1. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башалейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. — М.: Наука, 1976.—627 с.
2. *Малюжинец Г. Д.* Задача о скачке в теории дифракции. — Тр. Акуст. ин-та, 1971, вып. 15, с. 140—168.
3. *Нуссенцвейг Х. М.* Причинность и дисперсионные соотношения.— М.: Мир, 1976.—402 с.
4. *Sperb R. P.* Maximum principles and their applications. — New York etc.: Acad. press, 1981. — 224 p.

Львовский государственный
ун-т им. Ив. Франко

Получено 11.04.84

УДК 539.3

М. Г. Грингауз, Л. А. Фильштинский

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ СРЕД С РАЗРЕЗАМИ

Исходной при использовании методов механики разрушения [8] служит, в частности, поставляемая теорией упругости информация о напряженно-деформированном состоянии вблизи вершин трещин (математических разрезов).

Методы решения двумерных краевых задач для областей с разрезами, когда последние целиком (включая вершины) расположены в однородной среде, разработаны к настоящему времени достаточно полно. Подробную библиографию по этим вопросам можно найти в [7].

Отличия в развитии трещин в структурно-неоднородных телах, в том числе в композиционных материалах, обусловлены, в первую очередь, наличием поверхностей раздела, которые могут являться как преградой на пути распространения трещин, так и их источником. Важное значение в связи с этим приобретает исследование полей напряжений вблизи разрезов, частично или полностью расположенных на линиях раздела сред с различными упругими свойствами.

Известно большое количество работ, посвященных решению такого рода задач для некоторых частных конфигураций, преимущественно для прямых и круговых разрезов и линий раздела.

Одним из методов, свободных от таких жестких ограничений на форму границы области, является метод интегральных уравнений.

В [2] в рамках метода интегральных уравнений была рассмотрена задача о продольном сдвиге анизотропной среды, содержащей двоякопериодическую систему инородных включений, ограниченных произвольными гладкими контурами, при частичной отслойке волокон от матрицы, в [9] — плоская задача теории упругости для изотропной среды, содержащей инородное включение, ограниченное произвольным гладким контуром, когда на линии раздела расположен разрез (здесь и далее предполагаем, говоря о гладких дугах, что их кривизны удовлетворяют условию Гельдера [5]).

В [1] был предложен основанный на методе интегральных уравнений единый подход к решению плоской задачи теории упругости для изотропной кусочно-однородной среды с разрезами, когда граница области (объединение разрезов и линий раздела материалов) есть произвольная кусочно-гладкая линия. Такая постановка охватывает случаи инородного включения с кусочно-гладким контуром, разреза с точкой излома, ветвящегося разреза, расположения разреза на линии раздела материалов, выхода на эту линию или пересечения с ней и т. п.

Интегральные представления для комплексных потенциалов Колосова — Мусхелишвили [4] конструировались в [1] путем определенной модификации представлений типа [10]. Достоинством использованных в [1] представлений является то, что они автоматически удовлетворяют условию непрерывности вектора напряжения при переходе через границу области. Из оставшихся краевых условий следует сингулярное интегральное уравнение с неподвижными особенностями (регулярные ядра полученного уравнения ведут себя в смысле дифференцируемости как кривизна границы области, чем и объясняется появление неподвижных особенностей в угловых точках границы — точках, где сходятся не касательные друг к другу гладкие дуги).

Распространим схему [1] на случай продольного сдвига изотропной кусочно-однородной среды с разрезами.

Пусть в плоскости комплексной переменной $z = x_1 + ix_2$ имеется простой замкнутый кусочно-гладкий контур Γ с одной угловой точкой c. Модуль сдвига среды внутри контура Γ (область D_1 — включение) и вне (область D — матрица) принимает значения μ_1 и μ соответственно. Из точки c к точкам c_1, c_2, c_3 выходят три гладких разреза: L_1 — в область D_1, L_2 — в область D, L_3 — вдоль контура Γ (рис. 1).

Берега разрезов свободны от усилий, на $L_4 = \Gamma \diagdown L_3$ имеет место идеальный контакт материалов. Точки c, c_1, c_2, c_3 будем называть узлами, под границей L понимаем объединение всех дуг L_j ($j = 1, \ldots, 4$). Обозначим также через λ^* величину $(\mu_1 - \mu)/(\mu_1 + \mu)$.

Требуется определить кусочно-голоморфную функцию $F(z)$, обеспечивающую заданное однородное напряженное состояние на бесконечности $\sigma_{13}^{(\infty)}$, $\sigma_{23}^{(\infty)}$ и удовлетворяющую в отличных от узлов точках границы L следующим краевым условиям: $T^+ = T^- = 0$ на разрезах; $T^+ = T^-$ и $d\left(u_3^+ - u_3^-\right)/ds = 0$ на участке идеального контакта (s — дуговая абсцисса). Предполагается при этом, что перемещение u_3 и касательное напряжение T, действующее на какой-либо элемент, составляющий угол θ с осью Ox_1, вычисляются по известным формулам [4]

$$\mu u_3 = \operatorname{Re} f(z), \quad T = \operatorname{Im}[F(z) \exp(i\theta)],$$

где $F(z) = f'(z)$.

Используя результаты [3], запишем

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{p(\tau) \exp[-i\theta(\tau)]}{\tau - z} d\tau + E^{(\infty)}, \tag{1}$$

$$E^{(\infty)} = \sigma_{13}^{(\infty)} - i\sigma_{32}^{(\infty)}, \ \operatorname{Im} p(\tau) = 0.$$

Нетрудно видеть, что представление (1) автоматически удовлетворяет условию $T^+ = T^-$ на всех участках границы. Подставляя предельные значения (1) в оставшиеся краевые условия, приходим к сингулярному интегральному уравнению с неподвижными особенностями относительно искомой плотности $p(\tau)$:

$$p(t) - \frac{\lambda^*}{\pi} \operatorname{Im} M\{t;\ p(\tau)\} = 2\lambda^* \operatorname{Re}[q(t) E^{(\infty)}], \quad t \in L_4, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} M\{t;\ p(\tau)\} = 2 \operatorname{Im}[q(t) E^{(\infty)}], \ t \in L_1 \cup L_2 \cup L_3,$$

$$M\{t;\ p(\tau)\} = \int\limits_l \frac{p(\tau) \overline{q(\tau)} q(t)}{\tau - t} d\tau,$$

$$q(t) = \exp[i\theta(t)].$$

К уравнению (2) следует присовокупить условие однозначности перемещений аналогичное [1].

Характером поведения интегрального уравнения (2) и представления (1) вблизи узловых точек границы полностью определяется асимптотическое распределение напряжений вблизи узловых точек [1, 5, 6].

Нам неизвестны работы, посвященные численному решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижными особенностями, заданных на кусочно-гладких контурах общего вида. Представляется целесообразным в связи с этим попытаться использовать для численного решения уравнений указанного класса методы, разработанные для численного решения уравнений, заданных на простых разомкнутых дугах. Здесь для этой цели выбрана основанная на полигональной аппроксимации искомых функций процедура типа рассмотренной в [3]. Проиллюстрируем применение метода полигональной аппроксимации на примере решения интегрального уравнения, соответствующего случаю выхода разреза на контур включения (на рис. 1 разрез L_1 отсутствует; идеальный контакт материалов имеет место вдоль всего контура Г, который предполагается гладким). Отметим, прежде всего, что порядок особенности плотности $p(\tau)$ в узле c равен, как это сразу видно из интегрального уравнения, $1/2$. Представим плотность $p(\tau)$ в виде $p(\tau) = w(s)/[\sqrt{s}(l-s)^\gamma]$ на L_2; $p(\tau) = v(s_0)/[s_0(d-s_0)]^\gamma$ на Г. Здесь $w(s)$ и $v(s_0)$ — удовлетворяют усло-

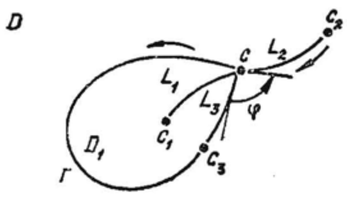

Рис. 1.

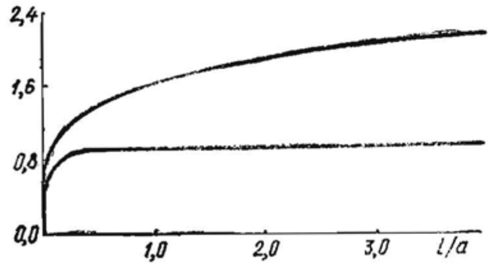

Рис. 2.

вию Гельдера на L_2 и Г; l и d — длины дуг L_2 и Г; s и s_0 — дуговые абсциссы, отсчитываемые на L_2 и Г от нуля до l и d в направлении, указанном на рис. 1 стрелками; γ — порядок особенности плотности $p(\tau)$ в узле c. Из асимптотического анализа интегрального уравнения (2) следуют соотношения

$$\frac{v(0)}{d^\gamma} = -\lambda^* \frac{\sin[(\gamma-1)\varphi]}{\sin(\gamma\pi)} \frac{w(l)}{\sqrt{l}}, \tag{3}$$

$$\frac{v(d)}{d^\gamma} = -\lambda^* \frac{\sin[-\gamma\pi + (\gamma-1)\varphi]}{\sin(\gamma\pi)} \frac{w(l)}{\sqrt{l}},$$

и трансцендентное уравнение относительно γ. Будем разыскивать функции $w(s)$ и $v(s_0)$ в виде полигонов (кусочно-линейных функций). Можно показать также на основе анализа асимптотического поведения интегрального уравнения, что в определенных случаях производные функций $w(s)$ и $v(s_0)$ обращаются в бесконечность в узле c. В этих случаях функции $w(s)$ и $v(s_0)$ будем аппроксимировать вблизи узла c соответствующими степенными функциями. Требуя выполнения интегрального уравнения на дискретном множестве точек коллокации, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений полигона. Для замыкания системы к ней следует добавить условие однозначности перемещений и соотношений (3). Отработка различных вариантов численной реализации описанной выше схемы осуществлялась на некоторых простейших сингулярных интегральных уравнениях, замкнутые решения которых известны.

На рис. 2 приведены результаты расчетов коэффициентов интенсивности напряжений у вершин трещины продольного сдвига для композиции типа сталь — алюминий (отношение λ модулей сдвига включения и матрицы равно 3). Разрез длиной l, расположенный вдоль оси $0x_1$, выходит под прямым углом ($\varphi = \pi/2$, $\gamma = 1/3$) на контур эллиптического включения, направление полуосей a и b которого совпадает с направлением осей $0x_1$ и $0x_2$ соответственно, $a/b = 5$. Нижняя кривая соответствует узлу c_2 и иллюстрирует зависимость величины $\left|\lim_{\rho\to 0}[2T\sqrt{\rho/l}]\right|$ от величины l/a, верхняя кривая соответствует узлу c и иллюстрирует изменение величины $|(1+1/\lambda)\sin(\gamma\pi)\lim_{\rho\to 0}[T(\rho/l)]^{\gamma}|$, где T — напряжение на продолжении разреза за вершину; ρ — расстояние до вершины разреза; $\sigma_{13}^{(\infty)}=0$; $\sigma_{23}^{(\infty)}=1$.

1. *Григолюк Э. И., Грингауз М. Г., Фильштинский Л. А.* Об одном подходе к исследованию сингулярных полей напряжений в кусочно-однородной среде с ветвящимися разрезами. — Докл. АН СССР, 1981, **261**, № 3, с. 567—570.
2. *Долгих В. Н., Фильштинский Л. А.* Продольный сдвиг композиционного материала с дефектами. — Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, 1980, № 4, с. 103—110.
3. *Лаврентьев М. А.* О построении потока, обтекающего дугу заданной формы.— Тр. ЦАГИ, 1932, вып. 118.—58 с.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966.—708 с.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.— 512 с.
6. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. — М.: Наука, 1977.—312 с.
7. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. — Киев: Наук. думка, 1981.—324 с.
8. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974.— 640 с.
9. *Ioakimidis N. I., Theocaris P. S.* A curvilinear crack along the interface of two plane isotropic elastic media. — Rev. Roum. Sci. Techn. Ser. Mec. Appl., 1978, **23**, N 4, p. 563—575.
10. *Sherman D. I.* On the problem of plane strain in non-homogeneous media. — In: Non-homogeneity in elasticity and plasticity. Pergamon press, 1959, p. 3—20.

Сумский филиал Харьковского политехнического ин-та

Получено 26.04.83.

УДК 530.12 : 531.18 : 537.8 : 514

Я. И. Комарницкий

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСКОРЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

В работе [1] изучен общий случай плоского движения плоской неизменяемой фигуры с использованием ускорений высших порядков. Под общим случаем плоского движения понимается поступательное и вращательное движения. В этой работе использовалась возможность зафиксировать обе координаты на евклидовой плоскости. Эта возможность обусловлена пространственностью обеих евклидовых координат. После изучения общего случая плоского движения неизменяемой фигуры изучаются некоторые общие свойства ускорений высших порядков точек неизменяемой фигуры при самом общем движении в пространстве.

В настоящей статье рассмотрен общий случай плоского движения псевдоевклидовой плоскости. Сформулированы некоторые общие свойства ускорений высших порядков точек этой плоскости. Некоторые результаты, относящиеся к движению псевдоевклидовой плоскости, отличаются от аналогичных результатов для движения евклидовой плоскости. На движущейся поступательно и вращательно псевдоевклидовой плоскости можно зафиксировать две координаты. Из-за этого она не совпадает с псевдоевклидной плоскостью Минковского, но ее рассмотрение имеет смысл в электродинамике с плотностями электрического и магнитного токов.

Развитие теории кулачковых механизмов, начавшееся в 30-х годах XX века, показало, что по крайней мере ускорения 2-го порядка являются необходимыми для обеспечения точной работы механизмов.

Рассмотрим две псевдоевклидовые плоскости, первая из которых является неподвижной, а вторая движется поступательно и вращательно. На первой плоскости введем ортогональную систему координат