

О ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗКИ ОТ ДЕФОРМИРУЕМОЙ НАКЛАДКИ К СОСТАВНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С МЕЖФАЗНЫМИ ТРЕЩИНАМИ*

Рассмотрено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной полуплоскости, состоящей из разнородных бесконечной полосы и полуплоскости с межфазными конечными трещинами, когда полуплоскость деформируется при помощи конечной деформируемой накладки, действующей на свободной границе полуплоскости. Получена ключевая система интегральных и интегро-дифференциальных уравнений относительно дислокации смещений точек берегов трещины и касательных контактных напряжений, действующих под накладкой. Решение системы ключевых уравнений построено численно-аналитическим методом механических квадратур. Проведён численный анализ, изучены закономерности изменения контактных напряжений и выявлены особенности изменения J -интеграла Черепанова – Райса в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик задачи.

Ключевые слова: контактная задача, межфазная трещина, тонкая накладка.

Введение. Исследование напряженно-деформированного состояния однородных и составных упругих массивных тел, содержащих одновременно концентраторы напряжений различных типов, выявление особенностей распределения напряжений вблизи этих концентраторов и закономерностей их взаимовлияния были и остаются актуальной проблемой как с теоретической, так и с практической точек зрения. В [1, 4, 5, 7, 8] получены замкнутые эффективные решения ряда практически важных задач и подытожены некоторые основные результаты в этой области. Укажем также работы [2, 6, 9], где изучено напряженно-деформированное состояние кусочно-однородной полуплоскости, изготовленной при помощи соединения бесконечной полосы и полуплоскости из различных материалов, которая на стыке различных материалов содержит концентраторы напряжения типа трещин и абсолютно жёстких, полностью или частично сцеплённых с матрицей включений. Особо отметим работу [10], в которой исследовано взаимовлияние межфазной трещины в кусочно-однородной полуплоскости с абсолютно жёстким штампом с плоским основанием, действующем на свободной границе полуплоскости, и выявлены особенности изменения J -интеграла Черепанова – Райса и раскрытие трещины в зависимости от месторасположения трещины и штампа, а также от соотношения упругих характеристик полосы и полуплоскости. Результаты вышеуказанной работы свидетельствуют о том, что на раскрытие трещины и на величину J -интеграла Черепанова – Райса большое влияние оказывают касательные контактные напряжения под штампом.

Для более глубокого изучения этого вопроса здесь рассматривается задача о передаче нагрузки от деформируемой тонкой накладкой, моделируемой одномерным упругим континуумом, к кусочно-однородной полуплоскости с межфазными трещинами.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений. Пусть кусочно-однородная полуплоскость, состоящая из бесконечной упругой полосы толщины h и упругой полуплоскости с модулями упругости и коэффициентами Пуассона соответственно E_1, ν_1 и E_2, ν_2 , отнесена к декартовой системе координат Oxy , ось Ox которой направлена по линии

[✉] vhakobyan@sci.am

* Рекомендовано в печать Программным комитетом 10-й Международной научной конференции «Математические проблемы механики неоднородных структур» (17–20 сентября 2019 г., Львов, Украина, <http://iapmm.lviv.ua/mpmns2019>)

стыка полосы и полуплоскости. Пусть составная полуплоскость находится в плоско-деформированном состоянии. При этом полагается, что на линии соединения полосы и полуплоскости, по линии L , состоящей из конечного числа непересекающихся отрезков (a_k, b_k) , $k = 1, 2, \dots, N$, составная полуплоскость ослаблена межфазными трещинами, а на участке L_1 свободной границы полосы $y = h$ усилена упругой тонкой накладкой толщиной h_s с приведённым модулем деформаций E_s . Считается, что составная полуплоскость деформируется под воздействием одинаковых нормальных распределённых нагрузок интенсивности $p_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, N$, действующих на берега трещин, и сосредоточенной горизонтальной нагрузки величины T_0 , приложенной к накладке в точке $x_0 \in L_1$.

Требуется определить контактные напряжения под накладкой, значения J -интеграла Черепанова – Райса в концевых точках трещин, а также раскрытие трещин, и изучить закономерности изменения этих величин в зависимости от физических и геометрических характеристик поставленной задачи.

Краевые и контактные условия задачи теории упругости сформулируем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{du_1(x, h)}{dx} &= \varepsilon_s(x), \quad x \in L_1, \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, h) &= 0, \quad x \notin L_1, \quad \sigma_y^{(1)}(x, h) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ \sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \sigma_y^{(2)}(x, 0), \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0), \\ u_1(x, 0) &= u_2(x, 0), \quad v_1(x, 0) = v_2(x, 0), \quad x \notin L, \\ \sigma_y^{(1)}(x, 0) + \sigma_y^{(2)}(x, 0) &= 2p_k(x), \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) + \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = 0, \\ a_k < x < b_k, \quad k &= 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\sigma_x^{(j)}(x, y)$, $\sigma_y^{(j)}(x, y)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$ – соответственно нормальные и касательные компоненты напряжений полосы и полуплоскости, $u_j(x, y)$ и $v_j(x, y)$ – горизонтальные и вертикальные смещения точек полосы и полуплоскости, $\varepsilon_s(x)$ – осевые деформации включений, $j = 1, 2$.

Прежде чем перейти к решению поставленной задачи, построим решения уравнений Ламе для полуплоскости, сложенной из полосы толщины h с коэффициентами упругости E_1 , ν_1 и полуплоскости с коэффициентами упругости E_2 , ν_2 , на линии $y = 0$ сопряжения которых по участку L расположены трещины, приводящие к разрывам смещений. При этом будем полагать, что на линии $y = h$ заданы нормальные и касательные напряжения $P(x)$ и $\tau(x)$. Введём функции скачков смещений по формулам

$$u_1(x, 0) - u_2(x, 0) = U(x), \quad v_1(x, 0) - v_2(x, 0) = V(x), \quad x \in L, \quad (4)$$

и построим при помощи интегрального преобразования Фурье разрывные решения для составной полуплоскости, считая, что

$$\sigma_y^{(1)}(x, h) = \begin{cases} -P(x), & x \in L_1, \\ 0 & x \notin L_1, \end{cases} \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, h) = \begin{cases} -\tau(x), & x \in L_1, \\ 0, & x \notin L_1. \end{cases} \quad (5)$$

Вводя обозначения

$$\mathbf{J}_{\ell,k}^{(j)}(s) = \begin{pmatrix} \ell \operatorname{ch} s - \theta_j^- s \operatorname{sh} s & \theta_j^- s \operatorname{ch} s + (\theta_j + k) \operatorname{sh} s \\ -\theta_j^- s \operatorname{ch} s + (\theta_j + k) \operatorname{sh} s & \ell \operatorname{ch} s + \theta_j^- s \operatorname{sh} s \end{pmatrix},$$

$$\theta_j = \frac{1 - 2\nu_j}{2(1 - \nu_j)}, \quad \theta_j^- = 1 - \theta_j, \quad \theta_j^+ = 1 + \theta_j,$$

$$\mathbf{M}^{(j)}(s) = \{M_{\ell,k}^{(j)}\}_{\ell,k=1,\dots,4} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{1,0}^{(j)}(s) & -\mathbf{J}_{0,-1}^{(j)}(s) \\ \mathbf{J}_{0,1}^{(j)}(s) & -\mathbf{J}_{-1,0}^{(j)}(s) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2,$$

представим в общем случае решения уравнений Ламе в виде следующих интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} u_j(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \operatorname{sgn} s \sum_{k=1}^4 M_{3,k}^{(j)}(|s|y) A_k^{(j)}(s) \exp(-isx) ds, \\ v_j(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^4 M_{4,k}^{(j)}(|s|y) A_k^{(j)}(s) \exp(-isx) ds, \quad i^2 = -1. \end{aligned} \quad (6)$$

Компоненты напряжений при этом можем записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(j)}(x, y) &= \frac{\mu_j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |s| \sum_{k=1}^4 M_{1,k}^{(j)}(|s|y) A_k^{(j)}(s) \exp(-isx) ds, \\ \tau_{xy}^{(j)}(x, y) &= \frac{\mu_j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} is \sum_{k=1}^4 M_{2,k}^{(j)}(|s|y) A_k^{(j)}(s) \exp(-isx) ds. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда на линии $y = 0$ получим равенства

$$\begin{aligned} u_j(x, 0) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_3^{(j)}(s) \exp(-isx) \operatorname{sgn} s ds, \\ v_j(x, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_4^{(j)}(s) \exp(-isx) ds, \\ \sigma_y^{(j)}(x, 0) &= \frac{\mu_j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1^{(j)}(s) \exp(-isx) |s| ds, \\ \tau_{xy}^{(j)}(x, 0) &= \frac{i\mu_j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_2^{(j)}(s) \exp(-isx) s ds. \end{aligned}$$

Учитывая, что при $y \rightarrow -\infty$ напряжения в полуплоскости стремятся к нулю, из (6), (7) следует, что

$$A_3^{(2)}(s) = \frac{1}{\theta_2^-} (-\theta_2 A_1^{(2)}(s) + A_2^{(2)}(s)), \quad A_4^{(2)}(s) = \frac{1}{\theta_2^-} (A_1^{(2)}(s) - \theta_2 A_2^{(2)}(s)).$$

А из условий (2) при $y = 0$ получим

$$\begin{aligned} A_3^{(1)}(s) &= \bar{U}(s) + A_3^{(2)}(s), \quad A_4^{(1)}(s) = \bar{V}(s) + A_4^{(2)}(s), \\ A_1^{(1)}(s) &= \frac{\mu_2}{\mu_1} A_1^{(2)}(s), \quad A_2^{(1)}(s) = \frac{\mu_2}{\mu_1} A_2^{(2)}(s), \\ \mu_j &= E_j / (2 + 2\nu_j), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Теперь удовлетворим условиям (5) на линии $y = h$. В итоге для определения функций $A_j^{(2)}(s)$, $j = 1, 2$, получим систему алгебраических уравнений, решения которой можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} g_{7,1} & g_{6,1} \\ g_{6,2} & g_{7,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{P}(s) \\ -\bar{\tau}(s) \end{pmatrix} + \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} g_{1,0} & g_{11,1} \\ g_{11,2} & g_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}(s) \\ \bar{V}(s) \end{pmatrix},$$

где

$$\Delta = \frac{\theta_1^-}{2} \left(d_0 - 2\mu^2 \frac{\theta_2^-}{\theta_1^-} + 2s^2 \theta_1^- (1 - \mu)(\mu\theta_2^- + \theta_2^+) - 2\mu \operatorname{sh}(2s) - d_0 \operatorname{ch}(2s) \right),$$

$$g_1 = s^2 (\theta_1^-)^2 (\theta_2^+ + \mu\theta_2^-) (1 - \mu) + \mu (\theta_2 \theta_1^- - \theta_1 \theta_2^- \mu), \quad \mu = \mu_2 / \mu_1,$$

$$g_{2,i} = \frac{1}{2} (1 + (-1)^i 2s + 2s^2) (2\theta_2 \mu + \mu^2 \theta_2^- - \theta_2^+) (\theta_1^-)^2 - \\ - \mu (\theta_2 \theta_1^- - \theta_1 \theta_2^- \mu) + \frac{1}{2} \theta_1^- (1 - \mu) (\theta_1^- \theta_2^+ - \mu \theta_2^- \theta_1^+) \exp(-2s),$$

$$g_{5,i} = (-(-1)^i s \theta_1^- - \theta_2^- \mu) \operatorname{ch} s - \theta_1^- (1 + (-1)^i s (\theta_2^- \mu + \theta_2)) \operatorname{sh} s,$$

$$g_{6,i} = -(-1)^i \theta_1^- (\theta_2^- \mu + \theta_2) s \operatorname{ch} s + ((-1)^{i+1} s \theta_1^- - \theta_2 \theta_1^- + \theta_1 \theta_2^- \mu) \operatorname{sh} s,$$

$$g_{7,i} = -(\mu \theta_2^- - (-1)^i s \theta_1^-) \operatorname{ch} s - \theta_1^- (1 - (-1)^i s (\theta_2 + \mu \theta_2^-)) \operatorname{sh} s,$$

$$g_{1,0} = \frac{1}{2} \theta_1^- (-1 + 2s^2) \theta_2 \theta_1^- + (\theta_1 - 2s^2 \theta_1^-) \theta_2^- \mu + (\theta_2 \theta_1^- - \theta_1 \theta_2^- \mu) \operatorname{ch}(2s),$$

$$g_{11,i} = -\frac{1}{2} \theta_1^- (\theta_1^- + 2s(s\theta_1^- + \theta_2^- \mu) - \theta_1^- \operatorname{ch}(2s) - \theta_2^- \mu \operatorname{sh}(2s)) + \\ + (1 + (-1)^i) s \theta_1^- \theta_2^- \mu,$$

$$d = (\theta_1^- + \mu \theta_1^+) (\theta_2^+ + \mu \theta_2^-), \quad \ell = 2\mu (\mu \theta_1 \theta_2^- - \theta_2 \theta_1^-),$$

$$d_0 = 2\mu \theta_1 \theta_2 + \theta_1^- \theta_2^+ + \mu^2 \theta_1^+ \theta_2^-, \quad m = -2\mu (\theta_1^- + \mu \theta_2^-).$$

Используя найденные представления функций $A_k^{(j)}(s)$, выразим напряжения и смещения полосы и полуплоскости через функции скачков смещений (4).

Нам понадобятся напряжения, действующие на берегах трещины, а также производные от горизонтальных смещений точек полосы на линии $y = h$. Для этих величин имеем

$$\frac{1}{\mu_1} \sigma_y^{(1)}(x, 0) = -\frac{\ell}{d} U'(x) - \frac{m}{\pi d} \int_L \frac{V'(s) ds}{s-x} + \int_L R_{11}(x-s) U'(s) ds + \\ + \int_L R_{12}(x-s) V'(s) ds + \int_L R_{13}(x-s) \frac{P(s)}{\mu_1} ds + \\ + \int_L R_{14}(x-s) \frac{\tau(s)}{\mu_1} ds, \\ \frac{1}{\mu_1} \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \frac{\ell}{d} V'(x) - \frac{m}{\pi d} \int_L \frac{U'(s) ds}{s-x} + \int_L R_{21}(x-s) U'(s) ds +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_L R_{22}(x-s)V'(s) ds + \int_{L_1} R_{23}(x-s) \frac{P(s)}{\mu_1} ds + \\
& + \int_{L_1} R_{24}(x-s) \frac{\tau(s)}{\mu_1} ds, \\
U_1'(x, h) = & - \frac{\theta_1}{2\theta_1^- \mu_1} P(s) - \frac{1}{2\pi\theta_1^- \mu_1} \int_{L_1} \frac{\tau(s)}{s-x} ds + \int_L R_{41}(x-s)U'(s) ds + \\
& + \int_L R_{42}(x-s)V'(s) ds + \int_{L_1} R_{43}(x-s) \frac{P(s)}{\mu_1} ds + \\
& + \int_{L_1} R_{44}(x-s) \frac{\tau(s)}{\mu_1} ds, \\
\sigma_y^{(2)}(x, 0) = & \sigma_y^{(1)}(x, 0), \quad \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(1)}(x, 0),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R_{11}(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{2\mu g_{1,0}(s)}{\Delta(s)} - \frac{\ell}{d} \right) \cos st ds, \\
R_{12}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{2\mu g_{11,1}(s)}{\Delta(s)} - \frac{m}{d} \right) \sin st ds, \\
R_{21}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{2\mu g_{11,2}(s)}{\Delta(s)} - \frac{m}{d} \right) \sin st ds, \quad R_{22}(t) = -R_{11}(t), \\
R_{13}(t) &= -\frac{\mu}{\pi} \int_0^\infty \frac{g_{7,1}(s)}{\Delta(s)} \cos st ds, \quad R_{14}(t) = -\frac{\mu}{\pi} \int_0^\infty \frac{g_{6,1}(s)}{\Delta(s)} \sin st ds, \\
R_{23}(t) &= \frac{\mu}{\pi} \int_0^\infty \frac{g_{6,2}(s)}{\Delta(s)} \sin st ds, \quad R_{24}(t) = -\frac{\mu}{\pi} \int_0^\infty \frac{g_{7,2}(s)}{\Delta(s)} \cos st ds, \\
R_{31}(t) &= \frac{\mu}{\pi} \int_0^\infty \frac{g_{6,2}(s)}{\Delta(s)} \sin st ds, \quad R_{32}(t) = \frac{\mu}{\pi} \int_0^\infty \frac{g_{5,2}(s)}{\Delta(s)} \cos st ds, \\
R_{33}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{g_{2,2}(s)}{\theta_1^- \Delta(s)} \sin st ds, \quad R_{34}(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{g_1(s)}{\theta_1^- \Delta(s)} \cos st ds, \\
R_{41}(t) &= \frac{\mu}{\pi} \int_0^\infty \frac{g_{5,1}(s)}{\Delta(s)} \cos st ds, \quad R_{42}(t) = -\frac{\mu}{\pi} \int_0^\infty \frac{g_{6,1}(s)}{\Delta(s)} \sin st ds, \\
R_{43}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{g_1(s)}{\theta_1^- \Delta(s)} \cos st ds, \quad R_{44}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{g_{2,1}(s)}{\theta_1^- \Delta(s)} \sin st ds.
\end{aligned}$$

Используя полученные соотношения и учитывая, что в рассматриваемом случае $P(x) = 0$, удовлетворим первому условию (1) и условиям (3). В итоге, учитывая, что осевые деформации накладки, к которой в точке x_0

приложена горизонтальная сосредоточенная сила T_0 , определяются формулой [3]

$$\varepsilon_s(x) = \frac{1}{h_s E_s} \left(T_0 H(x - x_0) - \int_{x_1}^x \tau(s) ds \right), \quad x, x_0 \in L_1,$$

где x_1 – начальная точка интервала L_1 , а $H(x)$ – функция Хевисайда, и введя функцию дислокации точек берегов трещин $V_*(s) = U'(s) + iV'(s)$, придём к следующей определяющей системе $N + 1$ сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & -\frac{\ell}{d} V_*(s) + \frac{im}{\pi d} \int_L \frac{V_*(s)}{s-x} ds + \int_L (R_{11}^*(x-s)V_*(s) + R_{12}^*(x-s)\bar{V}_*(s)) ds + \\ & + \int_{L_1} R_{13}^*(x-s) \frac{\tau(s)}{\mu_1} ds = \frac{p_k(x)}{\mu_1}, \\ & a_k < x < b_k, \quad k = 1 - N, \\ & -\frac{1}{2\pi\theta_1\mu_1} \int_{L_1} \frac{\tau(s)}{s-x} ds + \int_L R_{21}^*(x-s)V_*(s) ds + \\ & + \int_L R_{22}^*(x-s)\bar{V}_*(s) ds + \int_{L_1} R_{23}^*(x-s) \frac{\tau(s)}{\mu_1} ds = \\ & = \frac{1}{h_s E_s} \left(T_0 H(x - x_0) - \int_{x_1}^x \tau(s) ds \right), \quad x \in L_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_{11}^* &= \frac{1}{2}(R_{11} - R_{22} - i(R_{12} + R_{21})), & R_{23}^* &= R_{44}, \\ R_{12}^* &= \frac{1}{2}(R_{11} + R_{22} + i(R_{12} - R_{21})), & R_{13}^* &= R_{14} - iR_{24}, \\ R_{21}^* &= \frac{1}{2}(R_{41} - iR_{42}), & R_{22}^* &= \frac{1}{2}(R_{41} + iR_{42}). \end{aligned}$$

Систему (8) нужно рассматривать совместно с условиями непрерывности смещений в конечных точках трещин и равновесия накладки:

$$\int_{a_k}^{b_k} V_*(x) dx = 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad \int_{L_1} \tau(x) dx = T_0. \quad (9)$$

Следовательно, решение поставленной задачи свелось к решению системы определяющих уравнений (8) при условиях (9).

2. Решение задачи. Решения системы определяющих уравнений (8) при условиях (9) можно построить методом ортогональных многочленов или методом механических квадратур. Но на наш взгляд метод механических квадратур в рассматриваемом случае более эффективный и поэтому будем использовать его. Не нарушая общности, рассмотрим случай, когда состав-

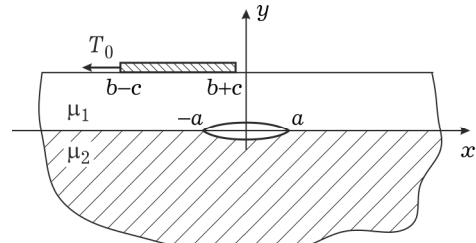


Рис. 1

ная полуплоскость (рис. 1) ослаблена только одной межфазной трещиной, занимающей интервал $(-a, a)$, и на линии $y = h$ усилена накладкой, занимающей участок $(b - c, b + c)$, т.е. когда $L = (-a, a)$ и $L_1 = (b - c, b + c)$.

Если считать, что сосредоточенная нагрузка T_0 приложена к левому концу накладки, а на берега трещины приложены нормальные нагрузки интенсивности $p_0(x)$, определяющая система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\ell}{d} V_*(s) + \frac{im}{\pi d} \int_{-a}^a \frac{V_*(s) ds}{s-x} + \int_{-a}^a (R_{11}^*(x-s)V_*(s) + R_{12}^*(x-s)\bar{V}_*(s)) ds + \\
& \quad + \int_{b-c}^{b+c} R_{13}^*(x-s) \frac{\tau(s)}{\mu_1} ds = \frac{p_0(x)}{\mu_1}, \quad -a < x < a, \\
& -\frac{1}{2\pi\theta_1\mu_1} \int_{b-c}^{b+c} \frac{\tau(s)}{s-x} ds + \int_{-a}^a R_{21}^*(x-s)V_*(s) ds + \int_{-a}^a R_{22}^*(x-s)\bar{V}_*(s) ds + \\
& \quad + \int_{b-c}^{b+c} R_{23}^*(x-s) \frac{\tau(s)}{\mu_1} ds = \frac{1}{h_s E_s} \left(T_0 - \int_{b-c}^x \tau(s) ds \right), \quad x \in L_1. \quad (10)
\end{aligned}$$

После замены переменных $s = a\xi$, $x = a\eta$ в первом уравнении (10) и $x = c\eta + b$, $s = c\xi + b$ - во втором, введя обозначения

$$V_*(\eta a) = \psi_1(\eta), \quad \bar{V}_*(\eta a) = \psi_2(\eta), \quad \frac{c\tau(c\eta + b)}{T_0} = \psi_3(\eta),$$

$$Q_{1j}(\eta, \xi) = -\frac{ad}{\ell} R_{1j}^*(a(\eta - \xi)), \quad j = 1, 2,$$

$$Q_{13}(\eta, \xi) = -\frac{T_0 d}{\ell \mu_1} R_{13}^*(a\eta - c\xi - b),$$

$$Q_{2j}(\eta, \xi) = -\frac{2ac\mu_1\vartheta_1^-}{T_0} R_{2j}^*(c\eta - a\xi + b), \quad j = 1, 2,$$

$$Q_{23}(\eta, \xi) = -2ac\vartheta_1^- R_{23}^*(c(\eta - \xi)), \quad f_1(\eta) = -\frac{dp_0(a\eta)}{\ell \mu_1},$$

$$a_1 = m / \ell, \quad \lambda = 2c\mu_1\vartheta_1^- / (h_s E_s),$$

систему (10) сформулируем на интервале $(-1, 1)$ и запишем в виде

$$\begin{aligned}
& \psi_1(\eta) - i \frac{a_1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_1(\xi)}{\xi - \eta} d\xi + \sum_{m=1}^3 \int_{-1}^1 Q_{1m}(\eta, \xi) \psi_m(\xi) d\xi = f_1(\eta), \\
& \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_3(\xi)}{\xi - \eta} d\xi + \sum_{m=1}^3 \int_{-1}^1 Q_{2m}(\xi - \eta) \psi_m(\xi) d\xi = -\lambda \left(1 - \int_{-1}^{\eta} \psi_3(\xi) d\xi \right). \quad (11)
\end{aligned}$$

При этом условия (9) принимают вид

$$\int_{-1}^1 \psi_j(\xi) d\xi = 0, \quad \int_{-1}^1 \psi_3(x) dx = 1, \quad j = 1, 2. \quad (12)$$

Учитывая регулярность функций $R_{mj}^*(\eta, \xi)$, $m = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, нетрудно установить [10], что искомые функции в конечных точках интервала

интегрирования имеют показательную особенность и их можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\psi_1(\eta) &= \psi_1^*(\eta)(1-x)^{\alpha_1}(1+\eta)^{\beta_1}, & \psi_2(\eta) &= \bar{\psi}_1(\eta), \\ \psi_3(\eta) &= \frac{\Psi_3^*(\eta)}{\sqrt{(1-x)(1+\eta)}}, \\ \alpha_1 &= -\frac{1}{2} - i\gamma, & \beta_1 &= -\frac{1}{2} + i\gamma, & \gamma &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu_1 + \alpha_1 \mu_2}{\mu_2 + \alpha_2 \mu_1}, \\ & & & & \alpha_j &= 2 - 4\nu_j, \quad j = 1, 2.\end{aligned}$$

где $\psi_j^*(\eta)$ – непрерывные гладкие функции, ограниченные вплоть до концов интервала $[-1, 1]$, $j = 1, 2, 3$. Подставляя значения функций $\psi_j(\eta)$, $j = 1, 2, 3$, в (11), (12) и используя соотношения, приведённые в [11], по стандартной процедуре придём к системе из $3n$ алгебраических уравнений относительно значений $\psi_j^*(\xi_t)$, $t = 1, \dots, n$, где ξ_t – корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(\xi_m) = 0$.

После определения функций $\psi_j^*(\xi_t)$ нетрудно при помощи интерполяционных многочленов Лагранжа

$$\psi_n(x) = \sum_{t=1}^n \frac{\psi^*(\xi_t) P_n^{(\alpha_1, \beta_1)}(x)}{(x - \xi_t) P_n^{(\alpha_1, \beta_1)}(\xi_t)}, \quad \varphi_n(x) = \sum_{t=1}^n \frac{\varphi^*(\xi_t) P_n^{(\alpha_2, \beta_2)}(x)}{(x - \xi_t) P_n^{(\alpha_2, \beta_2)}(\xi_t)}$$

восстановить функции $\psi_j^*(\eta)$, $-1 < \eta < 1$, и определить все необходимые величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние в составной полуплоскости. В частности, безразмерное раскрытие трещины и известные J -интегралы Черепанова – Райса, которые важны для исследования вопроса распространения трещины, определяются по формулам [10]:

$$\begin{aligned}V_*(\eta) &= \frac{V_*(a\eta)}{2a} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{\eta} \text{Im} \psi_1(\xi) d\xi, \\ J(\pm 1) &= \tilde{\mu} K(\pm 1) \bar{K}(\pm 1) = \frac{\pi \tilde{\mu} \mu_1^2 \ell^2}{d^2 \text{ch}^2(\pi\gamma)} \left| \psi_1^*(\pm 1) \right|^2, \\ \tilde{\mu} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right).\end{aligned}$$

3. Численные расчеты. Рассмотренная задача проанализирована в случае, когда берега межфазной трещины свободны от напряжений. Положив $h_s / h = 0.05$, $T_0 / (c\mu_1) = 0.1$, $E_s / E_1 = 10$, $\nu_1 = 0.2$, $\nu_2 = 0.3$, изучили закономерности изменения безразмерных касательных контактных напряжений под накладкой, раскрытия трещины и приведённого интеграла Черепанова – Райса $J_*(\pm a) = 10^4 J(\pm a) / \mu_1$ в зависимости от расстояния накладки от начала координат $b_* = b / h$, соотношения модулей упругости полосы и полуплоскости $\mu_* = E_2 / E_1$, а также от соотношения длин трещины и накладки к высоте полосы a / h и c / h .

Вычисления показали, что при постоянных физико-механических параметрах, когда длина трещины намного меньше высоты слоя, касательные контактные напряжения под накладкой при фиксированном значении b_* мало зависят от μ_* .

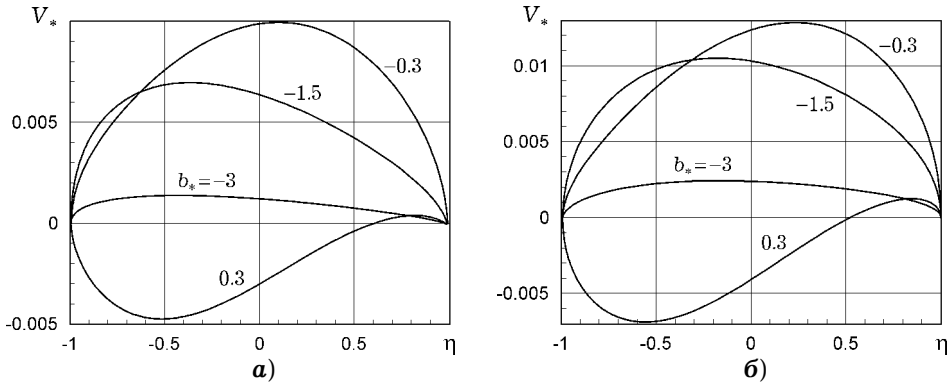


Рис. 2. Раскрытие трещины при $\mu_* = 1/2$ (а) и $\mu_* = 5/2$ (б).

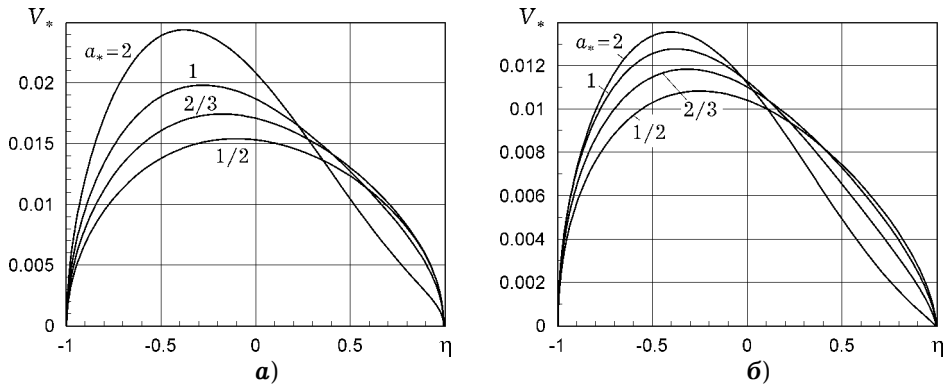


Рис. 3. Раскрытие трещины при $\mu_* = 1/2$ (а) и $\mu_* = 5/2$ (б).

На рис. 2 приведены графики раскрытия трещины $V_*(\eta)$ в зависимости от расстояния b_* накладки до начала координат, когда $a/h = c/h = 1/2$ и $\mu_* = 1/2; 5/2$. Из них видно, что если накладка движется влево от начала координат, то трещина, начиная со значения $b_* = 0.3$, раскрывается с правого конца и полностью открывается при значении $b_* = -0.3$. При дальнейшем смещении накладки влево, разность смещений точек берегов трещины уменьшается и обращается в ноль, начиная со значения $b_* = -5.5$ в случае $\mu_* = 0.5$ и $b_* = -7.5$ в случае $\mu_* = 2.5$, что можно трактовать как закрытие трещины.

На рис. 3 приведены графики раскрытия трещины в зависимости от соотношений $a_* = a/h = c/h$ в случаях, когда $b_* = -1$ и $\mu_* = 1/2, 5/2$. Из них явствует, что при увеличении a_* , которое можно трактовать как уменьшение высоты полосы при одинаковых длинах трещины и накладки, максимальное раскрытие трещины увеличивается.

На рис. 4 приведены графики приведённого интеграла Черепанова – Райса $J_*(\pm 1)$ в конечных точках трещины в зависимости от параметра b_* в случаях, когда $a/h = c/h = 1/2$ и $\mu_* = 1/2, 1, 5/2, 5$. При этом, для тех значений параметра b_* , при которых хотя бы один из концов трещины закрыт, значение интеграла J_* в этом конце считается равным нулю. Они показывают, что поведение приведённого интеграла Черепанова – Райса J_* в конечных точках трещины при всех приведённых значениях параметра μ_* в зависимости от параметра b_* практически одинаковые. Однако, чем жёстче полуплоскость по сравнению с полосой, тем максимальное значение

интеграла J_* больше и, следовательно, больше вероятность распространения трещины и отслоения полосы от полуплоскости.

На рис. 5 показаны графики приведенного интеграла Черепанова – Райса $J_*(\pm 1)$ для различных значений μ_* в концевых точках трещины в зависимости от параметра $h_* = h/a = h/c = -h/b$. Из них видно, что при увеличении параметра h_* , что можно трактовать как увеличение высоты полосы при постоянных длинах трещины и накладки, приведенный интеграл Черепанова – Райса J_* стремится к нулю. Чем мягче полуплоскость, тем больше максимальное значение приведенного интеграла Черепанова – Райса J_* .

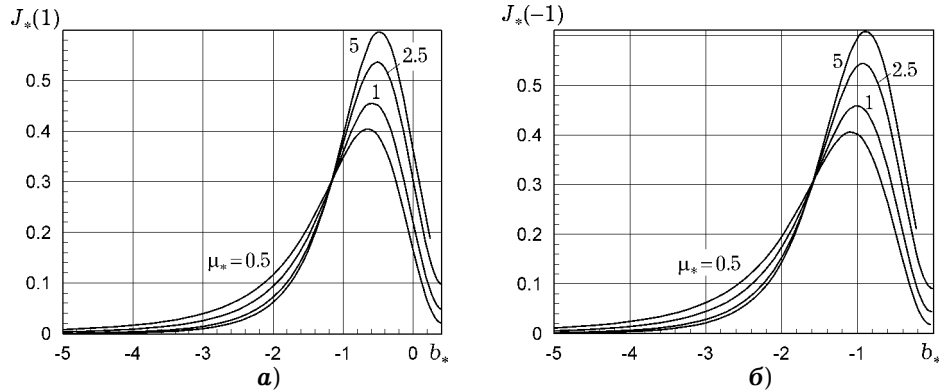


Рис. 4. Значения приведенного Черепанова – Райса $J_*(1)$ (а) и $J_*(-1)$ (б).

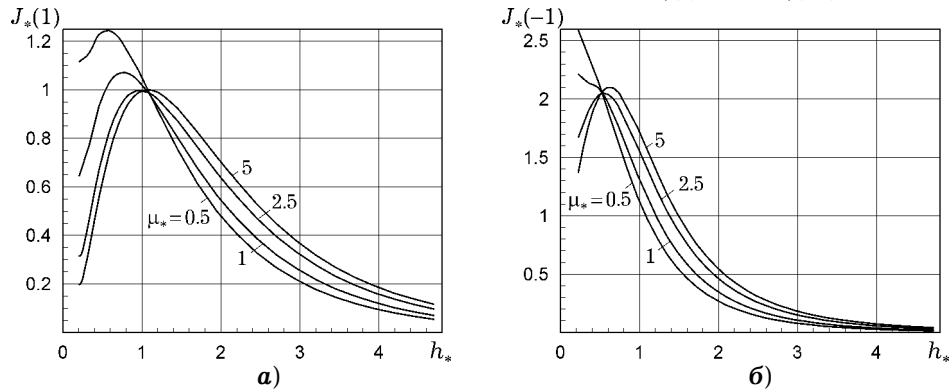


Рис. 5. Значения приведенного Черепанова – Райса $J_*(1)$ (а) и $J_*(-1)$ (б).

Закключение. Изучено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной полуплоскости, состоящей из полосы и полуплоскости, ослабленной межфазными трещинами и усиленной на своей границе деформируемой тонкой накладкой. Выведена система определяющих уравнений относительно касательных контактных напряжений, действующих под накладкой, и функции дислокации точек берегов трещин, решение которой построено методом механических квадратур. При помощи расчётов показано, что в случае одной межфазной трещины, когда её берега свободны от нагрузок, трещина частично открывается с левого конца и полностью открывается, когда центр накладки находится левее центра трещины. Численные результаты показали также, что при уменьшении высоты полосы для постоянных длин трещины и накладки раскрытие трещины увеличивается, при этом чем жёстче полуплоскость, тем меньше раскрытие трещины. Выяснено также поведение приведенного интеграла Черепанова – Райса J_* в концевых точках трещины в зависимости от соотношения упругих характеристик полуплоскости и полосы, расстояния центра включения от

центра тріщини і в залежності від соотношень висоти полоси і довжин тріщини і накладки. Установлено, що збільшення жорсткості напівплощини при різних соотношеннях вказаних геометричних величин може привести як до збільшення, так і до зменшення максимального значення інтеграла Черепанова – Райса.

1. Акопян В. Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. – Ереван: Из-во Гитутюн НАН РА, 2014. – 322 с.
2. Акопян В. Н., Саргсян А. О. О концентрации напряжений возле абсолютно жесткого включения в составной упругой напівплощини // Изв. НАН Армении. Механика. – 2010. – **63**, № 4. – С. 12–22.
3. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – Москва: Наука, 1983. – 488 с.
4. Банцурі Р. Д., Шавлакадзе Н. Н. Контактная задача для кусочно-однородной плоскости с полубесконечным включением // Прикл. математика и механика. – 2009. – **73**, Вып. 4. – С. 655–662.
То же: Bantsuri R. D., Shavlakadze N. N. The contact problem for a piecewise-homogeneous plane with a semi-infinite inclusion // J. Appl. Math. Mech. – 2009. – **73**, No. 4. – P. 471–477.
– <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.08.002>.
5. Бережницький Л. Т., Панасюк В. В., Стацук Н. Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. – Киев: Наукова думка, 1983. – 288 с.
6. Мхитарян С. М., Верлинский С. В. Напряженное состояние кусочно-однородной упругой напівплощини с внутренней коллинеарной системой трещин / В сб. трудов «Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем». – Ереван, 2002. – С. 143–147.
7. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наукова думка, 1976. – 442 с.
8. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 342 с.
9. Устинов К. Б. Об отслоении слоя от напівплощини; условия упругой заделки для пластины эквивалентной слою // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2015. – № 1. – С. 75–95.
То же: Ustinov K. B. On separation of a layer from the half-plane: elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer // Mech. Solids. – 2015. – **50**, No. 1. – P. 62–80. – <https://doi.org/10.3103/S0025654415010070>.
10. Kudish I. I., Amirjanyan H. A., Hakobyan V. N. Probabilistic modeling of coating delamination / In: Abdel Wahab M. (ed.) Proc. 7th Int. Conference on Fracture Fatigue and Wear. FFW 2018. Lecture Notes in Mechanical Engineering. – Singapore: Springer, 2018. – P. 359–370. – https://doi.org/10.1007/978-981-13-0411-8_32.
11. Sahakyan A. V., Amirjanyan A. A. Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types // J. Phys.: Conf. Ser. – 2018. – **991**. – Paper ID: 012070. – <https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012070>.

ПРО ПЕРЕДАЧУ НАВАНТАЖЕННЯ ВІД ДЕФОРМІВНОЇ НАКЛАДКИ ДО СКЛАДЕНОЇ ПІВПЛОЩИНИ З МІЖФАЗНИМИ ТРІЩИНАМИ

Розглянуто плоский деформований стан кусково-однорідної півплощини, що складається з різномірних нескінченної смуги і півплощини з міжфазними скінченними тріщинами, коли півплощина деформується за допомогою скінченної деформівної накладки, яка діє на вільній межі півплощини. Отримано ключову систему інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь відносно дислокації зсувів точок берегів тріщини і дотичних контактних напружень, що діють під накладкою. Розв'язок системи ключових рівнянь побудовано чисельно-аналітичним методом механічних квадратур. Проведено числовий аналіз, вивчено закономірності зміни контактних напружень і виявлено особливості зміни J -інтеграла Черепанова – Райса залежно від фізико-механічних і геометричних характеристик задачі.

Ключові слова: контактна задача, міжфазна тріщина, тонка накладка.

LOAD TRANSFER FROM A DEFORMABLE PATCH TO A COMPOUND HALF-PLANE WITH INTERFACIAL CRACKS

The plane deformed state of a piecewise-homogeneous half-plane composed of a heterogeneous infinite strip and a half-plane with interphase finite cracks is considered when the half-plane is deformed using a finite deformable patch acting on the free boundary of the half-plane. The governing system of integral and integro-differential equations is derived with respect to the displacements dislocation at the points of the crack edges and the tangential contact stresses acting under the patch. A solution to the system of the governing equations is constructed by making use of the numerical-analytical method of mechanical quadratures. The numerical analysis is carried out, the regulations of changes in the contact stresses are studied, and the features of changes in the Cherepanov – Rice J -integral are revealed depending on the physico-mechanical and geometric parameters of the problem.

Key words: contact problem, interphase crack, thin patch.

Ин-т механики НАН Республики Армения
Ереван, Республика Армения

Получена
30.09.19