УДК 536.21

А. П. Янковский✉

# КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОВОГО БАЛАНСА КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН, ПОЛУЧЕННЫХ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. II. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

*Получены аналитические решения модельной задачи стационарной теплопроводности для композитной пластины. Эти решения построены с использованием двух методов понижения размерности: метода взвешенных невязок (обобщенного метода Галеркина) и на основе вариационного метода. Рассматривается однородная прямоугольная удлиненная пластина с анизотропией материала общего вида. Лицевые поверхности конструкции теплоизолированы, на одной продольной торцевой поверхности задана температура, а на другой – задан тепловой поток. Предполагается, что входные данные задачи и ее решение не зависят от продольной координаты. Температура аппроксимируется полиномом второго порядка по поперечной координате. Граничные условия на лицевых поверхностях учитываются. Показано, что в случае использования метода взвешенных невязок разрешающее дифференциальное уравнение задачи имеет второй порядок, а при использовании вариационного метода – четвертый порядок. В рамках решения, полученного с использованием метода взвешенных невязок, интегральный тепловой поток в тангенциальном направлении получается постоянным и равным истинному значению этой величины. В рамках решения, полученного с использованием вариационного метода, этот интегральный тепловой поток осциллирует в тангенциальном направлении, ортогональном продольному направлению пластины. Частота и амплитуда этих осцилляций зависят от относительной толщины конструкции, причем амплитуда осцилляций может на несколько порядков превышать истинное значение интегрального теплового потока. Аналогичный осциллирующий характер имеет и температурное поле в пластине, рассчитанное с использованием этого метода понижения размерности задачи теплопроводности.*

***Ключевые слова:*** *композитные пластины, теория теплопроводности, уравнение теплового баланса, методы понижения размерности, вариационные принципы, метод взвешенных невязок.*

В настоящей работе продолжается исследование, опубликованное в [4], где на основе использования вариационных принципов рассмотрены два подхода к получению двумерных уравнений теории стационарной теплопроводности композитных пластин. В рамках первого подхода тепловые граничные условия на лицевых поверхностях пластин не учитываются, но получающиеся при этом двумерные уравнения Эйлера и соответствующие им граничные условия на кромках согласованы с теплофизической точки зрения, так как согласно этим уравнениям для любой подобласти пластины и всей конструкции в целом выполняется уравнение теплового баланса. В рамках второго подхода учитываются тепловые граничные условия на лицевых поверхностях. Это приводит к необходимости решения вариационной задачи на условный экстремум. В [4] показано, что получающиеся при втором подходе двумерные уравнения Эйлера и соответствующие им граничные условия на кромках не согласованы (противоречивы) с теплофизической точки зрения, так как для произвольной подобласти пластины и всей конструкции в целом не выполняется уравнение теплового баланса.

Однако в [4] остался открытым вопрос о том, насколько сильно решения двумерных уравнений теорий второго типа искажают качественно и количественно решения теплофизических задач для композитных пластин.

✉ yankovsky_ap@rambler.ru

В частности: насколько сильно фиктивный источник тепла (42)[1] и фиктивный тепловой поток (43) искажают температурное поле при решении соответствующей теплофизической задачи для пластины с анизотропией материала общего вида?

В связи с изложенным выше в предлагаемой работе анализируются двумерные решения модельной задачи для прямоугольной удлиненной композитной пластины, полученные методом взвешенных невязок и в рамках простейшего варианта теорий второго типа.

**1. Модельная задача**. Рассмотрим простейший вариант теории типа Бабина – Немировского, задавая $K = 2$ (параболическое распределение температуры по толщине пластины – см. (11)) и предполагая, что на лицевых поверхностях заданы граничные условия II рода. При этом уравнения (34) в случаях $k = 1$ и $k = 2$ с учетом $\alpha^{(\pm)} = 0$ примут вид

$$-\sum_{i=1}^{2}\left[Q_{i,i}^{(1)} + h\left(æ_{3i}^{(-)}\gamma^{(-)} + æ_{3i}^{(+)}\gamma^{(+)}\right)_{,i}\right] + Q_3^{(0)} + æ_{33}^{(+)}\gamma^{(+)} - æ_{33}^{(-)}\gamma^{(-)} = -W_q^{(1)}(\mathbf{x}),$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\left[Q_{i,i}^{(2)} - h^2\left(æ_{3i}^{(-)}\gamma^{(-)} - æ_{3i}^{(+)}\gamma^{(+)}\right)_{,i}\right] + 2Q_3^{(1)} + 2h\left(æ_{33}^{(+)}\gamma^{(+)} + æ_{33}^{(-)}\gamma^{(-)}\right) =$$

$$= -W_q^{(2)}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in G. \tag{44}$$

В качестве модельной задачи рассмотрим прямоугольную удлиненную пластину (в идеале – бесконечной длины), сориентированную вдоль оси $Ox_2$ и имеющую ширину $L$ в направлении $Ox_1$. Внутренние источники тепла в конструкции отсутствуют ($w = 0$). На лицевых поверхностях $A^{(\pm)}$ ($x_3 = \pm h$) задаем условие теплоизоляции (см. (3) при учете $q_n^{(\pm)} = 0$ и $\alpha^{(\pm)} = 0$). На левой удлиненной кромке $x_1 = 0$ (рис. 1, где ось $Ox_2$ перпендикулярна плоскости рисунка) задано постоянное значение температуры (см. (5)):

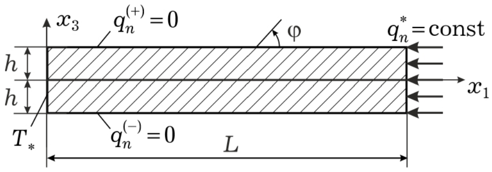



Рис. 1. Поперечное сечение прямоугольной удлиненной КМ-пластины.

$$T(0, x_3) = T_* = \text{const}, \qquad |x_3| \le h, \tag{45}$$

а на правой удлиненной кромке $x_1 = L$ задан постоянный тепловой поток (см. (4) при $\alpha_q = 0$)

$$q_1(L, x_3) = q_n(x_3) = -q_n^* = \text{const}, \qquad q_n^* > 0, \qquad |x_3| \le h. \tag{46}$$

Материал пластины однороден:

$$æ_{ij}^{(\pm)} = æ_{ij} = \text{const}, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Так как все входные данные модельной задачи не зависят от переменной $x_2$, то и ее решение не зависит от этой координаты. Согласно уравнениям и соотношениям (1)–(3), (45) и (46), решение этой задачи можно представить в виде $T(x_1, x_3) = T_* + \bar{T}(x_1, x_3)$, где $\bar{T}$ – поправка к температуре $T_* = \text{const}$. Необходимо определить функцию $\bar{T}(x_1, x_3)$, которую для удобства изложения по-прежнему будем обозначать $T(x_1, x_3)$. При этом в граничном условии (45) следует формально принять $T_* = 0$.

[1] В настоящем исследовании для удобства изложения продолжается сквозная нумерация формул, начатая в [4].

На основании (15) получаем, что в модельной задаче $W_q^{(k)} \equiv 0$, поэтому уравнения (38) и (44) редуцируются к виду

$$Q_{1,1}^{(0)}(x_1) + æ_{31}\chi_{,1}^{(-)}(x_1) = 0, \qquad 0 \le x_1 \le L, \tag{47}$$

$$-Q_{1,1}^{(1)}(x_1) + Q_3^{(0)}(x_1) - hæ_{31}\chi_{,1}^{(+)}(x_1) + æ_{33}\chi^{(-)}(x_1) = 0,$$

$$-Q_{1,1}^{(2)}(x_1) + 2Q_3^{(1)}(x_1) - h^2æ_{31}\chi_{,1}^{(-)}(x_1) + 2hæ_{33}\chi^{(+)}(x_1) = 0,$$

$$0 \le x_1 \le L, \tag{48}$$

где

$$\chi^{(\pm)}(x_1) = \gamma^{(+)}(x_1) \pm \gamma^{(-)}(x_1), \qquad 0 \le x_1 \le L, \tag{49}$$

$\chi^{(\pm)}(x_1)$ − новые неопределенные множители Лагранжа.

Согласно (15) и (46), граничное условие (39) запишем так:

$$Q_1^{(0)}(x_1) + æ_{31}\chi^{(-)}(x_1) = Q^{(0)}, \qquad x_1 = L. \tag{50}$$

Проинтегрировав (47) при учете (50), получим

$$Q_1^{(0)}(x_1) + æ_{31}\chi^{(-)}(x_1) = Q^{(0)} = \mathrm{const}, \qquad 0 \le x_1 \le L. \tag{51}$$

Выразим из (51) множитель Лагранжа:

$$\chi^{(-)}(x_1) = æ_{31}^{-1}\left(Q^{(0)} - Q_1^{(0)}(x_1)\right) \ne \mathrm{const}, \qquad 0 \le x_1 \le L. \tag{52}$$

Подставим (52) в уравнения (48), тогда будем иметь

$$-Q_{1,1}^{(1)} + Q_3^{(0)} - hæ_{31}\chi_{,1}^{(+)} + æ_{33}æ_{31}^{-1}\left(Q^{(0)} - Q_1^{(0)}(x_1)\right) = 0, \qquad 0 \le x_1 \le L, \tag{53}$$

$$-Q_{1,1}^{(2)} + 2Q_3^{(1)} + h^2Q_{1,1}^{(0)} + 2hæ_{33}\chi^{(+)} = 0, \qquad 0 \le x_1 \le L. \tag{54}$$

Из уравнения (54) выразим второй множитель Лагранжа:

$$\chi^{(+)}(x_1) = (2hæ_{33})^{-1}\left(Q_{1,1}^{(2)} - 2Q_3^{(1)} - h^2Q_{1,1}^{(0)}\right) \ne \mathrm{const}, \qquad 0 \le x_1 \le L. \tag{55}$$

Соотношения (52) и (55) определяют множители Лагранжа через тепловые факторы $Q_i^{(k)}$. После подстановки (55) в (53) и элементарных преобразований получим равенство

$$Q_{1,11}^{(2)} - h^2Q_{1,11}^{(0)} - 2Q_{3,1}^{(1)} - 2æ_{33}æ_{31}^{-1}\left(Q_{1,1}^{(1)} - Q_3^{(0)}\right) - 2æ_{33}^2æ_{31}^{-2}Q_1^{(0)} =$$

$$= -æ_{33}^2æ_{31}^{-2}Q^{(0)} = \mathrm{const}, \qquad 0 \le x_1 \le L. \tag{56}$$

Таким образом, уравнение (56) не содержит множителей Лагранжа, но его порядок больше порядка уравнения (20) (при $k = 0$), которое является основным при решении рассматриваемой задачи методом взвешенных невязок. Для однозначного интегрирования уравнения (56) необходимо использовать граничные условия, два из которых вытекают из равенств (35) при $k = 1, 2$ с учетом (37), (46) и (49):

$$Q_1^{(1)} + hæ_{31}\chi^{(+)} = Q^{(1)}, \qquad Q_1^{(2)} + h^2æ_{31}\chi^{(-)} = Q^{(2)}, \qquad x_1 = L. \tag{57}$$

Используя (52) и (55), исключим из (57) множители Лагранжа. Тогда получим

$$Q_{1,1}^{(2)} - 2Q_3^{(1)} - h^2Q_{1,1}^{(0)} + 2æ_{33}æ_{31}^{-1}Q_1^{(1)} = 2æ_{33}æ_{31}^{-1}Q^{(1)},$$

$$Q_1^{(2)} - h^2Q_1^{(0)} = Q^{(2)} - h^2Q^{(0)}, \qquad x_1 = L. \tag{58}$$

Равенства (58) являются краевыми условиями, соответствующими уравнению (56) и заданными на кромке $x_1 = L$. Согласно рис. 1 и условию (45), на левой кромке $x_1 = 0$ должны быть заданы дополнительные температурные краевые условия. Так, из равенства (45) при учете разложения (11) ($K = 2$) вытекают условия (при формальном задании $T_* = 0$)

$$T_k(0) = 0, \qquad k = 0,1,2. \tag{59}$$

В силу того, что на лицевых поверхностях пластины заданы условия теплоизоляции: $q_n^{(\pm)} = 0$, $\alpha^{(\pm)} = 0$, из равенств (24) при $K = 2$ получим выражения

$$T_2(x_1) = -\frac{æ_{31}}{2æ_{33}} T_{1,1}(x_1),$$

$$T_{0,1}(x_1) = \frac{h^2 æ_{31}}{2æ_{33}} T_{1,11}(x_1) - \frac{æ_{33}}{æ_{31}} T_1(x_1), \qquad 0 \le x_1 \le L. \tag{60}$$

Используя формулы (1), (11) (при $K = 2$), (15) и (46), вычислим все тепловые факторы, входящие в (56) и (58):

$$Q_1^{(0)}(x_1) \equiv \int_{-h}^{h} q_1(x_1, x_3)\, dx_3 = -2hæ_{11}\left(T_{0,1} + \frac{h^2}{3} T_{2,1}\right) - 2hæ_{31}T_1,$$

$$Q_3^{(0)}(x_1) \equiv \int_{-h}^{h} q_3(x_1, x_3)\, dx_3 = -2hæ_{31}\left(T_{0,1} + \frac{h^2}{3} T_{2,1}\right) - 2hæ_{33}T_1,$$

$$Q_1^{(1)}(x_1) \equiv \int_{-h}^{h} q_1(x_1, x_3) x_3\, dx_3 = -\frac{2h^3}{3}(æ_{11}T_{1,1} + 2æ_{31}T_2),$$

$$Q_3^{(1)}(x_1) \equiv \int_{-h}^{h} q_3(x_1, x_3) x_3\, dx_3 = -\frac{2h^3}{3}(æ_{31}T_{1,1} + 2æ_{33}T_2),$$

$$Q_1^{(2)}(x_1) \equiv \int_{-h}^{h} q_1(x_1, x_3) x_3^2\, dx_3 = -2h^3æ_{11}\left(\frac{T_{0,1}}{3} + \frac{h^2}{5} T_{2,1}\right) - \frac{2h^3}{3}æ_{31}T_1,$$

$$Q^{(0)} \equiv \int_{-h}^{h} q_n\, dx_3 = -2hq_n^*, \qquad Q^{(1)} \equiv \int_{-h}^{h} q_n x_3\, dx_3 = 0,$$

$$Q^{(2)} \equiv \int_{-h}^{h} q_n x_3^2\, dx_3 = -\frac{2h^3}{3} q_n^*, \qquad q_n^* > 0. \tag{61}$$

Подставив выражения (61) в уравнение (56), после элементарных преобразований получим

$$\frac{4h^3}{3}æ_{11}T_{0,111} + \frac{4h^5}{15}æ_{11}T_{2,111} + \frac{4h^3}{3}\left(2æ_{31} + \frac{æ_{11}æ_{33}}{æ_{31}}\right)T_{1,11} +$$

$$+ 4h^3\left(æ_{33} + \frac{æ_{11}æ_{33}^2}{3æ_{31}^2}\right)T_{2,1} - 4h\left(æ_{33} - \frac{æ_{11}æ_{33}^2}{æ_{31}^2}\right)T_{0,1} =$$

$$= -2\frac{æ_{33}^2}{æ_{31}^2} Q^{(0)} = \text{const}, \qquad 0 \le x_1 \le L. \tag{62}$$

После подстановки выражений (60) в равенство (62) будем иметь

$$T_{1,1111} - \frac{5}{2h^2}\left(æ_{31} - \frac{æ_{11}æ_{33}}{æ_{31}}\right)\frac{æ_{33}}{æ_{11}æ_{31}} T_{1,11} + \frac{15}{2h^4}\left(æ_{33} - \frac{æ_{11}æ_{33}^2}{æ_{31}^2}\right)\frac{æ_{33}^2}{æ_{11}æ_{31}^2} T_1 =$$

$$= -\frac{15}{4h^5}\frac{æ_{33}^3}{æ_{11}æ_{31}^3} Q^{(0)} = \text{const}, \qquad 0 \le x_1 \le L. \tag{63}$$

Для однозначного интегрирования разрешающего уравнения (63) необходимо задать четыре граничных условия. Подстановка выражений (61) при учете (60) в равенства (58) приводит к двум краевым условиям на правой кромке:

$$\frac{8h^5}{15}\frac{æ_{11}æ_{31}}{æ_{33}} T_{1,111} + \frac{8h^3}{3}\left(æ_{31} - \frac{æ_{11}æ_{33}}{æ_{31}}\right) T_{1,1} = \frac{2æ_{33}}{æ_{31}} Q^{(1)},$$

$$\frac{8h^5}{15}\frac{æ_{11}æ_{31}}{æ_{33}} T_{1,11} + \frac{4h^3}{3}\left(æ_{31} - \frac{æ_{11}æ_{33}}{æ_{31}}\right) T_1 = Q^{(2)} - h^2 Q^{(0)}, \quad x_1 = L. \tag{64}$$

Краевые же условия (59) при учете (60) принимают вид

$$T_0(0) = 0, \tag{65}$$

$$T_1(0) = 0, \qquad T_{1,1}(0) = 0. \tag{66}$$

Для интегрирования уравнения (63) следует использовать граничные условия (64) и (66). Если двухточечная граничная задача (63), (64) и (66) решена (функция $T_1(x_1)$ известна), то функция $T_2(x_1)$ вычисляется на основании первого из равенств (60), а функция $T_0(x_1)$ определяется путем интегрирования второго из соотношений (60) (где правая часть уже известна) при использовании краевого условия (65). Таким образом, решение модельной задачи в рамках теории типа Бабина – Немировского построено.

Получим решение рассматриваемой задачи с использованием метода взвешенных невязок. Согласно **п. 3** из [4], равенства (20) и (21) при этом выполняются при $k = 0,1,\dots,K-2$. Так как в модельной задаче принято $K = 2$ (см. (11)), то в (20) и (21) остается всего по одному равенству при $k = 0$, из которых в случае исследуемой задачи вытекает уравнение (51) при $\chi^{(-)} \equiv 0$. Учитывая в этом равенстве выражения (60) и (61), будем иметь разрешающее уравнение

$$T_{1,11} + \frac{3}{h^2}\left(\frac{æ_{33}}{æ_{11}} - \frac{æ_{33}^2}{æ_{31}^2}\right) T_1 = -\frac{3}{2h^3}\frac{æ_{33}}{æ_{11}æ_{31}} Q^{(0)} = \text{const}, \quad 0 \le x_1 \le L. \tag{67}$$

Для однозначного интегрирования уравнения (67) необходимо использовать краевые условия (66). Если краевая задача (66) и (67) уже решена, то функции $T_0(x_1)$ и $T_2(x_1)$ по-прежнему определяются равенствами (60) при краевом условии (65). Уравнение (67) – уравнение с сингулярным возмущением, так как второе слагаемое в левой части имеет большой сомножитель $h^{-2}$ (если задачу предварительно обезразмерить по пространственным переменным). Следовательно, решение уравнения (67), а значит, и соответствующее решение модельной задачи могут обладать краевыми эффектами.

Как видно из вышеизложенного, приближенное решение модельной задачи при использовании метода взвешенных невязок получается существенно проще, чем в рамках теории типа Бабина – Немировского, основанной на применении вариационных принципов теории теплопроводности. (Напомним, что равенства (60), (65)–(67) получаются и при использовании простейшего варианта метода дополнительных граничных условий [1].)

В качестве конкретного примера рассмотрим пластину, изготовленную из однонаправленно армированного органопластика. Предполагаем, что волокна уложены в плоскостях, параллельных плоскости $Ox_1x_3$, причем направление армирования составляет угол $\varphi$ с осью $Ox_1$ (см. рис. 1). Коэффициенты теплопроводности органопластика имеют значения [3]: вдоль волокон $\bar{\text{æ}}_{11} = 3.22\,\text{Вт/(м} \cdot \text{К)}$, поперек волокон $\bar{\text{æ}}_{22} = \bar{\text{æ}}_{33} = 0.35\,\text{Вт/(м} \cdot \text{К)}$. Используя формулы пересчета компонент тензора второго ранга при повороте системы координат вокруг оси $Ox_2$ на угол $-\varphi$, получим выражения для коэффициентов теплопроводности пластины в системе координат $Ox_1, x_2, x_3$ [2]:

$$\text{æ}_{11} = \bar{\text{æ}}_{11}\cos^2\varphi + \bar{\text{æ}}_{33}\sin^2\varphi, \qquad \text{æ}_{33} = \bar{\text{æ}}_{11}\sin^2\varphi + \bar{\text{æ}}_{33}\cos^2\varphi\,,$$

$$\text{æ}_{31} = \text{æ}_{13} = (\bar{\text{æ}}_{11} - \bar{\text{æ}}_{33})\cos\varphi\sin\varphi, \quad \text{æ}_{22} = \bar{\text{æ}}_{22}, \quad \text{æ}_{12} = \text{æ}_{21} = \text{æ}_{32} = \text{æ}_{23} = 0\,.$$

В расчетах примем: $L = 1\,\text{м}$, $h = 5\,\text{см}$, $\varphi = \pi/8$, $q_n^* = 10^{-5}\,\text{Вт/м}^2$ (см. (46), (61) и рис. 1).

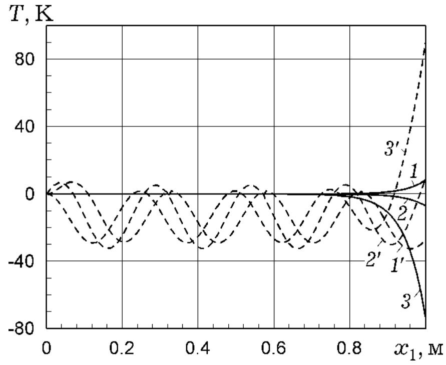
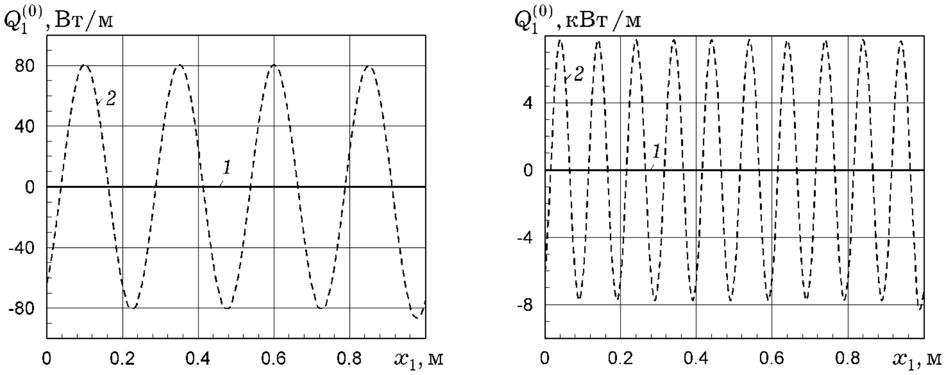



Рис. 2. Распределение температуры КМ-пластины на разных горизонтальных плоскостях $x_3 = \text{const}$.

На рис. 2 изображены зависимости $T(x_1, x_3)$, полученные при разных значениях $x_3 = \text{const}$. Сплошные кривые ***1–3*** рассчитаны с использованием метода взвешенных невязок (см. (66) и (67)), а пунктирные кривые ***1′–3′*** – по теории типа Бабина – Немировского (см. (63), (64) и (66)). Кривые ***1*** и ***1′*** определены при $x_3 = h$ (верхняя лицевая поверхность), линии ***2*** и ***2′*** – при $x_3 = 0$ (срединная плоскость пластины), кривые ***3*** и ***3′*** – при $x_3 = -h$ (нижняя лицевая поверхность). Поведение кривых ***1–3*** в окрестности значения $x_1 = 1\,\text{м}$ свидетельствует о том, что решение модельной задачи, полученное с использованием метода взвешенных невязок, действительно обладает ярко выраженным краевым эффектом в окрестности правой кромки пластины (как это и было предсказано выше при обсуждении свойств решения уравнения (67)). Поведение же кривых ***1′–3′*** демонстрирует осциллирующий характер зависимости температуры $T$ от $x_1$ при фиксированных значениях координаты $x_3$.

На рис. 3 изображена зависимость суммарного теплового потока $Q_1^{(0)}$ в поперечных сечениях пластины (см. (15)) от координаты $x_1$ для различных значений толщины $h$. Согласно уравнению теплового баланса (2), в модельной задаче $Q_1^{(0)}$ должен быть величиной постоянной. На рис. 3 сплошные линии ***1*** получены с использованием метода взвешенных невязок (см. (51) при $\chi^{(-)} \equiv 0$), а пунктирные кривые ***2*** – по теории типа Бабина – Немировского (см. (51) при $\chi^{(-)} \neq 0$). Кривые на рис. 3***а*** рассчитаны при прежних входных данных задачи, при этом линия ***1*** является горизонтальной, а ординаты ее точек имеют значения $Q_1^{(0)} = 10^{-6}$ Вт/м. Поведение же кривой ***2*** на рис. 3*а* свидетельствует о том, что соответствующая зависимость $Q_1^{(0)}(x_1)$ является осциллирующей, причем амплитуда колебаний существенно (на 8 порядков) отличается от истинного значения $Q_1^{(0)} = 10^{-6}$ Вт/м.




***а***) $h = 5$ см    ***б***) $h = 2$ см

Рис. 3. Зависимость интегрального тангенциального теплового потока в КМ-пластине от координаты $x_1$ при разной толщине конструкции.

На рис. 3*б* для сравнения изображены аналогичные зависимости $Q_1^{(0)}(x_1)$, но определенные для пластины меньшей толщины ($h = 2$ см) при прежних прочих входных данных задачи. Линия ***1*** при этом по-прежнему является горизонтальной (ординаты ее точек имеют значения $Q_1^{(0)} = 4 \cdot 10^{-7}$ Вт/м.) Кривые же ***2*** на рис. 3*б* осциллируют с большей частотой, чем на рис. 3*а*, причем амплитуда колебаний при этом увеличилась на два порядка, что на 10 порядков превышает истинное значение $Q_1^{(0)} = 4 \cdot 10^{-7}$ Вт/м.

Таким образом, в общем случае анизотропии материала пластины теория понижения размерности Бабина – Немировского, основанная на использовании вариационных принципов теории теплопроводности, приводит к недопустимо сильному (имеющему качественный характер) искажению решения теплофизической задачи и существенному нарушению двумерного уравнения теплового баланса.

**Заключение**. Аналитические решения простейшей модельной задачи для композитной пластины с анизотропией материала общего вида показали, что теории типа Бабина – Немировского, использующие вариационные принципы теории теплопроводности, приводят не только к существенному количественному, но и качественному искажению полей температуры и тепловых потоков в конструкции, поэтому не могут быть рекомендованы для использования в целях понижения размерности задачи теплопроводности в композитных тонкостенных конструкциях. По-видимому, наиболее целесообразными для понижения размерности таких задач являются метод взвешенных невязок (обобщенный метод Галеркина) и метод дополнительных граничных условий [1].

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2017–2020 годы (проект 23.4.1 – Механика деформирования и разрушения материалов, сред при механических нагрузках, воздействии физических полей и химически активных сред).

1. *Кудинов В. А., Кудинов И. В.* Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности / Под ред. Э. М. Карташова. – Москва: Либроком, 2012. – 280 с.
2. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.* Сопротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
3. *Справочник* по композитным материалам: В 2 кн. Кн. 1 / Под ред. Дж. Любина. – Москва: Машиностроение, 1988. – 448 с.

То же: *Handbook* of composites / Ed. G. Lubin. – New York: Van Nostrand Reinhold, 1982. – xi+786 p.

4. *Янковский А. П.* Критический анализ двумерных уравнений теплового баланса композитных пластин, полученных на основе вариационных принципов теории теплопроводности. I. Общие двумерные теории // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62**, № 2. – С. 107–120.

## КРИТИЧНИЙ АНАЛІЗ ДВОВИМІРНИХ РІВНЯНЬ ТЕПЛОВОГО БАЛАНСУ КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИН, ОТРИМАНИХ НА ОСНОВІ ВАРІАЦІЙНИХ ПРИНЦИПІВ ТЕОРІЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ. II. МОДЕЛЬНА ЗАДАЧА

*Отримано аналітичні розв'язки модельної задачі стаціонарної теплопровідності для композитної пластини. Розв'язки побудовано з використанням двох методів зниження розмірності: методу зважених нев'язок (узагальненого методу Гальоркіна) і на основі варіаційного методу. Розглядається однорідна прямокутна видовжена пластина з анізотропією матеріалу загального вигляду. Лицьові поверхні конструкції теплоізольовані, на одній поздовжній торцевій поверхні задано температуру, а на іншій – задано тепловий потік. Передбачається, що вхідні дані задачі і її розв'язок не залежать від поздовжньої координати. Температура апроксимується поліномом другого порядку за поперечною координатою. Граничні умови на лицьових поверхнях враховуються. Показано, що розв'язувальне диференціальне рівняння задачі у випадку використання методу зважених нев'язок є другого порядку, а при використанні варіаційного методу – четвертого. У рамках розв'язку, отриманого з використанням методу зважених нев'язок, інтегральний тепловий потік у тангенціальному напрямку є постійним і рівним істинному його значенню. У рамках розв'язку, отриманого з використанням варіаційного методу, цей інтегральний тепловий потік осцилює в тангенціальному напрямку, ортогональному до поздовжнього напрямку пластини. Частота і амплітуда осциляцій залежать від відносної товщини конструкції, причому амплітуда осциляцій може на декілька порядків перевищувати реальне значення інтегрального теплового потоку. Аналогічний осцилюючий характер має і температурне поле в пластині, обчислене з використанням цього методу зниження розмірності задачі теплопровідності.*

***Ключові слова:*** *композитні пластини, теорія теплопровідності, рівняння теплового балансу, методи зниження розмірності, варіаційні принципи, метод зважених нев'язок.*

## CRITICAL ANALYSIS OF THE TWO-DIMENSIONAL HEAT BALANCE EQUATIONS OF COMPOSITE PLATES, OBTAINED ON THE BASIS OF THE VARIATIONAL PRINCIPLES OF THE THEORY OF THERMAL CONDUCTIVITY. II. MODEL PROBLEM

*Analytical solutions of the model problem of stationary thermal conductivity for a composite plate are obtained. These solutions are constructed using two methods of reducing the dimension: the generalized Galerkin method and the variational method. A uniform rectangular elongated plate with anisotropy of a general form material is considered. The front surfaces of the structure are thermally insulated; temperature is set on one longitudinal end surface; on the other longitudinal end surface the heat flux is set. It is assumed that the input data of the problem and its solution are independent of the longitudinal coordinate. The temperature is approximated by a second-order polynomial in the transverse coordinate. Boundary conditions on the front surfaces are taken into account. It is shown that in the case of using the generalized Galerkin method, the resolving differential equation of the problem is of the second order, and when using the variational method, it is of the fourth order. In the framework of the solution obtained using the generalized Galerkin method, the integral heat flux in the tangential direction is constant and equal to the true value of this quantity. In the framework of the solution obtained using the variational method, this integral heat flux oscillates in the tangential direction orthogonal to the longitudinal direction of the plate. The frequency and amplitude of these oscillations depend on the relative thickness of the structure, and the amplitude of the oscillations can be several orders of magnitude higher than the true value of the integral heat flux. The temperature field in the plate, calculated using this method of reducing the dimension of the heat conduction problem, has a similar oscillating character.*

***Keywords***: *composite plates, heat conduction theory, heat balance equation, dimensionality reduction techniques, variational principles, weighted residuals method.*

Ин-т теорет. и прикл. механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено
01.09.19