

АНАЛІЗ ФОРМИ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ У ТРИШАРОВІЙ ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ «ПІВПРОСТІР – ШАР – ШАР З ТВЕРДОЮ КРИШКОЮ»

Стаття присвячена дослідженню поширення слабконелінійних хвильових пакетів на поверхнях контакту гідродинамічної системи «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» з використанням методу багатомасштабного розвинення. Отримано розв'язки другого наближення слабконелінійної задачі та виведено умову її розв'язності. Для кожної частоти хвильового пакету побудовано області знакосталості коефіцієнта при другій гармоніці на нижній і верхній поверхнях контакту. Виявлено залежності від геометричних і фізичних параметрів гідродинамічної системи у закономірності хвилеутворення. Проаналізовано графіки форми відхилення нижньої і верхньої поверхонь контакту, які є характерними для побудованих областей знакосталості коефіцієнта. Виявлено області, де хвилі набувають U-подібної та П-подібної форми. Встановлено істотний вплив довжини хвилі на форму відхилення поверхонь контакту гідродинамічної систем.

Ключові слова: хвильовий пакет, гідродинамічна система, форма відхилення поверхні контакту.

Вступ. Дослідження хвильових процесів у рідинах, їх загальні властивості та особливості викликають великий інтерес у багатьох дослідників. На сьогодні активного розвитку набуло використання пакетів символічного обчислення і появилася можливість дослідити певні класи задач, які раніше не були доступні через громіздкість перетворень, що суттєво ускладнювало отримання аналітичних результатів. Як приклад можна навести клас задач, у яких враховується поверхневий натяг, який суттєво впливає на гравітаційно-капілярні хвилі. Подамо короткий огляд загального стану проблеми поширення хвиль у шаруватих гідродинамічних системах.

У статті [12] наведено огляд властивостей внутрішніх поодиноких хвиль, а також перехідні процеси генерування та еволюції хвиль з точки зору слабконелінійної теорії. Авторами розглянуто океанографічно важливі процеси нестійкості хвиль, які є недоступними для інших моделей. Дослідження виявило сильнонелінійні хвилі, властивості яких можна пояснити лише за допомогою нелінійних моделей.

Великий інтерес становлять дослідження міжфазових внутрішніх хвиль у тришаровій стратифікованій нестисливій рідині, проведені за допомогою сингулярного методу збурень [10]. Представлено асимптотичні розв'язки третього порядку потенціалів швидкості та хвильові розв'язки Стокса третього порядку на основі теорії хвиль малої амплітуди. Виявлено, що швидкість хвилі залежить не тільки від хвильового числа і товщини кожного шару, але і від амплітуди хвилі.

У статті [11] розглянуто модель потенціального потоку осесиметричних хвиль, що рухаються по феро-флюїдному струменю. Ця модель становить інтерес, оскільки стабілізуючий механізм дозволяє проводити осесиметричні магнітогідродинамічні солітони, а за наведеною чисельною схемою можна обчислювати стійкі періодичні та узагальнені розв'язки для поодиноких хвиль. Також встановлено, що простір розв'язків цієї моделі є подібним до простору розв'язків класичної задачі двовимірної гравітаційно-капілярної хвилі.

Достатньо повний аналіз хвильового руху подано в статті [14], де методом багатомасштабних розвинень до третього порядку виведено еволюційне

[✉] oavramenko777@gmail.com

рівняння Шредінгера для хвильового руху на поверхні контакту двох рідких півпросторів. Аналогічна задача про поширення хвильових пакетів в системі «шар – півпростір» вивчалась І. Т. Селезовим і О. В. Авраменко в [4], де досліджено проблему стійкості хвильових пакетів методом багатомасштабних розвинень до третього порядку [5, 7], а також розглянуто різні аспекти четвертого наближення проблеми еволюції нелінійних хвильових пакетів [2] і виведене еволюційне рівняння для хвильових чисел, близьких до критичного [6].

У роботі [13] досліджувалась задача про поширення внутрішніх хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердою кришкою – шар – шар з твердим дном». Зокрема, розглянуто слабконелінійну модель поширення і взаємодії хвиль уздовж поверхонь контакту, наведено перші три лінійні наближення, отримано умови поширення хвиль уздовж поверхонь контакту.

Задача про поширення хвильових пакетів у гідродинамічній системі «шар з кришкою – шар з твердим дном» з урахуванням поверхневого натягу досліджувалась методом багатомасштабних розвинень. Отримано еволюційне рівняння обвідної на поверхні контакту двох рідких шарів у формі нелінійного рівняння Шредінгера [8]. На основі отриманого рівняння проведено аналіз залежності від фізичних параметрів системи форми хвильового пакету [3].

У статтях [1, 9] досліджується задача про поширення хвиль у тришаровій гідродинамічній системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою». Побудовано три лінійні наближення слабконелінійної задачі, отримано дисперсійне рівняння та знайдено його корені, а також проведено аналіз залежності коренів дисперсійного рівняння від фізичних та геометричних параметрів системи. Наведено аналіз залежності амплітуд хвиль на поверхнях контакту від різних значень товщини верхнього шару та різних значень хвильового числа, досліджено структуру хвильових рухів.

У цій статті продовжено дослідження слабконелінійної задачі про поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі. Виведено умову розв'язності, отримано розв'язки другого наближення і проведено аналіз залежності від фізичних та геометричних параметрів системи форм хвильових пакетів на нижній та верхній поверхнях контакту.

1. Постановка та метод розв'язання. Досліджується задача про поширення двовимірних хвильових пакетів скінченної амплітуди на поверхні рідкого півпростору $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, -\infty \leq z < 0\}$ з густиною ρ_1 , рідкого шару $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, 0 \leq z \leq h_2\}$ з густиною ρ_2 і верхнього рідкого шару $\Omega_3 = \{(x, z) : |x| < \infty, h_2 \leq z \leq h_2 + h_3\}$ з густиною ρ_3 .

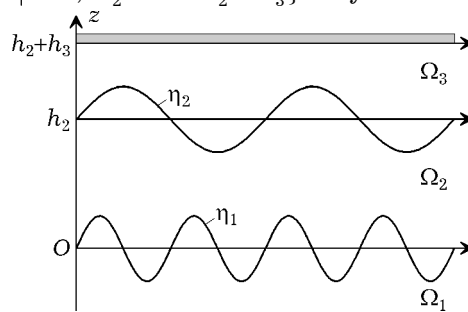


Рис. 1

Шари Ω_1 і Ω_2 розділені поверхнею контакту $z = \eta_1(x, t)$, а шари Ω_2 і Ω_3 розділені поверхнею контакту $z = h_2 + \eta_2(x, t)$, шар Ω_3 обмежений твердою кришкою $z = h_2 + h_3$. При розв'язуванні враховуються сили поверхневого натягу на поверхнях контакту, сила тяжіння направлена у від'ємному z -напрямку, рідини нестисливі (рис. 1).

Математична постановка задачі має такий вигляд:

– рівняння руху

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0 \quad \text{у} \quad \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3; \quad (1)$$

– кінематичні умови на поверхнях контакту

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = - \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \quad \text{при} \quad z = \eta_1(x, t), \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = - \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \quad \text{при} \quad z = h_2 + \eta_2(x, t), \quad j = 2, 3; \quad (3)$$

– динамічні умови на поверхнях контакту

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + g(\rho_1 - \rho_2)\eta_1 + 0.5\rho_1(\nabla \varphi_1)^2 - 0.5\rho_2(\nabla \varphi_2)^2 - \\ - T_1 \left[1 + \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = \eta_1(x, t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \rho_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} + g(\rho_2 - \rho_3)(h_2 + \eta_2) + 0.5\rho_2(\nabla \varphi_2)^2 - 0.5\rho_3(\nabla \varphi_3)^2 - \\ - T_2 \left[1 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = h_2 + \eta_2(x, t); \end{aligned} \quad (5)$$

– умова непротікання на твердій кришці

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = h_2 + h_3; \quad (6)$$

– умова затухання на нескінченності

$$|\nabla \varphi_1| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty. \quad (7)$$

тут φ_j , $j = 1, 2, 3$, – потенціали швидкостей в Ω_j ; T_1 та T_2 – коефіцієнти поверхневого натягу на поверхнях контакту, відповідно; g – прискорення вільного падіння.

Безрозмірні величини введемо за допомогою характерної довжини H , що дорівнює товщині середнього шару h_2 , характерної довжини хвилі L , максимального відхилення a поверхні контакту між шарами Ω_2 та Ω_3 , характерного часу $\frac{L}{\sqrt{gH}}$, густини нижнього шару ρ_1 . Безрозмірний коефіцієнт поверхневого натягу при цьому має вигляд $T_{1,2} = L^2 \rho_1 g T_{1,2}^*$ (надалі зірочку опускаємо).

Для визначення наближеного розв'язку задачі (1)–(7) для малих амплітуд використаємо метод багатомасштабних розвинень до третього порядку [14]

$$\eta_i(x, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{in}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

$$\varphi_j(x, z, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad j = 1, 2, 3, \quad (9)$$

де $x_k = \alpha^k x$ та $t_k = \alpha^k t$, $k = 1, 2, 3$.

Підстановка виразів (8), (9) у співвідношення (1)–(7) приводить до трьох лінійних задач відносно невідомих функцій η_{11} , η_{21} , Φ_{11} , Φ_{21} , Φ_{31} , η_{12} , η_{22} , Φ_{12} , Φ_{22} , Φ_{32} , η_{13} , η_{23} , Φ_{13} , Φ_{23} , Φ_{33} [1].

Нижче наведемо постановку задачі про поширення хвиль у тришаровій гідродинамічній системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» у другому наближенні та знайдемо її розв'язки.

2. Розв'язки та умова розв'язності задачі другого наближення. Наведемо розв'язки задачі першого наближення [1]:

$$\begin{aligned}\Phi_{11} &= -\frac{i\omega}{k}(Ae^{i\theta+kz} - \bar{A}e^{-i\theta+kz}), \\ \Phi_{21} &= -\frac{i\omega}{k}\{(\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3)\cosh k(h_2 - z) + \\ &\quad + [\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \times \\ &\quad \times \sinh kh_2]\sinh kz\}\frac{Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta}}{\rho_2\omega^2 \cosh kh_2}, \\ \Phi_{31} &= \frac{i\omega}{k}\{[\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + \\ &\quad + k\rho_2 - T_1k^3)\sinh kh_2]\cosh k(h_2 + h_3 - z)\}\frac{Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta}}{\rho_2\omega^2 \sinh kh_3}, \\ \eta_{11} &= Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}, \\ \eta_{21} &= [\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3)\sinh kh_2]\frac{Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}}{\rho_2\omega^2},\end{aligned}$$

де k – хвильове число, ω – частота хвильового пакету, $\theta = kx + \omega t$, $A(\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, h_2, h_3, T_1, T_2, \omega)$ – обвідна хвильового пакету на нижній поверхні контакту.

Задачу першого наближення досліджено в [1], де встановлено умову проходження хвиль з двома парами частот хвильового пакету $\pm\omega_1$ та $\pm\omega_2$, причому $|\omega_1| < |\omega_2|$.

Врахувавши наведені вище розв'язки задачі першого наближення, умову непротікання на твердій кришці (6) та умову згасання на нескінченності (7), задачу другого наближення [9] запишемо в такому вигляді:

$$\Phi_{12,x_0x_0} + \Phi_{12,zz} = -2\omega A_{,x_1}e^{i\theta+kz} + \text{cc} \quad \text{в} \quad \Omega_1, \quad (10)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{22,x_0x_0} + \Phi_{22,zz} &= -2\omega\{(\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3)\cosh k(h_2 - z) + \\ &\quad + [\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \times \\ &\quad \times \sinh kh_2]\sinh kz\}\frac{A_{,x_1}e^{i\theta}}{\rho_2\omega^2 \cosh kh_2} + \text{cc} \quad \text{в} \quad \Omega_2, \quad (11)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{32,x_0x_0} + \Phi_{32,zz} &= 2\omega\{[\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3)\sinh kh_2] \times \\ &\quad \times \cosh k(h_2 + h_3 - z)\}\frac{A_{,x_1}e^{i\theta}}{\rho_2\omega^2 \sinh kh_3} + \text{cc} \quad \text{в} \quad \Omega_3, \quad (12)\end{aligned}$$

$$\eta_{12,t_0} + \varphi_{12,z} = -A_{,t_1} e^{i\theta} - 2i k \omega A^2 e^{2i\theta} + \text{cc} \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (13)$$

$$\eta_{12,t_0} + \varphi_{22,z} = -A_{,t_1} e^{i\theta} - 2i k \omega (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \frac{A^2 e^{2i\theta}}{\rho_2 \omega^2} + \text{cc} \\ \text{при} \quad z = 0, \quad (14)$$

$$\eta_{22,t_0} + \varphi_{22,z} = -[\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2] \frac{A_{,t_1} e^{i\theta}}{\rho_2 \omega^2} - \\ - 2i k \omega \{[\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \times \\ \times \sinh kh_2](\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) + \\ + [\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2]^2 \times \\ \times \sinh kh_2\} \frac{A^2 e^{2i\theta}}{\rho_2^2 \omega^4 \cosh kh_2} + \text{cc} \quad \text{при} \quad z = h_2, \quad (15)$$

$$\eta_{22,t_0} + \varphi_{32,z} = -[\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2] \frac{A_{,t_1} e^{i\theta}}{\rho_2 \omega^2} + \\ + 2i k \omega \{[\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2]^2 \times \\ \times \cosh kh_3\} \frac{A^2 e^{2i\theta}}{\rho_2^2 \omega^4 \sinh kh_3} + \text{cc} \quad \text{при} \quad z = h_2, \quad (16)$$

$$\rho_1 \varphi_{12,t_0} - \rho_2 \varphi_{22,t_0} + (\rho_1 - \rho_2) \eta_{12} - T_1 \eta_{12,x_0 x_0} = \\ = 0.5 \left[\rho_2 \left(\frac{(\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3)^2}{\rho_2^2 \omega^2} - \rho_2 \omega^2 \right) \right] A \bar{A} + \\ + \left[[i\rho_1 \omega^2 - i(\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3)] \frac{A_{,t_1}}{\omega k} - 2iT_1 k A_{,x_1} \right] e^{i\theta} + \\ + \left[(\rho_1 - \rho_2) \omega^2 + 0.5\rho_2 \left((\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + \\ + k\rho_2 - T_1 k^3)^2 \frac{1}{\rho_2^2 \omega^2} - \omega^2 \right) \right] A^2 e^{2i\theta} + \text{cc} \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (17)$$

$$\rho_2 \varphi_{22,t_0} - \rho_3 \varphi_{32,t_0} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_{22} - T_2 \eta_{22,x_0 x_0} = \\ = 0.5 \left[(\rho_2 - \rho_3) \left([\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \times \\ \times \sinh kh_2]^2 \frac{1}{\rho_2^2 \omega^2} \right) + \rho_3 \left([(\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + \\ + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2) \cosh kh_3] \frac{1}{\rho_2 \omega \sinh kh_3} \right)^2 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\rho_2 \left([(\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) + (\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + \right. \\
& + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2) \sinh kh_2] \times \\
& \times \left. \frac{1}{\rho_2\omega \cosh kh_2} \right)^2 A\bar{A} + \left[(i\rho_2[(\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) + \right. \\
& + (\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2) \times \\
& \times \sinh kh_2] \frac{1}{\rho_2\omega k \cosh kh_2} + i\rho_3[(\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - \\
& - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2) \cosh kh_3] \frac{1}{\rho_2\omega k \sinh kh_3} \Big) A_{,t_1} + \\
& + \left([-(i\rho_2h_2 + i\rho_3h_3)(\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - \\
& - T_1k^3) \sinh kh_2)] \frac{1}{\rho_2k} + [2iT_2k(\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - \\
& - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2)] \frac{1}{\rho_2\omega^2} \Big) A_{,x_1} \right] e^{i\theta} + \\
& + \left[(1.5\rho_2 - 1.5\rho_3)[\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \times \right. \\
& \times \sinh kh_2]^2 \frac{1}{\rho_2^2\omega^2} - 0.5\rho_2[\rho_2\omega^2 \sinh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + \\
& + k\rho_2 - T_1k^3) \cosh kh_2]^2 \frac{1}{\rho_2^2\omega^2} + 0.5\rho_3[(\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + \\
& + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2) \cosh kh_3]^2 \times \\
& \times \left. \frac{1}{(\rho_2\omega \sinh kh_3)^2} \right] A^2 e^{2i\theta} + \text{cc} \quad \text{при} \quad z = h_2. \quad (18)
\end{aligned}$$

Тут і далі через cc позначено комплексно-спряжену величину до попередніх членів; $A_{,x_1} = \frac{\partial A}{\partial x_1}$, $A_{,t_1} = \frac{\partial A}{\partial t_1}$ – частинні похідні обвідної хвильового пакету на нижній поверхні контакту $z = \eta_1(x, t)$.

Розв'язок системи (10)–(18) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned}
\Phi_{12} &= (B_{10}^{(2)} + B_{11}^{(2)} \cdot z) e^{i\theta + kz} + B_{20}^{(2)} e^{2i\theta + 2kz} + \text{cc}, \\
\Phi_{22} &= (C_{10}^{(2)} + C_{11}^{(2)} \cdot z) e^{i\theta + k(h_2 - z)} + C_{20}^{(2)} e^{2i\theta + 2k(h_2 - z)} + \\
&+ (D_{10}^{(2)} + D_{11}^{(2)} \cdot z) e^{i\theta - k(h_2 - z)} + D_{20}^{(2)} e^{2i\theta - 2k(h_2 - z)} + \text{cc}, \\
\Phi_{32} &= E_{10}^{(2)} \cosh k(h_2 + h_3 - z) e^{i\theta} + E_{11}^{(2)} (h_2 + h_3 - z) \sinh k(h_2 + h_3 - z) e^{i\theta} + \\
&+ E_{20}^{(2)} \cosh 2k(h_2 + h_3 - z) e^{2i\theta} + \text{cc},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{12} &= F_0^{(2)} + F_1^{(2)}e^{i\theta} + F_2^{(2)}e^{2i\theta} + \text{с.с.}, \\ \eta_{22} &= G_0^{(2)} + G_1^{(2)}e^{i\theta} + G_2^{(2)}e^{2i\theta} + \text{с.с.},\end{aligned}\quad (19)$$

де $B_{ij}^{(2)}$, $C_{ij}^{(2)}$, $D_{ij}^{(2)}$, $E_{ij}^{(2)}$, $F_i^{(2)}$, $G_i^{(2)}$ – невідомі коефіцієнти.

Підставивши вирази (19) для невідомих функцій, а також розв'язки задачі першого наближення [9] у рівняння (10)–(12), нескладно отримати коефіцієнти $B_{11}^{(2)}$, $C_{11}^{(2)}$, $D_{11}^{(2)}$, $E_{11}^{(2)}$.

Підставляючи (19) в умови (13)–(18) і прирівнюючи вирази при однакових функціях, приходимо до двох незалежних систем рівнянь відносно інших невідомих коефіцієнтів. Таким чином, прирівнявши вирази при функції $e^{i\theta}$, отримуємо систему відносно коефіцієнтів $B_{10}^{(2)}$, $C_{10}^{(2)}$, $D_{10}^{(2)}$, $E_{10}^{(2)}$, $F_1^{(2)}$, $G_1^{(2)}$:

$$\begin{aligned}-k B_{10}^{(2)} - i\omega F_1^{(2)} &= b_1, \\ k e^{kh_2} C_{10}^{(2)} - k e^{-kh_2} D_{10}^{(2)} - i\omega F_1^{(2)} &= b_2, \\ k C_{10}^{(2)} - k D_{10}^{(2)} - i\omega G_1^{(2)} &= b_3, \\ k \sinh kh_3 E_{10}^{(2)} - i\omega G_1^{(2)} &= b_4, \\ -i\rho_1 \omega B_{10}^{(2)} + i\rho_2 \omega e^{kh_2} C_{10}^{(2)} + i\rho_2 \omega e^{-kh_2} D_{10}^{(2)} + (\rho_1 - \rho_2 + T_1 k^2) F_1^{(2)} &= b_5, \\ -i\rho_2 \omega C_{10}^{(2)} - i\rho_2 \omega D_{10}^{(2)} + i\rho_3 \omega \cosh kh_3 E_{10}^{(2)} + (\rho_2 - \rho_2 + T_2 k^2) G_{10}^{(2)} &= b_6,\end{aligned}\quad (20)$$

з вільними членами

$$\begin{aligned}b_1 &= -A_{,t_1} - \frac{\omega}{k} A_{,x_1}, \\ b_2 &= -A_{,t_1} - \frac{\omega}{k} A_{,x_1}, \\ b_3 &= -[\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2] \frac{A_{,t_1}}{\rho_2 \omega^2} - \\ &\quad - [\rho_2 \omega^2 (kh_2 \sinh kh_2 + \cosh kh_2) + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \times \\ &\quad \times (kh_2 \cosh kh_2 + \sinh kh_2)] \frac{A_{,x_1}}{k\rho_2 \omega}, \\ b_4 &= -[(\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2)] \frac{A_{,t_1}}{\rho_2 \omega^2} - \\ &\quad - [\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2] \times \\ &\quad \times \left(1 + \frac{kh_3 \cosh kh_3}{\sinh kh_3}\right) \frac{A_{,x_1}}{k\rho_2 \omega}, \\ b_5 &= -i[\rho_1 \omega^2 - (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3)] \frac{A_{,t_1}}{k\omega} + 2iT_1 k A_{,x_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_6 = & \left(\frac{i\rho_2(\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3)}{\rho_2\omega^2k \cosh kh_2} + \left(i\rho_2 \frac{\sinh kh_2}{\cosh kh_2} + i\rho_3 \frac{\cosh kh_3}{\sinh kh_3} \right) \times \right. \\
& \times [\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2] \times \\
& \times \left. \frac{1}{\rho_2\omega^2k} \right) A_{,t_1} + \left(2iT_2k [\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + \right. \\
& + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2] \frac{1}{\rho_2\omega^2} - i(\rho_2h_2 + \rho_3h_3) [\rho_2\omega^2 \times \\
& \times \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2] \frac{1}{k\rho_2} \left. \right) A_{,x_1}.
\end{aligned}$$

Система (20) несумісна, при $F_1^{(2)} = 0$ умова її розв'язності має такий вигляд:

$$\begin{vmatrix}
-k & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 \\
0 & ke^{kh_2} & -ke^{-kh_2} & 0 & b_2 & 0 \\
0 & k & -k & 0 & b_3 & -i\omega \\
0 & 0 & 0 & k \sinh kh_3 & b_4 & -i\omega \\
-i\rho_1\omega & i\rho_2\omega e^{kh_2} & i\rho_2\omega e^{-kh_2} & 0 & b_5 & 0 \\
0 & -i\rho_2\omega & -i\rho_2\omega & i\rho_3\omega \cosh kh_3 & b_6 & \rho_2 - \rho_3 + T_2k^2
\end{vmatrix} = 0.$$

Виділивши доданки з похідними $A_{,x_1}$, $A_{,t_1}$ від обвідної хвильового пакету, умову розв'язності перепишемо так:

$$V_1 A_{,t_1} + V_2 A_{,x_1} = 0, \quad (21)$$

де V_i , $i = 1, 2$, - коефіцієнти, які залежать від ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , k , h_2 , h_3 , T_1 , T_2 , ω .

Якщо виконується умова (21), то система відносно коефіцієнтів $B_{10}^{(2)}$, $C_{10}^{(2)}$, $D_{10}^{(2)}$, $E_{10}^{(2)}$, $G_1^{(2)}$:

$$-kB_{10}^{(2)} = b_1,$$

$$ke^{kh_2}C_{10}^{(2)} - ke^{-kh_2}D_{10}^{(2)} = b_2,$$

$$kC_{10}^{(2)} - kD_{10}^{(2)} - i\omega G_1^{(2)} = b_3,$$

$$k \sinh kh_3 E_{10}^{(2)} - i\omega G_1^{(2)} = b_4,$$

$$-i\rho_2\omega C_{10}^{(2)} - i\rho_2\omega D_{10}^{(2)} + i\rho_3\omega \cosh kh_3 E_{10}^{(2)} + (\rho_2 - \rho_3 + T_2k^2)G_1^{(2)} = b_6$$

має розв'язок, який отримано у пакеті символьних обчислень, і тут його не наводимо.

Система відносно коефіцієнтів $B_{20}^{(2)}$, $C_{20}^{(2)}$, $D_{20}^{(2)}$, $E_{20}^{(2)}$, $F_2^{(2)}$, $G_2^{(2)}$, отримана прирівнюванням виразів при $e^{2i\theta}$, є сумісною, невідомі коефіцієнти також знайдено у пакеті символьних обчислень.

Із останніх двох умов (17), (18), прирівнявши вирази при e^0 , отримаємо значення коефіцієнтів F_0 і G_0 :

$$\begin{aligned}
F_0 &= \left(\frac{0.5}{\rho_1 - \rho_2} \left(-\rho_2 \left((\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3)^2 \frac{1}{\rho_2^2 \omega^2} \right) + \rho_2 \omega^2 \right) \right) A\bar{A}, \\
G_0 &= \left(\frac{0.5}{\rho_2 - \rho_3} \left(-(\rho_2 - \rho_3) \left((\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \times \right. \right. \right. \\
&\quad \times \sinh kh_2)^2 \frac{1}{\rho_2^2 \omega^2} \left. \left. \left. - \rho_3 \left((\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2) \cosh kh_3 \frac{1}{\rho_2 \omega \sinh kh_3} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \rho_2 \left(\{ (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) + [\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2 \} \sinh kh_2 \right) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \times \frac{1}{\rho_2 \omega \cosh kh_2} \right)^2 \right) \right) A\bar{A}.
\end{aligned}$$

Отже, розв'язки другого наближення запишемо так:

$$\begin{aligned}
\eta_{12} &= F_0 A\bar{A} + \Lambda_1 A^2 e^{2i\theta} + cc, \\
\eta_{22} &= G_0 A\bar{A} + S_1 A_{,t_1} e^{i\theta} + S_2 A_{,x_1} e^{i\theta} + \Lambda_2 A^2 e^{2i\theta} + cc, \\
\varphi_{12} &= \frac{1}{k} \left(A_{,t_1} + \frac{\omega}{k} (1 - kz) A_{,x_1} \right) e^{i\theta + kz} + \frac{i\omega}{k} S_3 A^2 e^{2(i\theta + kz)} + cc, \\
\varphi_{22} &= \frac{1}{k} \left(S_{41} A_{,t_1} + \frac{\omega}{k} (S_{42} + S_{43} z) A_{,x_1} \right) e^{i\theta} e^{k(h_2 - z)} + \frac{1}{k} \left(S_{44} A_{,t_1} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\omega}{k} (S_{45} + S_{46} z) A_{,x_1} \right) e^{i\theta} e^{-k(h_2 - z)} + \frac{i\omega}{k} \left(S_{47} e^{2k(h_2 - z)} + \right. \\
&\quad \left. + S_{48} e^{-2k(h_2 - z)} \right) A^2 e^{2i\theta} + cc, \\
\varphi_{32} &= \frac{1}{k} \left(S_{51} \cosh k(h_2 + h_3 - z) A_{,t_1} + \frac{\omega}{k} (S_{52} \cosh k(h_2 + h_3 - z) + \right. \\
&\quad \left. + S_{53} (h_2 + h_3 - z) \sinh k(h_2 + h_3 - z)) A_{,x_1} \right) e^{i\theta} + \\
&\quad + \frac{i\omega}{k} S_{54} \cosh 2k(h_2 + h_3 - z) A^2 e^{2i\theta} + cc, \tag{22}
\end{aligned}$$

де $S_1, S_2, S_3, S_{41}, S_{42}, S_{43}, S_{44}, S_{45}, S_{46}, S_{47}, S_{48}, S_{51}, S_{52}, S_{53}, S_{54}, \Lambda_1, \Lambda_2$ – коефіцієнти, які залежать від $\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, h_2, h_3, T_1, T_2, \omega$. При цьому з огляду на умови розв'язності (21) маємо $S_1 = S_2 = 0$.

3. Аналіз форми хвильового пакету на поверхнях контакту. Для визначення форми відхилення поверхонь контакту важливим є знак коефіцієнтів Λ_1 та Λ_2 при других гармоніках на поверхнях. Використовуючи вирази для першого [1] та другого (22) наближень відхилення поверхонь контакту, побудуємо області знакосталості Λ_1 і Λ_2 та проаналізуємо форму хвиль на поверхнях контакту. Дослідження будемо проводити при фіксованому значенні густини нижнього шару $\rho_1 = 1$.

Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Густина нижнього півпростору ρ_1 і середнього шару ρ_2 є фіксованими та дорівнюють $\rho_1 = 1$ і $\rho_2 = 0.9$, відповідно, а густина верхнього шару ρ_3 змінюється від 0 до ρ_2 . Значення інших параметрів системи є такими: $0 \leq k \leq 3.5$, $h_2 = 1$, $T_1 = T_2 = 0$.

1.1. Форма відхилення нижньої поверхні контакту. Форма відхилення нижньої поверхні контакту $\eta_1(x, t)$ залежить від знаку коефіцієнта Λ_1 при другій гармоніці. Аналіз знаку Λ_1 виявив, що на площині (ρ_3, k) існують криві L_1 та L_2 , уздовж яких Λ_1 дорівнює нулеві, та крива L_3 , в околі якої Λ_1 набуває як завгодно великих значень. При переході через криві L_1 , L_2 та L_3 знак коефіцієнта Λ_1 змінюється на протилежний.

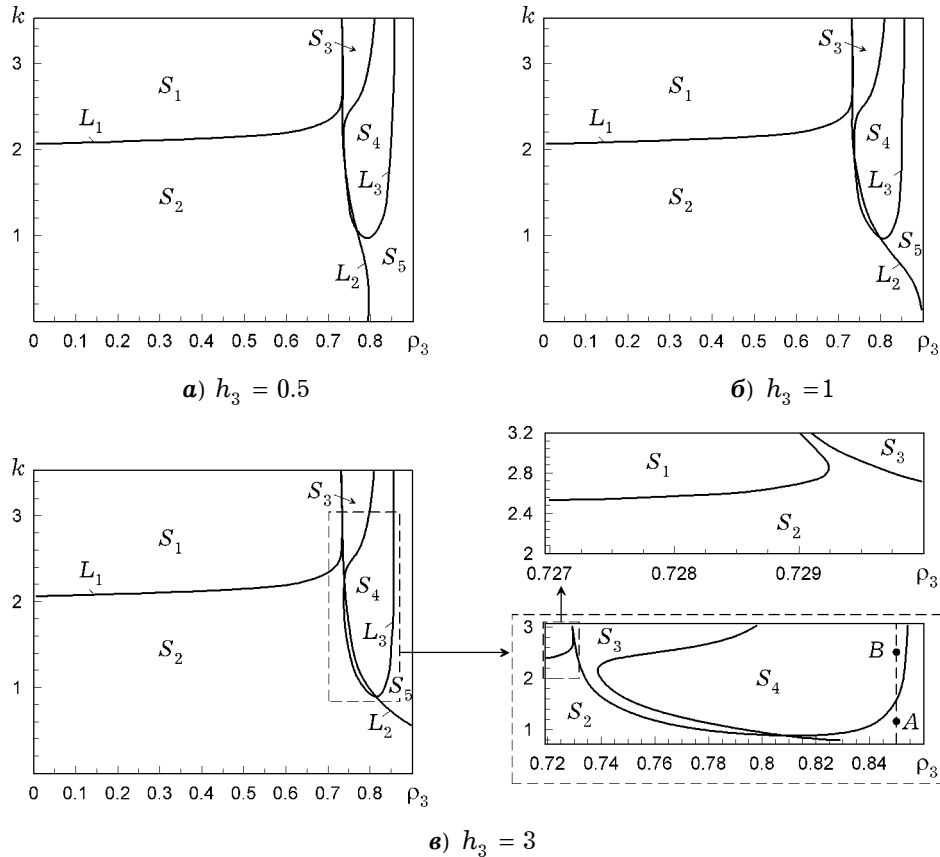


Рис. 2. Области знакосталості Λ_1 на площині (ρ_3, k) .

Як видно на рис. 2, криві L_1 , L_2 та L_3 розбивають площину (ρ_3, k) на п'ять областей. В областях S_1 , S_3 , S_5 , де коефіцієнт Λ_1 при другій гармоніці набуває додатних значень, мають місце хвилі з загостреними гребнями та затупленими підшвами. У двох інших областях S_2 , S_4 , де $\Lambda_1 < 0$, спостерігаються хвилі із затупленими гребнями та гострими підшвами.

Виявлено, що зі зростанням товщини верхнього шару h_3 збільшується площа області S_2 , де довгі хвилі мають \cap -подібну форму (рис. 2а, б). Дослідження також показали, що між областями S_1 та S_3 вклинюється вузька частина області S_2 , а між областями S_2 та S_4 – вузька частина області S_3 (рис. 2в).

На рис. 2в відмічено точки A та B , для яких на рис. 3 побудовано графіки форми відхилення нижньої поверхні контакту $\eta_1(x, t)$. Ці точки вибрані для дослідження зміни форми хвилі при переході через криву L_3 . В околі кривої L_3 значення Λ_1 змінює знак з плюса на мінус і набуває як заведено великих значень, при цьому спостерігається істотний вплив другої гармоніки на форму поверхні контакту. Графіки форми відхилення нижньої поверхні контакту $\eta_1(x, t)$ (рис. 3) побудовано для частоти хвильового пакету ω_1 і параметрів системи $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.9$, $\rho_3 = 0.85$, $h_2 = 1$, $h_3 = 3$, $T_1 = T_2 = 0$, $a = 0.15$, $\alpha = 0.1$ у точці A (рис. 3а), де $k = 1.2$, і в точці B (рис. 3б), де $k = 2.5$ (розміщення точок див. на рис. 2в).

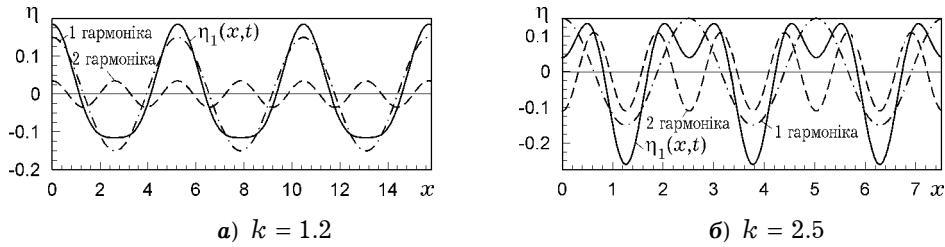


Рис. 3. Графік форми відхилення нижньої внутрішньої поверхні контакту $\eta_1(x, t)$.

Як видно з рис. 3а, амплітуда першої гармоніки більша від амплітуди другої гармоніки, а період другої гармоніки є вдвічі меншим, тому накладання мінімуму першої гармоніки та максимуму другої гармоніки призводить до затуплення підшов поверхні контакту. При накладанні максимуму першої гармоніки та наступного максимуму другої гармоніки спостерігається загострення гребеня хвилі. Отже, форма відхилення нижньої поверхні контакту в області S_5 набуває U-подібної форми.

Графік форми відхилення поверхні контакту, поданий на рис. 3б, демонструє форму хвилі в області S_4 , де Λ_1 набуває від'ємних значень. Тут можемо бачити картину, коли при накладанні мінімумів першої і другої гармоніки спостерігається загострення підшов хвилі, а при накладанні максимуму першої гармоніки та наступного мінімуму другої гармоніки призводить до затуплення гребеня хвилі. Отже, в області S_4 спостерігаються \cap -подібні хвилі.

У ході дослідження також виявлено, що в межах однієї області спостерігається істотний вплив значення хвильового числа k на значення амплітуд гармонік при однакових інших значеннях параметрів системи.

1.2 Форма відхилення верхньої поверхні контакту. На рис. 4 побудовано області знакосталості коефіцієнта Λ_2 для частоти ω_2 хвильового пакету та наступних значень параметрів: $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.9$, $0 \leq \rho_3 \leq \rho_2$, $0 \leq k \leq 4.5$, $h_2 = 1$, $T_1 = T_2 = 0$.

Як видно з рис. 4, криві L_4 та L_5 , уздовж яких коефіцієнт Λ_2 дорівнює нулеві, розбивають площину (ρ_3, k) на три області. В областях S_6 , S_8 коефіцієнт Λ_2 набуває додатних значень, а в області S_7 коефіцієнт $\Lambda_2 < 0$. При цьому площа області S_7 зменшується зі зростанням значення товщини верхнього шару h_3 . Кривих, в околі яких Λ_2 може набувати як заведено великих значень, не виявлено.

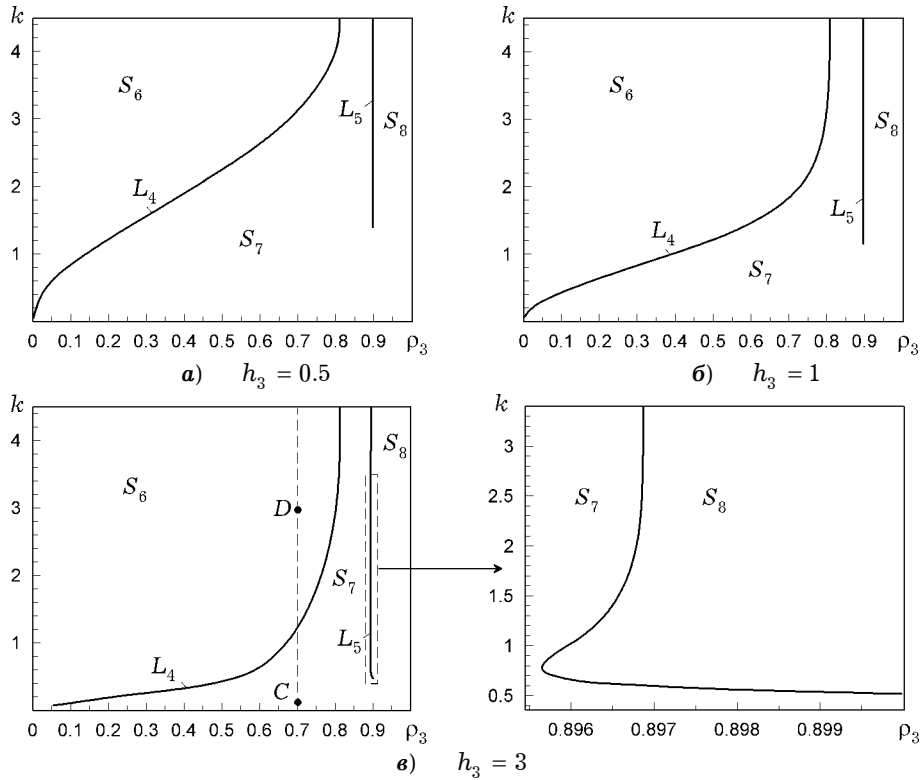


Рис. 4. Области знакосталості Λ_2 на площині (ρ_3, k) .

Побудуємо графіки відхилення верхньої поверхні контакту для значень параметрів системи: $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.9$, $\rho_3 = 0.7$, $h_2 = 1$, $h_3 = 3$, $T_1 = T_2 = 0$, $a = 0.15$, $\alpha = 0.1$ у точках C та D (див. рис. 4в), у яких $k = 0.1$ та $k = 3$ відповідно.

Як видно з рис. 5а, у випадку, коли коефіцієнт Λ_2 набуває від'ємних значень, спостерігається накладання мінімумів першої та другої гармоніки, що призводить до загострення підошов хвилі, а накладання максимуму першої гармоніки та наступного мінімуму другої гармоніки призводить до затуплення гребеня хвилі.

На рис. 5б подано випадок, коли Λ_2 додатне. При цьому накладання максимумів першої і другої гармонік призводить до загострення гребеня хвилі, а накладання мінімуму першої гармоніки та наступного максимуму другої гармоніки – до затуплення підошов хвилі. Отже, в областях S_6 , S_8 хвиля має \cup -подібну, а в області S_7 – \cap -подібну форму.

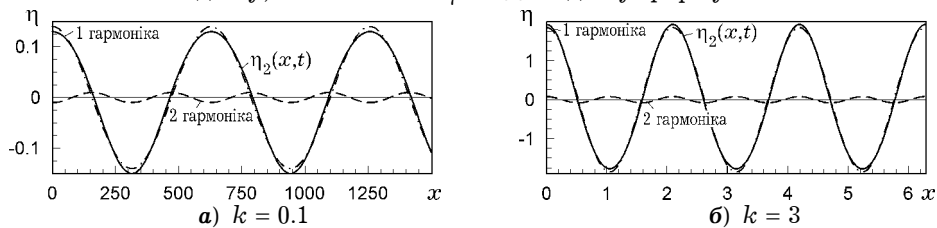


Рис. 5. Графік форми відхилення верхньої внутрішньої поверхні контакту $\eta_2(x, t)$.

Випадок 2. Зафіксуємо значення густини нижнього півпростору $\rho_1 = 1$ та верхнього шару $\rho_3 = 0.8$, а значення густини середнього шару ρ_2 змінюватимемо від ρ_3 до ρ_1 . Значення інших параметрів такі: $0 \leq k \leq 3.5$, $h_2 = 1$, $T_1 = T_2 = 0$.

2.1. Форма відхилення нижньої поверхні контакту. На рис. 6 наведено області знакосталості коефіцієнта Λ_1 при другій гармоніці на нижній поверхні контакту. Графіки побудовано для різних значень h_3 при таких параметрах систем: $\rho_1 = 1$, $\rho_3 \leq \rho_2 \leq \rho_1$, $\rho_3 = 0.8$, $h_2 = 1$, $T_1 = T_2 = 0$.

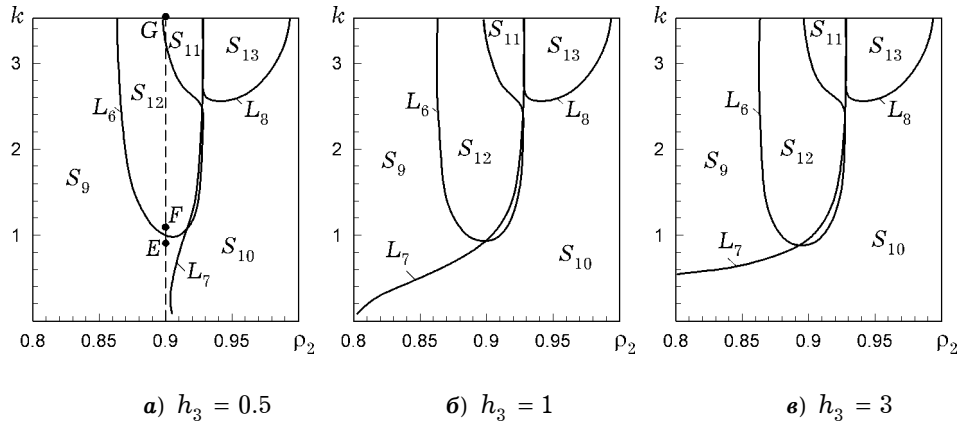


Рис. 6. Области знакосталості Λ_1 на площині (ρ_2, k) .

Виявлено криві L_6 , L_7 та L_8 , які розбивають площину (ρ_2, k) на п'ять областей і при переході через які значення коефіцієнта Λ_1 при другій гармоніці на нижній поверхні контакту змінюється на протилежне. При цьому вздовж кривих L_7 та L_8 значення Λ_1 дорівнює нулеві, а вздовж кривої L_6 набуває як завгодно великих значень. В областях S_9 , S_{11} , S_{13} (де коефіцієнт $\Lambda_1 > 0$) мають місце хвилі з \cup -подібною формою. В областях S_8 , S_{10} (де коефіцієнт $\Lambda_1 < 0$) форма хвилі має \cap -подібну форму. Відмітимо, що, як і у розглянутому вище **випадку 1** для Λ_1 (рис. 2), спостерігається вплив товщини верхнього шару h_3 на площу області S_{10} : зі зростанням значення товщини верхнього шару збільшилась площа області S_{10} у тій частині, де довгі хвилі мають \cap -подібну форму. Також наявні вклинювання вузьких областей з іншим знаком коефіцієнта.

На рис. 6а позначено три точки E , F , G ($k = 0.9$, $k = 1.1$, $k = 3.5$, відповідно), для яких побудовано графіки (рис. 7) форми відхилення нижньої поверхні контакту $\eta_1(x, t)$ за таких параметрів системи: $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.9$, $\rho_3 = 0.85$, $h_2 = 1$, $h_3 = 0.5$, $T_1 = T_2 = 0$, $a = 0.15$.

Графіки форми відхилення нижньої поверхні контакту $\eta_1(x, t)$, зображені на рис. 7а, б, відповідають точкам E та F , що належать областям, які розділені кривою L_6 . Точка E належить області S_9 , де коефіцієнт Λ_1 набуває додатних значень, а тому хвилі мають \cup -подібну форму. Точка F належить області S_{12} (де $\Lambda_1 < 0$), тому тут спостерігається \cap -подібна форма хвиль.

Графік форми відхилення поверхні, наведений на рис. 7в, демонструє форму хвиль в області S_{11} (де коефіцієнт $\Lambda_1 > 0$), яка відмежована від області S_{12} кривою L_7 . Уздовж цієї кривої значення Λ_1 дорівнює нулеві, тому в її околі спостерігається гасіння другої гармоніки.

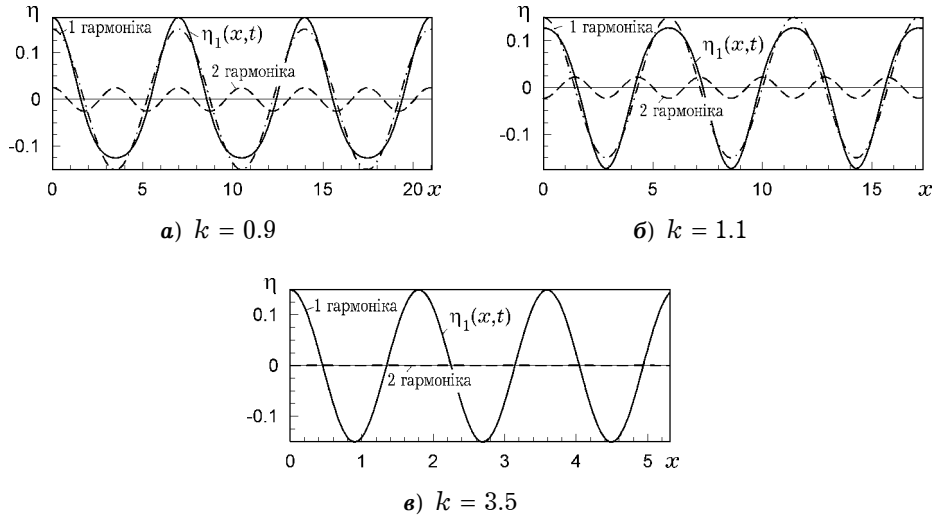


Рис. 7. Графіки форми відхилення нижньої поверхні контакту $\eta_1(x, t)$.

2.2. Форма відхилення верхньої поверхні контакту. На рис. 8 побудовано області знакосталості коефіцієнта Λ_2 при другій гармоніці верхньої поверхні контакту для частоти хвильового пакету ω_2 і параметрів системи: $\rho_1 = 1$, $\rho_3 \leq \rho_2 \leq \rho_1$, $\rho_3 = 0.8$, $0 \leq k \leq 4.5$, $h_2 = 1$, $T_1 = T_2 = 0$.

Виявлено дві криві L_9 та L_{10} (вздовж яких $\Lambda_2 = 0$), які розбивають площину (ρ_2, k) на три області. В областях, де Λ_2 набуває додатних значень (S_{14} , S_{16}), спостерігається U-подібна форма хвилі. В області S_{15} Λ_2 набуває від'ємних значень, тому хвилі тут приймають \cap -подібну форму. Аналогічно до *випадку 1* для коефіцієнта Λ_2 (рис. 4), площа області S_{15} зменшується зі зростанням значення товщини верхнього шару h_3 .

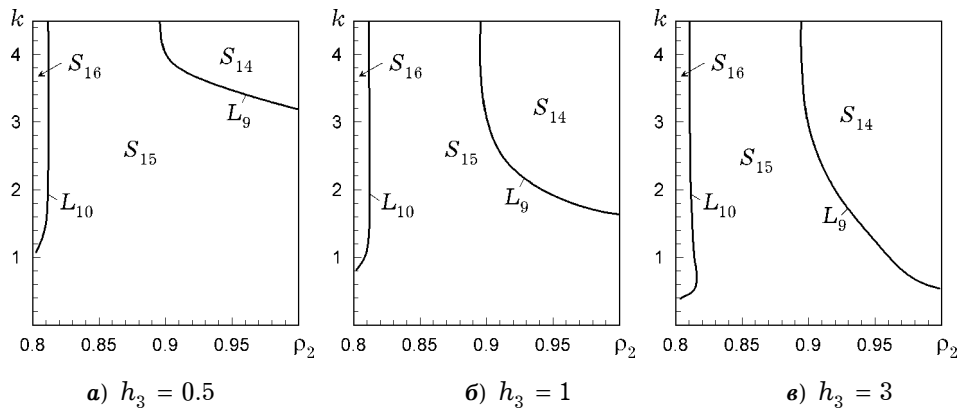


Рис. 8. Области знакосталості Λ_2 на площині (ρ_2, k) .

Висновки. Розглянуто слабконелінійну задачу поширення хвильових пакетів у системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою». Методом багатомасштабних розвинень до третього порядку здійснено постановку задачі другого наближення, отримано умову розв'язності та знайдено її розв'язки. Для кожної частоти центру хвильового пакету побудовано області знакосталості коефіцієнта при другій гармоніці на нижній і верхній поверхнях контакту. Виявлено такі ефекти та закономірності:

- в областях плоскостей (ρ_2, k) та (ρ_3, k) , де коефіцієнти Λ_1 та Λ_2 других гармонік на нижній та верхній поверхні контакту відповідно набувають додатних значень, спостерігаються хвилі U-подібної форми. В іншому випадку, коли Λ_1 та Λ_2 від'ємні, хвилі набувають \cap -подібної форми;
- капілярні хвилі здебільшого набувають U-подібної форми, при цьому виявлено дві вузькі області \cap -подібної форми.
- виявлено вплив значення товщини верхнього шару на області U-подібних та \cap -подібних хвиль. Зокрема, зі збільшенням товщини верхнього шару збільшується площа області, де довгі хвилі мають \cap -подібну форму, а області U-подібних хвиль звужуються;
- виявлено області гасіння другої гармоніки, а також області істотного впливу другої гармоніки на форму поверхні контакту.

1. Авраменко О. В., Наратовий В. В., Луньова М. В., Селезов І. Т. Умови поширення хвиль у напівнескінченній тришаровій гідродинамічній системі з твердою кришкою // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2017. – **60**, № 4. – С. 137–151.
2. Авраменко О. В., Селезов І. Т. Структура нелинейных волновых пакетов на поверхности контакта жидких сред // *Прикл. гидромеханика.* – 2002. – **4**(76), № 4. – С. 3–13.
3. Гуртовий Ю. В. Еволюція і асиметрія нестійких хвильових пакетів в двошаровій рідині // *Наук. зап. [Центральноукр. держ. пед. ун-ту]. Сер. Мат. науки.* – 2008. – Вип. 67. – С. 21–26.
4. Селезов І. Т., Авраменко О. В. Нелинейное распространение волновых пакетов при околокритических волновых числах в кусочно-неоднородной по глубине жидкости // *Теорет. прикл. механика.* – 2000. – Вып. 31. – С. 151–157.
5. Селезов І. Т., Авраменко О. В. Устойчивость волновых пакетов в слоистых гидродинамических системах с учетом поверхностного натяжения // *Прикл. гидромеханика.* – 2001. – **3** (75), № 4. – С. 38–46.
6. Селезов І. Т., Авраменко О. В. Эволюционное уравнение третьего порядка для нелинейных волновых пакетов при околокритических волновых числах // *Динам. системы.* – 2001. – Вып. 17. – С. 58–67.
7. Селезов І. Т., Авраменко О. В. Эволюция нелинейных волновых пакетов с учетом поверхностного натяжения на поверхности контакта // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2001. – **44**, № 2. – С. 113–122.
8. Селезов І. Т., Авраменко О. В., Гуртовий Ю. В. Нелинейная устойчивость распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости // *Прикл. гидромеханика.* – 2006. – **8** (80), № 4. – С. 60–65.
9. Avramenko O. V., Lunyova M. V., Naratovyi V. V. Wave propagation in a three-layer semi-infinite hydrodynamic system with a rigid lid // *East-Europ. J. Enterprise Technol.* – 2017. – **5**, No. 5 (89). – P. 58–66.
– doi: 10.15587/1729-4061.2017.111941.
10. Chen X.-G. et al. Third-order Stokes wave solutions for interfacial internal waves in a three-layer density-stratified fluid // *Chinese Phys.* **B.** – 2009. – **18**, No. 5. – P. 1906–1916. – <https://doi.org/10.1088/1674-1056/18/5/031>.
11. Doak A., Vanden-Broeck J.-M. Travelling wave solutions on an axisymmetric ferrofluid jet // *J. Fluid Mech.* – 2019. – **865**. – P. 414–439.
– <https://doi.org/10.1017/jfm.2019.60>.
12. Helfrich K. R.; Melville W. K. Long nonlinear internal waves // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2006. – **38**. – P. 395–425.
– <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.38.050304.092129>.
13. Hurtovyi Yu., Naratovyi V. V., Bohdanov V. M. Analysis of conditions for the propagation of internal waves in a three-layer finite-depth liquid // *East. Europ. J. Enterprise Technol.* – 2018. – **3**, No. 5 (93). – P. 37–47.
– <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.132691>.
14. Nayfeh A. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // *Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E.* – 1976. – **43**, No. 4. – P. 584–588.
– <https://doi.org/10.1115/1.3423936>.

АНАЛИЗ ФОРМЫ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В ТРЁХСЛОЙНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ «ПОЛУПРОСТРАНСТВО – СЛОЙ – СЛОЙ С ТВЁРДОЙ КРЫШКОЙ»

Статья посвящена исследованию распространения слабонелинейных волновых пакетов на поверхностях контакта гидродинамической системы «полупространство – слой – слой с твердой крышкой» с применением метода многомасштабного разложения. Получены решения второго приближения слабонелинейной задачи и выведено условие ее разрешимости. Для каждой частоты волнового пакета построены области знакопостоянства коэффициента при второй гармонике на нижней и верхней поверхностях контакта. Выявлены закономерности волнообразования в зависимости от геометрических и физических параметров гидродинамической системы. Проанализированы графики формы отклонения нижней и верхней поверхностей контакта, характерные для построенных областей знакопостоянства коэффициента. Выявлены области, где волны приобретают U-образную и П-образную формы. Отмечается существенное влияние длины волны на форму отклонения поверхностей контакта гидродинамической системы.

Ключевые слова: волновой пакет, гидродинамическая система, форма отклонения поверхности контакта.

ANALYSIS OF THE WAVE PACKETS FORM IN THREE-LAYER HYDRODYNAMIC SYSTEM «HALF SPACE – LAYER – LAYER WITH A RIGID COVER»

The article is devoted to the study of the propagation of weakly nonlinear wave packets on the contact surfaces of the hydrodynamic system «half space – layer – layer with rigid cover» by the method of multiscale expansions. The solutions of the second approximation of the weakly nonlinear problem are obtained and a condition for its solvability are derived. For each frequency of the wave packet, the domains of constant-sign of the coefficient for the second harmonic on the lower and upper contact surfaces are constructed. The regularities of wave formation depending on the geometric and physical parameters of the hydrodynamic system are revealed. The plots of the deviation form between the lower and upper contact surfaces which are characteristic for the constructed domains of constant-sign of the coefficient are analyzed. The domains of U-form and П-form of the waves are established. The significant effect of the wavelength on the form of the deviation of the contact surfaces of hydrodynamic system is noted.

Key words: wave packet, hydrodynamic system, form of the deviation of the contact surface.

Центральноукр. держ. пед. ун-т
ім. В. Винниченка, Кропивницький

Отримано
02.09.19