^2 l^2} t}, \quad (16)$$

$$U_{2i}(x, t) = \frac{12 \cdot (-1)^{i-1}}{\gamma_1 \gamma_2 b^2 l^2} \left[ a_{3-i}(l-2x) + \gamma_{3-i} \left( \frac{x}{l} - 2 + i \right) \right] \times \\ \times \exp\left(-\frac{c}{b^2} t\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4\lambda_n^2}{b^2 l^2} x_{ni}(x) e^{-\frac{cl^2 + 4\lambda_n^2}{b^2 l^2} t}, \quad (16a)$$

$$U_{2i}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4\lambda_n^2}{b^2 l^2} x_{ni}(x) e^{-\frac{cl^2 + 4\lambda_n^2}{b^2 l^2} t}, \quad (16b)$$

где

$$x_{ni}(x) = \frac{a_{3-i} l \left( \cos 2\lambda_n \frac{x}{l} - \cos 2\lambda_n \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \right) + 2\lambda_n \gamma_{3-i} \sin 2\lambda_n \left( \frac{x}{l} - 2 + i \right)}{\lambda_n \gamma_1 \gamma_2 (2\lambda_n \cos 2\lambda_n - \sin 2\lambda_n) + (\gamma_1 a_2 + \gamma_2 a_1) (\lambda_n \sin 2\lambda_n + \cos 2\lambda_n - 1) l}.$$

Легко видеть, что как в классическом случае, так и в случае интегральных ограничений непрерывная зависимость решения задачи от исходных данных определяется значением коэффициента  $c$ . В случае  $cl^2 < -\pi^2 n^2$  либо  $cl^2 < -\lambda_n^2$  для некоторого значения  $n \in N$  решение указанных задач не будет непрерывно зависимым от исходных данных. Кроме того, следует отметить специфическое влияние неклассических граничных условий (4). Как видно из (13) или (16), при некотором выборе параметров  $\gamma_i$  и  $a_i$  выполнено условие  $cl^2 < \lambda_1^2$ , что приводит к нарушению непрерывной зависимости решения задачи (1)–(4) (либо (1), (2), (4)) от исходных данных, тогда как соответствующая классическая задача является поставленной вполне корректно.

1. Вигак В. М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. — Киев: Наук. думка, 1979.—360 с.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.—512 с.
3. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. — Дифференц. уравнения, 1977, 13, № 2, с. 294—304.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз, 1958.—678 с.
5. Мельник З. О. Задача с интегральными ограничениями для гиперболического уравнения второго порядка. — В кн.: Общая теория граничных задач: Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1983, с. 281—282.
6. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. — Киев: Наук. думка, 1976.—312 с.

Львовский государственный  
ун-т им. Ив. Франко

Получено 25.04.84

УДК 536.12

А. Н. Горечко

**НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ  
ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА  
ПРИ ПЕРЕМЕННОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛОТДАЧИ**

Инженерная практика предъявляет повышенный интерес к расчету температурных напряжений и полей в упругих элементах конструкций при переменных коэффициентах теплоотдачи. В работе [6] рассмотрены задачи теплопроводности и термоупругости для тонкостенных элементов конструкций. Задачи теплопроводности для массивных тел при коэф-

фициенте теплоотдачи, зависящем от пространственных координат, рассмотрены в работах [3—5].

Настоящая статья посвящена решению нестационарной задачи теплопроводности для массивного цилиндрического тела при переменном коэффициенте теплоотдачи внешней поверхности.

Пусть цилиндрическое тело занимает область  $R_1 < r < R_2$ ,  $|z| < H$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  цилиндрической системы координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ , ось  $z$  которой совпадает с осью симметрии рассматриваемого тела. Предположим, что внутренняя и торцевые поверхности теплоизолированы, а по внешней осуществляется теплообмен с внешней средой по закону Ньютона при коэффициенте теплоотдачи  $\alpha_t$ , зависящем от координаты  $\varphi$ . Задача определения температурного поля в теле состоит в решении уравнения теплопроводности

$$\rho^{-1} \partial_\rho (\rho \partial_\rho \theta) + \rho^{-2} \partial_\varphi^2 \theta + \partial_z^2 \theta = \partial_\tau \theta \quad (1)$$

при нулевом начальном и граничных условиях

$$\partial_\rho \theta|_{\rho=\rho_0} = 0, \quad \partial_\tau \theta|_{\tau=\pm\delta} = 0, \quad [\partial_\rho \theta + \text{Vi}(\varphi) \theta]|_{\rho=1} = f(\varphi, \gamma, \tau). \quad (2)$$

В соотношениях (1), (2) приняты следующие обозначения:  $\theta = T/T_0$  — безразмерная температура;  $\partial_x \equiv \partial/\partial x$ ;  $\rho = r/R_2$ ;  $\gamma = z/R_2$ ;  $\rho_0 = R_1/R_2$ ;  $\delta = H/R_2$ ;  $\text{Vi}(\varphi) = \alpha_t R_2 / \lambda$ ;  $f(\varphi, \gamma, \tau) = \text{Vi}(\varphi) T_c(\varphi, \gamma, \tau) / T_0$ ;  $T_c = T_0 F(\varphi, \gamma, \tau)$  — температура внешней среды.

Предположим, что функция  $f(\varphi, \gamma, \tau)$  — четная по  $\gamma$ . Искомое решение представим в виде ряда Фурье

$$\theta(\rho, \varphi, \gamma, \tau) = \sum_{q=0}^{\infty} \theta^q(\rho, \varphi, \tau) \cos \frac{\pi q \gamma}{\delta},$$

а затем применим интегральное преобразование Лагерра [1] по временной переменной, определяемое соотношениями

$$g_n = \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-x\tau} L_n(\tau) d\tau, \quad g(\tau) = e^{(x-1)\tau} \sum_{n=0}^{\infty} g_n L_n(\tau) \quad (0 < x \leq 1). \quad (3)$$

Тогда из (1), (2) придем к задаче

$$\begin{aligned} \rho^{-1} \partial_\rho (\rho \partial_\rho \theta_n^q) + \rho^{-2} \partial_\varphi^2 \theta_n^q - (x + q^2) \theta_n^q &= \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i^q, \\ \partial_\rho \theta_n^q|_{\rho=\rho_0} &= 0, \quad [\partial_\rho \theta_n^q + \text{Vi}(\varphi) \theta_n^q]|_{\rho=1} = f_n^q(\varphi), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $f_n^q(\varphi)$  — коэффициенты разложения функции  $f(\varphi, \gamma, \tau)$  в ряд Фурье по  $\gamma$ , преобразованные по Лагерру.

Решение задачи (4) ищем в виде ряда Фурье по  $\varphi$ . В предположении четности функций  $\text{Vi}(\varphi)$  и  $f_n^q(\varphi)$  решение  $\theta_n^q$  — также четная функция  $\varphi$ , следовательно, достаточно представить эти функции рядами по четным гармоникам  $\cos m\varphi$  с коэффициентами  $b_m$ ,  $f_n^{qm}$ ,  $\theta_n^{qm}$ . В силу тождества

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos m\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \theta_n^{qm} \cos m\varphi &= \\ = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \sum_{j=0}^{\infty} (b_m \delta_{j0} + b_0 \delta_{jm} + b_{|m-j|} + b_{m+j}) \theta_n^{qj} \cos m\varphi, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_m = 1 - 1/2\delta_{0m}$ ;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера; для определения функций  $\theta_n^{qm}(\rho)$  из (4) придем к задаче

$$\rho^{-1} d_\rho (\rho d_\rho \theta_n^{qm}) - (x + q^2 + m^2 \rho^{-2}) \theta_n^{qm} = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i^{qm}; \quad (5)$$

$$d_\rho \theta_n^{qm}|_{\rho=\rho_0} = 0; \quad \left( d_\rho \theta_n^{qm} + \sum_{i=0}^{\infty} e_{mi} \theta_n^{qi} \right) \Big|_{\rho=1} = f_n^{qm}, \quad (6)$$

где

$$e_{mj} = 1/2\varepsilon_m (b_m\delta_{j0} + b_0\delta_{jm} + b_{|m-j|} + b_{m+j}). \quad (7)$$

Общее решение треугольной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5) имеет вид [2]

$$\theta_n^{qm}(\rho) = \sum_{i=0}^n [C_{n-1}^{qm} TI_{mi}(x+q^2, \rho) + D_{n-i}^{qm} TK_{mi}(x+q^2, \rho)], \quad (8)$$

где

$$TI_{mn}(\eta, \rho) = I_m^{-1} \left( \sqrt{\frac{1}{\eta}} \right) \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \binom{n}{j} \left( \frac{\rho}{2\sqrt{\eta}} \right)^j I_{m-j} \left( \frac{\rho}{\sqrt{\eta}} \right);$$

$$TK_{mn}(\eta, \rho) = K_m^{-1} \left( \sqrt{\frac{1}{\eta}} \right) \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \binom{n}{j} \left( \frac{-\rho}{2\sqrt{\eta}} \right)^j K_{m-j} \left( \frac{\rho}{\sqrt{\eta}} \right);$$

$C_n^{qm}$  и  $D_n^{qm}$  — произвольные постоянные;  $I_m(x)$  и  $K_m(x)$  — модифицированные цилиндрические функции. Подстановка общего решения (8) в граничные условия (6) приводит к последовательности линейных алгебраических уравнений, представимой в виде

$$A_{(0)} \bar{x}_n = \bar{f}_n - \sum_{i=0}^{n-1} A_{(n-i)} \bar{x}_i, \quad (9)$$

где ненулевые компоненты матриц  $A_{(n)}$  и векторов  $\bar{f}_n$ ,  $\bar{x}_n$  определяются соотношениями

$$a_{2m, 2m}^{(n)} = TI'_{mn}(x+q^2, \rho_0), \quad a_{2m, 2m+1}^{(n)} = TK'_{mn}(x+q^2, \rho_0),$$

$$a_{2m+1, 2i}^{(n)} = e_{mi} TI'_{mi}(x+q^2, 1) + \delta_{mi} TI'_{mi}(x+q^2, 1),$$

$$a_{2m+1, 2i+1}^{(n)} = e_{mi} TK'_{mi}(x+q^2, 1) + \delta_{mi} TK'_{mi}(x+q^2, 1),$$

$$f_{2m+1}^{(n)} = f_n^{qm}, \quad x_{2m}^{(n)} = C_n^{qm}, \quad x_{2m+1}^{(n)} = D_n^{qm} \quad (m, i \geq 0),$$

штрих означает производную по второму аргументу. Определив из последовательности линейных алгебраических систем (9) постоянные  $C_n^{qm}$  и  $D_n^{qm}$ , приходим к искомому решению в виде ряда

$$\theta(\rho, \varphi, \gamma, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \theta_n^{qm}(\rho) \cos \frac{\pi q \gamma}{\delta} \cos m\varphi e^{(x-1)\tau} L_n(\tau), \quad (10)$$

где  $\theta_n^{qm}(\rho)$  определены соотношением (8).

Из решения (10) заменой суммирования по  $q$  интегралом Фурье получим решение для цилиндрического слоя бесконечной длины. Если температура внешней по отношению к цилиндрическому слою среды не зависит от координаты  $\gamma$ , то из (10) приходим к решению двумерной задачи теплопроводности. В этом случае в решении (10) достаточно положить  $\theta_n^{qm} \equiv 0$  при  $q \geq 1$ , а константы  $C_n^{0m}$  и  $D_n^{0m}$  определяются из системы (9) при  $q = 0$ . В случае сплошного цилиндра в соотношении (8) следует положить  $D_n^{qm} \equiv 0$ , а в системе (9) ненулевые компоненты матриц  $A_{(n)}$  и векторов  $\bar{f}_n$ ,  $\bar{x}_n$  имеют вид

$$a_{mi}^{(n)} = e_{mi} TI'_{mi}(x+q^2, 1) + \delta_{mi} TI'_{mi}(x+q^2, 1),$$

$$f_m^{(n)} = f_n^{qm}, \quad x_m^{(n)} = C_n^{qm} \quad (m, i \geq 0). \quad (11)$$

Отметим, что если функция  $Vi(\varphi)$  представляется конечной суммой Фурье из  $M$  слагаемых, то вследствие (7) матрицы  $A_{(n)}$  имеют ленточную структуру с шириной ленты  $2M - 1$ . Это позволяет эффективно решать системы (9).

Рассмотрим частный случай бесконечного сплошного цилиндра с коэффициентом теплоотдачи  $Vi(\varphi) = Vi_0(1 + \beta \cos \varphi)$  при мгновенном

повышении температуры внешней среды до  $T_0$ , т. е.  $f(\varphi, \gamma, \tau) = \text{Bi}(\varphi) H(\tau)$ , где  $H(\tau)$  — функция Хевисайда. В этом случае матрицы  $A_{(n)}$  — трехдиагональны с ненулевыми элементами (11), где

$$e_{10} = 3\text{Bi}_0\beta/2; \quad e_{ii} = \text{Bi}_0; \quad e_{i, i+1} = e_{i+2, i+1} = \text{Bi}_0\beta/2 \quad (i = 0, 1, \dots).$$

Поскольку температура внешней среды не зависит от координат, то анализ температурного поля цилиндра для рассматриваемого частного случая позволяет выяснить влияние непостоянства коэффициента теплоотдачи на изменение температуры в переходном процессе.

Результаты вычислений представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1 приведены графики изменения температуры во времени на внешней поверхности цилиндра ( $\rho=1$ ) и внутри его (при  $\rho=0,2$ ) при трех значениях

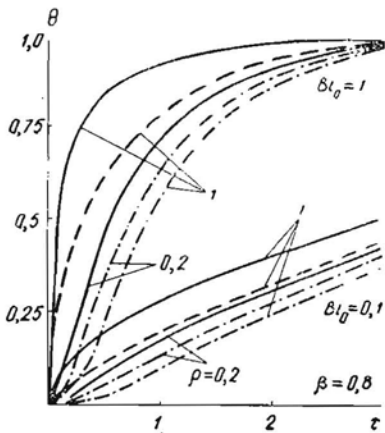


Рис. 1.

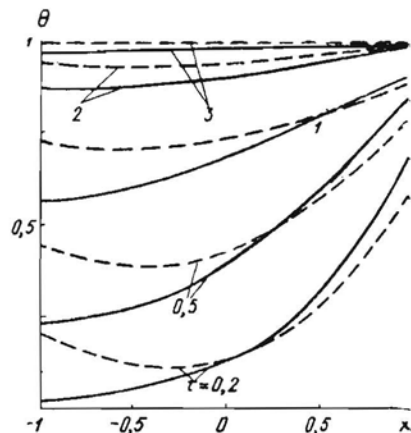


Рис. 2.

угла  $\varphi$ , а именно:  $\varphi=0$  — сплошные кривые,  $\varphi=\pi/2$  — штриховые,  $\varphi=\pi$  — штрихпунктирные. На рис. 2 приведены графики изменения температурного поля в плоскости  $y=0$  ( $x=\rho \cos \varphi$ ,  $y=\rho \sin \varphi$ ) в моменты времени  $\tau=0,2; 0,5; 1; 2; 3$  при фиксированном  $\text{Bi}_0=1$  и двух значениях  $\beta$ , а именно:  $\beta=0,8$  — сплошные кривые,  $\beta=0,5$  — штриховые. Из приведенных результатов следует, что, как и в осесимметричном случае, скорость выхода температуры на стационарное значение возрастает с ростом коэффициента теплоотдачи и зависит в рассматриваемом случае от угла  $\varphi$ . В отличие от осесимметричной задачи в данном случае минимум температуры в любой момент времени смещен по отношению к оси цилиндра и перемещается со временем. При больших  $\beta$  в переходном процессе минимальная температура может достигаться на границе. Расчеты показывают, что при  $\beta \leq 0,1$  температурное поле в переходном процессе отличается от поля в осесимметричном случае ( $\beta=0$ ) не более чем на 5%.

1. Галазюк В. А., Горечко А. Н. Об одном методе решения динамических задач теории упругости в сферических и цилиндрических координатах. — Докл. АН УССР, Сер. А, 1980, № 6, с. 41—44.
2. Галазюк В. А., Горечко А. Н. Исследование нестационарных волновых процессов в вязкой сжимаемой жидкости методом полиномов Чебышева — Лагерра. — Там же, 1981, № 5, с. 31—35.
3. Грицько Е. Г., Гудзь Р. В. Температурное поле полубесконечного цилиндра при зависящем от радиальной координаты коэффициенте теплоотдачи. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1983, вып. 17, с. 82—85.
4. Коляно Ю. М., Грицько Е. Г. Пространственная задача теплопроводности цилиндрических тел при локальном изменении коэффициента теплоотдачи. — Там же, 1981, вып. 13, с. 85—88.
5. Коляно Ю. М., Грицько Е. Г. Об одном методе определения температурных полей тел при локальном изменении коэффициента теплоотдачи. — Там же, 1982, вып. 15, с. 74—77.

УДК 539.377

И. И. Верба

**МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПЛАСТИНКИ С ВЫРЕЗОМ, НАГРЕВАЕМОЙ ПУТЕМ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА**

Рассмотрим изотропную неограниченную пластинку толщины  $2\delta$  с прямоугольным вырезом  $|x_i| \leq a_i$  ( $i=1, 2$ ). Через боковые поверхности пластинки  $x_3 = \pm\delta$  и прямоугольную границу пластинки осуществляется теплообмен с внешней средой в соответствии с законом Ньютона. Предположим, что температура среды, омывающей поверхности  $x_3 = \pm\delta$ , равна нулю, а температура среды, омывающей прямоугольную границу пластинки, равна  $t_c$ .

Тогда для определения стационарного температурного поля в пластинке имеем такую граничную задачу [5]:

$$\Delta T - \kappa^2 T = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} M(x_{i\pm 1}) = \pm h_i (T - t_c) M(x_{i\pm 1}) \text{ при } x_i = \pm a_i, \quad (2)$$

$$T|_{(x_1, x_2) \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_i} \Big|_{(x_1, x_2) \rightarrow \infty} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  — оператор Лапласа;  $\kappa^2 = \frac{\alpha}{\lambda\delta}$ ;  $h_i = \frac{\alpha_{x_i}}{\lambda}$ ;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $\alpha$  и  $\alpha_{x_i}$  — коэффициенты теплоотдачи с поверхностями  $x_3 = \pm\delta$  и  $|x_i| < a_i$ ;  $x_{i\pm 1} = a_{i\pm 1}$ ;  $M(x_i) = S_+(x_i + a_i) - S_-(x_i - a_i)$ ;

$$S_{\pm}(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0,5 \mp 0,5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0; \end{cases} \quad i \pm 1 = \begin{cases} 1, & i = 2, \\ 2, & i = 1. \end{cases}$$

Для решения задачи (1) — (3) используем метод продолжения функций [2]. Для этого введем функцию

$$\Theta = TM(x_1, x_2), \quad (4)$$

где  $M(x_1, x_2) = 1 - M(x_1)M(x_2)$ .

Вычислим первую и вторую производные этой функции, учитывая граничные условия (2) и симметрию задачи относительно осей координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} &= \frac{\partial T}{\partial x_i} M(x_1, x_2) - T|_{x_i=a_i+0} M(x_{i\pm 1}) [\delta_+(x_i + a_i) - \delta_-(x_i - a_i)], \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} M(x_1, x_2) + h_i (T|_{x_i=a_i+0} - t_c) M(x_{i\pm 1}) [\delta_+(x_i + a_i) + \\ &+ \delta_-(x_i - a_i)] - T|_{x_i=a_i+0} M(x_{i\pm 1}) [\delta'_+(x_i + a_i) - \delta'_-(x_i - a_i)] \\ &(i = 1, 2), \end{aligned} \quad (5)$$

где [4]  $\delta_{\pm}(\zeta) = \frac{dS_{\pm}(\zeta)}{d\zeta}$ ;  $\delta'_{\pm}(\zeta) = \frac{d\delta_{\pm}(\zeta)}{d\zeta}$ .

Умножив каждый член уравнения (1) на функцию  $M(x_1, x_2)$  и учитывая равенства (4) и (5), для функции  $\Theta(x_1, x_2)$  получим такое уравнение с сингулярными коэффициентами: