которое вместе с $(k+p)$-й усеченной системой дает следующее представление решения $x^{(k+p)}$:

$$x^{(k+p)} = \begin{pmatrix} O_p \\ x^{(k)} \end{pmatrix} + T^{-1}_{k+p,n-k-p} \begin{pmatrix} O_k \\ d_{k+1} - \Gamma_{k+1,k-1}x^{(k)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ d_{k+p} - \Gamma_{k+p,k-1}x^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Используя представление (4) в форме (12) для матрицы $T^{-1}_{k+p,n-k-p}$, приходим к формуле (14).

Алгоритм решения систем уравнений 13:

1. Решение начальной усеченной системы:

а) если $D_1 \neq 0$, то $a_1^{(1)} = -c_{1-n}^{-1}c_{2-n}$, $b_1^{(1)} = c_{1-n}^{-1}$ и решение 1-й усеченной системы $x_1^{(1)} = c_{1-n}^{-1}d_1$;

б) если $D_1 = 0$, $D_2 = 0, \ldots, D_{m-1} = 0$, $D_m \neq 0$, то $a_i^{(m)}$, $b_i^{(m)}$ определяются формулами (11), а решение m-й усеченной системы дается формулой

$$x_i^{(m)} = c_{m-n}^{-1}\left(d_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{m+j-n}x_{i-j}^{(m)}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

2. Общий рекуррентный шаг. Пусть $D_k \neq 0$, $D_{k+1} = 0, \ldots, D_{k+p-1} = 0$, $D_{k+p} \neq 0$. Тогда f_{k+p}, g_{k+p} находим по формуле (7), а решение $(k+p)$-й усеченной системы определяется формулой (14).

В заключение отметим, что для численной реализации каждого из предложенных здесь алгоритмов требуется $3n^2$ умножений.

1. *Балинский А. И., Ли Гюн-ы.* Об обращении ганкелевых и теплицевых матриц. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1979, вып. 9, с. 31—37.
2. *Воеводин В. В., Тартышников Е. Е.* Вычисления с теплицевыми матрицами. — Вычисл. процессы и системы, 1983, вып. 1, с. 124—266.
3. *Крейн М. Г., Неймарк М. А.* Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. — Харьков: Гостехиздат Украины, 1936.—44 с.
4. *Ли Гюн-ы.* К обращению и восстановлению теплицевых матриц.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 21—28.

Ин-т прикладных проблем
механики и математики АН УССР,
Львов

Получено 25.06.84

УДК 512.8

В. П. Щедрик

К ВЫДЕЛЕНИЮ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО УНИТАЛЬНОГО МНОЖИТЕЛЯ ИЗ МАТРИЧНОГО МНОГОЧЛЕНА

Пусть $A(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_{s-1}x + A_s$, $|A(x)| \not\equiv 0$ — матричный многочлен, коэффициентами которого являются $n \times n$-матрицы над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. Если элементарные делители матрицы $A(x)$ попарно взаимно просты и из $A(x)$ выделяется линейный множитель $B(x)$, то для того, чтобы $B(x)$ был действительным, необходимо и достаточно, чтобы его характеристический многочлен $\varphi(x) = |B(x)|$ был действительным, т. е. $\varphi(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Для доказательства теоремы установим ряд фактов, которые представляют и самостоятельный интерес.

Лемма 1. Пусть комплексная $n \times n$-матрица D имеет вид

$$D = \begin{Vmatrix} a_1 \\ \bar{a}_1 \\ \vdots \\ a_s \\ \bar{a}_s \\ L \end{Vmatrix},$$

где

$$a_j = \| a_{j1} + b_{j1}i \ . \ . \ . \ a_{jn} + b_{jn}i \|;$$

$$\bar{a}_j = \| a_{j1} - b_{j1}i \ . \ . \ . \ a_{jn} - b_{jn}i \|;$$

$j = 1, \ldots, s$; подматрица L действительная. Тогда $|D| = di^s$, где $d \in \mathbb{R}$.

Доказательство. После элементарных преобразований над строками матрицы D получим

$$|D| = \begin{vmatrix} b_{11}i & \ldots & b_{1n}i \\ a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{s1}i & \ldots & b_{sn}i \\ a_{s1} & \ldots & a_{sn} \\ & L & \end{vmatrix} = di^s,$$

где $d \in \mathbb{R}$.

Лемма 2. Пусть $p(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2$, — произвольные многочлены из $\mathbb{R}[x]$, причем $\psi(x)$ — неразложимый унитальный многочлен в $\mathbb{R}[x]$ и $(\varphi_i(x), \psi(x)) = 1$, $i = 1, 2$. Равенство

$$\varphi_1(x) + v\varphi_2(x) = p(x)\psi(x) \tag{1}$$

может иметь место не более чем при одном значении $v \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Очевидно, $\deg \psi(x) \leqslant 2$. Тогда, если $\psi(x) = x - \alpha$, то легко видеть, что равенство (1) удовлетворяется только одним значением v, а именно: $v = -(\varphi_1(\alpha)/\varphi_2(\alpha))$.

Если же $\psi(x) = (x - \beta)(x - \bar{\beta})$, где $\bar{\beta}$ — сопряженный корень к β, то не составляет труда проверить, что равенство (1) удовлетворяется не более чем в одном случае. Лемма доказана.

В работе [1, с. 131] доказана теорема о полускалярной эквивалентности матриц над $\mathbb{C}[x]$. Оказывается, что этот результат имеет место и для матриц над $\mathbb{R}(x)$.

Теорема 2. Пусть $A(x)$ — полиномиальная $m \times n$-матрица $(m \leqslant n)$ над $\mathbb{R}[x]$. Если $\operatorname{rang} A(x) = m$, то для $A(x)$ существуют такая неособенная матрица P и обратимая матрица $Q(x)$ над $\mathbb{R}[x]$, что имеет место соотношение

$$F(x) = PA(x)Q(x) = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1(x) & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ & \varepsilon_2(x) & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ * & & \ddots & & & \\ & & & \varepsilon_m(x) & \ldots & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\varepsilon_i(x)$ — инвариантные многочлены матрицы $A(x)$.

Доказательство. Для доказательства достаточно использовать лемму 2 и провести размышления аналогичные доказательству теоремы 1 [1, с. 131], заменяя в нем выражения вида $x - \alpha_i$ на $\psi_i(x)$, где $\psi_i(x)$ — унитальный неразложимый многочлен из $\mathbb{R}[x]$.

Пусть полиномиальная матрица $A(x)$ имеет попарно взаимно простые элементарные делители. Тогда на основании теоремы 2 существуют такие неособенная матрица P над $\mathbb{R}$ и обратимая матрица $Q(x)$ над $\mathbb{R}[x]$, что

$$F(x) = PA(x)Q(x) = \begin{Vmatrix} 1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & 1 & \\ \varphi_1(x) & \ldots & & \varphi_{n-1}(x) & \Delta(x) \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

где на незаполненных местах стоят нули, $\Delta(x) = |A(x)|$. Переходя в равенстве (2) к взаимным матрицам, получим

$$F_*(x) = Q_*(x)A_*(x)P_* = \begin{Vmatrix} \Delta(x) & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & \Delta(x) & \\ \psi_1(x) & \ldots & & \psi_{n-1}(x) & 1 \end{Vmatrix},$$

где $\psi_i(x) = -\varphi_i(x)$. Обозначим последнюю строку матрицы $F_*(x)$ через $g(x)$:

$$g(x) = \| \psi_1(x) \ldots \psi_{n-1}(x) \quad 1 \|.$$

Воспользовавшись определением значения полиномиальной матрицы на системе корней многочлена $\varphi(x)$, а также утверждением 4 из [1, с. 29], получим

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{Q_*(x)A_*(x)P_*}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{g(x)}(\varphi). \tag{3}$$

Заметим, что аналогичное равенство было получено в статье [2] на случай поля $\mathbb{C}$.

Пусть

$$A(x) = (Ex - B)D(x), \tag{4}$$

где $|Ex - B| = \varphi(x)$. На основании теоремы 1 из [1, с. 54] матрица B находится как решение матричного уравнения

$$M_{A_*(x)}(\varphi)X = M_{xA_*(x)}(\varphi).$$

Очевидно, уравнения

$$M_{F_*(x)}(\varphi)Y = M_{xF_*(x)}(\varphi),$$
$$M_{g(x)}(\varphi)Y = M_{xg(x)}(\varphi) \tag{5}$$

эквивалентны. Пусть матрица B_1 удовлетворяет этим уравнениям. Тогда имеет место соотношение

$$F(x) = PA(x)Q(x) = (Ex - B_1)S(x),$$

причем $|Ex - B_1| = \varphi(x)$. Откуда имеем

$$A(x) = (Ex - P^{-1}B_1P)P^{-1}S(x)Q^{-1}(x).$$

В силу единственности разложения матрицы $A(x)$ на множители, в котором левый унитальный множитель имеет характеристический многочлен $\varphi(x)$, получаем, что $B = P^{-1}B_1P$.

С учетом равенства (3) и теоремы 5 из [1, с. 52] следует

Лемма 3. Матрица $A(x)$ допускает разложение (4) тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rang} M_{g(x)}(\varphi) = n,$$

при этом $B = P^{-1}B_1P$, где B_1 — решение уравнения (5); P — матрица из соотношения (2).

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Необходимость очевидна.

Достаточность. Так как в $\mathbb{R}[x]$ неразложимыми бывают только многочлены не выше второй степени, то $\varphi(x)$ можно представить так:

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \ldots (x-\alpha_s)^{k_s} (x-\bar{\alpha}_1)^{k_1} \ldots (x-\bar{\alpha}_s)^{k_s} (x- \\ -\beta_1)^{p_1} \ldots (x-\beta_2)^{p_2},$$

где α_i, $\bar{\alpha}_i$ — сопряженные комплексные числа; $\beta_j \in \mathbb{R}$. Пусть

$$N = \begin{Vmatrix} M_{g(x)}\left[\alpha_1^{(k_1)}\right] \\ \cdots\cdots \\ M_{g(x)}\left[\alpha_s^{(k_s)}\right] \end{Vmatrix}, \quad N_1 = \begin{Vmatrix} M_{xg(x)}\left[\alpha_1^{(k_1)}\right] \\ \cdots\cdots\cdots \\ M_{xg(x)}\left[\alpha_s^{(k_s)}\right] \end{Vmatrix},$$

$\bar{N}$, $\bar{N}_1$ — матрицы, сопряженные соответственно к N и N_1. Тогда уравнение (5) можно записать так:

$$\begin{Vmatrix} N \\ \bar{N} \\ K \end{Vmatrix} Y = \begin{Vmatrix} N_1 \\ \bar{N}_1 \\ K_1 \end{Vmatrix},$$

где K и K_1 — действительные матрицы.

Известно, что если многочлен $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ и $\alpha \in \mathbb{C}$, то из равенства $f(\alpha) = a$ следует $f(\bar{\alpha}) = \bar{a}$. Учитывая это, видно, что каждая комплексная строка матриц $M_{g(x)}(\varphi)$ и $M_{xg(x)}(\varphi)$ имеет себе сопряженную, причем сопряженные строки в этих матрицах расположены на одних и тех же местах. Поэтому, применяя лемму 1, получим

$$|M_{g(x)}(\varphi)| = ai^s,$$

где $a \in \mathbb{R}$. Для того чтобы найти элемент y_{tj} матрицы Y, найдем частное

$$|M_{g(x)}(\varphi)|_{(tj)} / |M_{g(x)}(\varphi)|,$$

где $|M_{g(x)}(\varphi)|_{(tj)}$ — определитель матрицы, полученной заменой t-го столбца матрицы $M_{g(x)}(\varphi)$ на j-й столбец матрицы $M_{xg(x)}(\varphi)$. Ясно, что при такой замене структура полученной матрицы останется прежней, т. е. строки, которые были сопряжены между собой, останутся снова сопряженными. Поэтому

$$|M_{g(x)}(\varphi)|_{(tj)} = a_{tj} i^s,$$

где $a_{tj} \in \mathbb{R}$. Следовательно, $y_{tj} = a_{tj}/a$. Значит, матрица B_1 состоит из действительных чисел. Учитывая лемму 3, а также то, что матрица P действительная, получаем, что матрица B также действительная.

1. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники.— К.: Наук. думка, 1981.—224 с.
2. *Петрикович В. М.* Абсолютная разложимость матричных многочленов. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1979, вып. 9, с. 37—41.

Ин-т прикладных проблем механики и математики АН УССР, Львов

Получено 10.04.84.

УДК 519.95

Н. А. Недашковский

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНО-БУКВЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Работа посвящена численным методам решения систем алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda)\, x_j(\lambda) = a_{i,n+1}(\lambda) \quad (i = \overline{1, n}). \tag{1}$$

Здесь $a_{ij}(\lambda)$ — полиномы от действительной или комплексной переменной. Без ограничения общности будем предполагать, что